ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXVII (1973)

Connexions linéaires conjuguées

par JACEK GANCARZEWICZ (Kraków)

1. Introduction. Dans cette note on étudiera les connexions (linéaires) conjuguées. On utilisera la définition suivante.

DÉFINITION 1.1. Deux connexions Γ et $\check{\Gamma}$ définies sur un espace fibré principal $P(M, G)$ sont dites *φ-conjuguées*, où $\varphi\colon G \to G$ est un endomorphisme du groupe G, s'il existe un espace fibré réduit $P_0(M, H^\varphi)$ de $P(M, G)$ de groupe structural

$$H^\varphi = \{\xi \in G\colon \varphi(\xi) = \xi\},$$

tel que pour toute section $\sigma\colon U \to P_0$, on a

$$\sigma^*\check{\omega} = \mathscr{L}\varphi\cdot\sigma^*\omega,$$

où ω, $\check{\omega}$ sont les formes de Γ et de $\check{\Gamma}$, $\mathscr{L}\varphi\colon \mathscr{L}(G) \to \mathscr{L}(G)$ est l'endomorphisme de l'algèbre de Lie induit par φ, $\sigma^*\omega$ est l'image réciproque de ω par σ (par conséquent $\sigma^*\omega$ est une 1-forme sur U à valeurs dans $\mathscr{L}(G)$). L'opération $\mathscr{L}\varphi\circ\sigma^*\omega$ est définie de la manière suivante: $(\mathscr{L}\varphi\cdot\sigma^*\omega)_x = \mathscr{L}\varphi\cdot(\sigma^*\omega)_x$ pour x quelconque dans U (voir aussi [4]).

Dans [4] il a été démontré que si φ est un automorphisme involutif, cette définition s'accorde avec la définition de W. Wiediernikov introduite dans [10]. Evidemment, si φ n'est pas involutif, la relation „Γ et $\check{\Gamma}$ sont φ-conjuguées" n'est pas symétrique, et par suite, il vaut mieux dire „Γ est φ-conjuguée avec $\check{\Gamma}$". Cependant, dans la suite, on utilisera la terminologie „Γ et $\check{\Gamma}$ sont φ-conjuguées".

Au point de vue de la théorie des connexions conjuguées définies sur $P(M, G)$ deux problèmes sont très importants – le premier, c'est de déterminer les endomorphismes du groupe structural G (en particulier les automorphismes involutifs), et le deuxième, c'est de donner une interprétation géométrique d'un couple $(\Gamma, \check{\Gamma})$ de connexions φ-conjuguées pour tout endomorphisme φ du groupe G.

Le but de cette note est de donner des réponses à ces questions dans le cas des connexions linéaires sur M, c'est-à-dire des connexions définies sur l'espace fibré (principal) $L(M)$ des repères linéaires avec le groupe linéaire $GL(n, R)$, $n = \dim M$, comme groupe structural.

Grâce au théorème démontré par Kucharzewski et Zajtz [7] on peut donner une classification complète des endomorphismes du groupe $GL(n, R)$. Nous rappelons ce théorème.

THÉORÈME 1.2. *Soit* $h\colon GL(n, R) \to GL(n, R)$ *un endomorphisme de classe* C^∞. *Alors* h *est défini par l'une des trois formules*:

$$h(X) = G(\det X), \tag{1.2.1}$$

$$h(X) = \varepsilon(\det X)|\det X|^a CXC^{-1}, \tag{1.2.2}$$

$$h(X) = \varepsilon(\det X)|\det X|^a C(X^{-1})^t C^{-1}, \tag{1.2.3}$$

où $a \in R$, $C \in GL(n, R)$, I *est la matrice unité*, $G\colon R-\{0\} \to GL(n, R)$ *une fonction telle que* $G(tt') = G(t)G(t')$ *pour* $t, t' \in R-\{0\}$, *et* $\varepsilon\colon R-\{0\} \to R-\{0\}$ *est l'une des deux fonctions*: $\varepsilon(t) = 1$ *ou* $\varepsilon(t) = \operatorname{sgm} t$.

Le théorème de M. Kucharzewski et A. Zajtz est un peu plus général; il donne la classification des endomorphismes quelconques (aussi non-continus). Pour obtenir le théorème de la forme donnée ici il suffit d'observer que toute fonction $g\colon R-\{0\} \to R-\{0\}$ continue (et par conséquent de classe C^∞) telle que $g(tt') = g(t)g(t')$ pour $t, t' \in R-\{0\}$ peut être écrite sous la forme $g(t) = \varepsilon(t)|t|^a$.

On observe que dans les formules (1.2.2) et (1.2.3) les matrices C et $C' = |\det C|^{-1/n}C$ définissent le même endomorphisme, et par suite on peut toujours supposer que $|\det C| = 1$.

Ce théorème permet de trouver tous les automorphismes involutifs du groupe linéaire $GL(n, R)$. On a

THÉORÈME 1.3. *Soit* $h\colon GL(n, R) \to GL(n, R)$ *un automorphisme involutif de* $GL(n, R)$ *et de classe* C^∞. *Si* $n = 0 \pmod 2$ *alors* h *est définit par l'une des deux formules*:

$$h(X) = \varepsilon(\det X)|\det X|^a CXC^{-1}, \tag{1.3.1}$$

où ε *est le même que dans le Théorème* 1.2, $a(na+2) = 0$ *et* $C^2 = \pm I$,

$$h(X) = \varepsilon(\det X)|\det X|^a C(X^{-1})^t C^{-1}, \tag{1.3.2}$$

où ε *est le même que dans le Théorème* 1.2, $a(na-2) = 0$ *et* $|\det C| = 1$, $C^t = \pm C$. *Si* $n = 1 \pmod 2$ h *est défini par l'une des deux formules*:

$$h(X) = |\det X|^a CXC^{-1}, \tag{1.3.1'}$$

où $a(na+2) = 0$ *et* $C^2 = I$,

$$h(X) = |\det X|^a C(X^{-1})^t C^{-1}, \tag{1.3.2'}$$

où $a(na-2) = 0$ *et* $|\det C| = 1$, $C^t = I$.

Dans cette note on va considérer les endomorphismes des types (1.2.2) et (1.2.3). Dans le section 5 on démontrera le théorème principal (Théorème 5.2). Il donne une interprétation géométrique d'un couple de connexions linéaires conjuguées par rapport à un endomorphisme des types (1.2.2) ou (1.2.3). Ensuite, on considérera des cas particuliers.

2. Densités. Dans cette note ε sera toujours l'une des deux fonction définies ci-dessous:

$$\varepsilon(t) = 1 \quad \text{ou bien } \varepsilon(t) = \operatorname{sgm} t.$$

On considère toujours ε comme une fonction définie sur $R-\{0\}$ — elle est de classe C^∞.

On rappelle qu'une ε-densité [1] du type (1, 1) et de poids a est définie si, à toute section locale σ: $U \to LM$ (où LM note l'espace fibré des repères linéaires dont la base est M) on fait correspondre une matrice T_σ de telle manière que pour σ', $\sigma = \sigma' \cdot X$, X: $U \to GL(n, R)$, on a

$$T_{\sigma'} = \varepsilon(\det X)|\det X|^{-a} X T_\sigma X^{-1}. \tag{2.1}$$

D'une façon analogue, une famille $\{T_\sigma\}$ de matrices définit une ε-densité du type (2, 0) et de poids a, si l'on a

$$T_{\sigma'} = \varepsilon(\det X)|\det X|^{-a} X T_\sigma X^t, \tag{2.2}$$

et une ε-densité du type (0, 2) et de poids a, si l'on a

$$T_{\sigma'} = \varepsilon(\det X)|\det X|^{-a} (X^{-1})^t T_\sigma X^{-1}. \tag{2.3}$$

Si $X = [X_i^{i'}]$ et $X^{-1} = [X_{i'}^i]$, on peut exprimer ces formules de la manière suivante:

$$t_{j'}^{i'} = \varepsilon(\det X)|\det X|^{-a} t_j^i X_i^{i'} X_{j'}^j, \tag{2.1'}$$

$$t^{i'j'} = \varepsilon(\det X)|\det X|^{-a} t^{ij} X_i^{i'} X_j^{j'}, \tag{2.2'}$$

$$t_{i'j'} = \varepsilon(\det X)|\det X|^{-a} t_{ij} X_{i'}^i X_{j'}^j. \tag{2.3'}$$

Les tenseurs s'identifient à des ε-densités du type correspondant et de poids $a = 0$, où $\varepsilon = 1$.

DÉFINITION 2.4. Etant donnée une ε-densité T du type (i, j), $i+j = 2$, et de poids a. T est dite de *genre* C, où $C \in (R^n)^n$, si un voisinage de chaque point admet une section σ: $U \to LM$ telle que $T_\sigma = C$.

Maintenant on va prouver quelques propositions dont nous aurons besoin pour démontrer les théorèmes principaux de cette note.

PROPOSITION 2.5. *Etant donnée une matrice $C \in GL(n, R)$.*

(a) *Il existe une correspondance bijective entre les ε-densités du type*

[1] Dans la terminologie classique on utilise les noms de G-densité et de W-densité (si $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon(t) = \operatorname{sgm} t$). La terminologie proposée ici sera plus commode pour nous, car elle permettra d'exprimer nos propositions sous une forme homogène (voir [5]).

$(1, 1)$, *de poids* a *et de genre* C, *et les* ε*-densités du type* $(1, 1)$, *de poids* $-a$ *et de genre* C^{-1}.

(b) *Il existe une correspondance bijective entre les* ε*-densités du type* $(2, 0)$, *de poids* a *et de genre* C, *et les* ε*-densités du type* $(0, 2)$, *de poids* $-a$ *et de genre* C^{-1}.

Si T *et* $\tilde{T}$ *sont deux densités associées au moyen d'une de ces correspondances, alors pour toute section* $\sigma\colon U \to LM$, *on a*

$$\tilde{T}_\sigma = (T_\sigma)^{-1}.$$

La démonstration de cette proposition est triviale. (On observe que $T_\sigma \in GL(n, R)$, car $C \in GL(n, R)$.)

PROPOSITION 2.6. *Etant donné un endomorphisme*

$$\varphi_{\varepsilon Ca}\colon GL(n, R) \to GL(n, R),$$

$$\varphi_{\varepsilon Ca}(X) = \varepsilon(\det X)|\det X|^a CXC^{-1}$$

et soit

$$H_{\varepsilon Ca} = \{X \in GL(n, R)\colon \varphi_{\varepsilon Ca}(X) = X\}.$$

Il existe une correspondance bijective entre les espaces fibrés réduits $P(M, H_{\varepsilon Ca})$ *de* LM *et les* ε*-densités du type* $(1, 1)$, *de poids* a *et de genre* C. *Si* $P(M, H_{\varepsilon Ca})$ *et* T *sont associés, alors pour toute section* $\sigma\colon U \to P$ *on a* $T_\sigma = C$.

Démonstration. Etant donné un espace fibré réduit $P(M, H_{\varepsilon Ca})$ de LM.

Pour $\sigma\colon U \to LM$ on pose

$$T_\sigma = \varepsilon(\det A)|\det A|^{-a} ACA^{-1},$$

où $A\colon U \to GL(n, R)$ tel que $\sigma_0 = \sigma\cdot A$ est une section de $P(M, H_{\varepsilon Ca})$.

Tout d'abord on observe que T_σ ne dépend que de σ. En effet, soit $A'\colon U \to GL(n, R)$ une autre application telle que $\sigma_0' = \sigma\cdot A'$ est une section de P. Alors $\sigma_0' = \sigma_0\cdot Y$, où $Y\colon U \to H_{\varepsilon Ca}$, c'est-à-dire

$$\varepsilon(\det Y)|\det Y|^a CYC^{-1} = Y,$$

et grâce à la formule

$$\sigma\cdot A' = \sigma_0' = \sigma_0\cdot Y = \sigma\cdot(AY),$$

on a $A' = AY$. Il en résulte

$$\begin{aligned}
&\varepsilon(\det A')|\det A'|^{-a} A'C(A')^{-1}\\
&\quad = \varepsilon(\det A)\varepsilon(\det Y)|\det A|^{-a}|\det Y|^{-a} AYCY^{-1}A^{-1}\\
&\quad = \varepsilon(\det A)\varepsilon(\det Y)|\det A|^{-a}|\det Y|^{-a} A\big(\varepsilon(\det Y)|\det Y|^a CYC^{-1}\big)CY^{-1}A^{-1}\\
&\quad = \varepsilon(\det A)|\det A|^{-a} ACA^{-1},
\end{aligned}$$

car $(\varepsilon(t))^2 = 1$. Maintenant, il suffit de vérifier que la famille $\{T_\sigma\}$ définit une ε-densité du type $(1, 1)$, de poids a et de genre C. Soient σ, σ': $U \to LM$ deux sections et X: $U \to GL(n, R)$ tel que $\sigma = \sigma' \cdot X$. On peut choisir A: $U \to GL(n, R)$ tel que $\sigma_0 = \sigma \cdot A$ soit une section à valeurs dans P. Comme $\sigma_0 = \sigma' \cdot (XA)$, on a

$$\begin{aligned} T_{\sigma'} &= \varepsilon(\det XA)|\det XA|^{-a} XAC(XA)^{-1} \\ &= \varepsilon(\det X)|\det X|^{-a} X\big(\varepsilon(\det A)|\det A|^{-a} ACA^{-1}\big)X^{-1} \\ &= \varepsilon(\det X)|\det X|^{-a} XT_\sigma X^{-1}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire la formule (2.1) est satisfaite.

Si $\sigma = \sigma_0$ est une section à valeurs dans P, alors $T_\sigma = C$, c'est-à-dire T est de genre C.

Réciproquement, étant donnée une ε-densité T du type $(1, 1)$, de poids a et de genre C. D'après la Définition 2.4, on peut trouver un recouvrement $\{U_\alpha\}$ de M et des section σ_α: $U_\alpha \to LM$ telles que $T_{\sigma_\alpha} = C$. Soit $X_{\alpha\beta}$: $U_\alpha \cap U_\beta \to GL(n, R)$ tel que $\sigma_\alpha = \sigma_\beta \cdot X_{\alpha\beta}$ sur $U_\alpha \cap U_\beta$. D'après la formule (2.1), on a

$$C = \varepsilon(\det X_{\alpha\beta})|\det X_{\alpha\beta}|^{-a} X_{\alpha\beta} C X_{\alpha\beta}^{-1}.$$

On peut transformer cette formule de la manière suivante:

$$\begin{aligned} C^{-1} &= \varepsilon(\det X_{\alpha\beta})|\det X_{\alpha\beta}|^{a} X_{\alpha\beta} C^{-1} X_{\alpha\beta}^{-1}, \\ C^{-1}X_{\alpha\beta} &= \varepsilon(\det X_{\alpha\beta})|\det X_{\alpha\beta}|^{a} X_{\alpha\beta} C^{-1}, \\ X_{\alpha\beta} &= \varepsilon(\det X_{\alpha\beta})|\det X_{\alpha\beta}|^{a} C X_{\alpha\beta} C^{-1}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $X_{\alpha\beta}$ est une application à valeurs dans $H_{\varepsilon Ca}$. Alors, d'après la Proposition 5.3 dans [6], p. 58, il existe un espace fibré réduit $P(M, H_{\varepsilon Ca})$ de LM, et un seul, tel que σ_α est une section à valeurs dans P.

Ce raisonnement achève notre démonstration.

PROPOSITION 2.7. *Etant donné un endomorphisme*

$$\psi_{\varepsilon Ca}\colon GL(n, R) \to GL(n, R),$$
$$\psi_{\varepsilon Ca}(X) = \varepsilon(\det X)|\det X|^a C(X^{-1})^t C^{-1}$$

et soit

$$\bar{H}_{\varepsilon Ca} = \{X \in GL(n, R)\colon \psi_{\varepsilon Ca}(X) = X\}.$$

Il existe une correspondance bijective entre les espaces fibrés réduits $P(M, \bar{H}_{\varepsilon Ca})$ de LM, et les ε-densités du type $(2, 0)$, de poids a et de genre C. Si $P(M, \bar{H}_{\varepsilon Ca})$ et T sont associés, alors pour toute section σ: $U \to P$, on a $T_\sigma = C$.

La démonstration de cette proposition est pareille à celle de la proposition précédente. Si $P(M, \bar{H}_{\varepsilon C a})$ set donné, la ε-densité T associée à cet espace firbé réduit est définie de la manière suivante. Soit $\sigma\colon U \to LM$ une section, et soit $A\colon U \to GL(n, R)$ tel que $\sigma_0 = \sigma\cdot A$ est une section à valeurs dans P. On pose

$$T_\sigma = \varepsilon(\det A)\,|\det A|^{-a} ACA^t.$$

3. Dérivée covariante mixte. Etant donnée une connexion linéaire Γ sur M, soit ω sa forme.

Comme $GL(n, R)$ est une partie ouverte de $R^{n^2} = (R^n)^n$, l'algèbre de Lie $\mathscr{L}_n(R) = \mathscr{L}\big(GL(n, R)\big)$ s'identifie (de la manière canonique) à $(R^n)^n$. Soit E^i_j la matrice dont tout élément est zéro, sauf pour l'élément situé à l'intersection de la i-ème colonne et de la j-ème ligne qui est 1. Alors $\{E^i_j\}_{i,j=1,\ldots,n}$ est une base de $\mathscr{L}_n(R)$ (base canonique).

Maintenant, pour toute section $\sigma\colon U \to LM$, la forme $\sigma^*\omega$ s'écrit d'une manière unique:

$$\sigma^*\omega = \omega^j_i E^i_j, \tag{3.1}$$

où ω^i_j sont des 1-formes ordinaires (à valeurs dans R) sur U. Pour tout point x de U

$$\sigma(x) = \big(v_1(x), \ldots, v_n(x)\big) \tag{3.2}$$

est une base de $T_x M$, et soit

$$\{v^1(x), \ldots, v^n(x)\} \tag{3.3}$$

la base duale de $T^*_x M$, c'est-à-dire $v^i(x)\big(v_j(x)\big) = \delta^i_j$ pour $x \in U$. Ensuite toute forme ω^i_j s'écrit d'une manière unique:

$$\omega^i_j = \Gamma^i_{kj} v^k, \tag{3.4}$$

où Γ^i_{kj} sont des fonctions sur U de classe C^∞. Γ^i_{kj} sont dits les coefficients de Γ par rapport à σ.

Si $\sigma, \sigma'\colon U \to LM$ sont deux sections et $X\colon U \to GL(n, R)$ est l'application telle que $\sigma' = \sigma\cdot X$, et si l'on note Γ^i_{kj}, $\Gamma^{i'}_{k'j'}$ les coefficients de Γ par rapport à σ et à σ' respectivement, et si $X = [X^{i'}_i]$ et $X^{-1} = [X^i_{i'}]$, alors on a

$$\Gamma^{i'}_{k'j'} = \Gamma^i_{kj} X^{i'}_i X^k_{k'} X^j_{j'} + v_{k'}(X^i_{j'}) X^{i'}_i, \tag{3.5}$$

où $\sigma'(x) = \big(v_{1'}(v), \ldots, v_{n'}(x)\big)$ [2].

---

[2] On rappelle que tout vecteur $v \in T_x M$ s'identifie à une application $v\colon C^\infty(M, x) \to R$, R-linéaire et telle que $v(fg) = v(f)g(x) + f(x)v(g)$.

(On observe que si (U, φ) et (U', φ') sont deux systèmes de coordonnées locales sur M, et si

$$\sigma : U \to LM, \quad \sigma(x) = (\partial_1|_x, \ldots, \partial_n|_x),$$
$$\sigma' : U \to LM, \quad \sigma'(x) = (\partial_{1'}|_x, \ldots, \partial_{n'}|_x)$$

sont les sections associées à (U, φ) et à (U', φ') respectivement, alors la formule (3.5) prend la forme

$$\Gamma^{i'}_{k'j'} = \Gamma^i_{kj} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'} \partial x^{j'}},$$

voir [5].)

Réciproquement, en donnant pour toute section σ: $U \to LM$ d'un système des fonctions Γ^i_{kj} tel que les formules (3.5) sont satisfaites, on définit une connexion linéaire Γ, et une seule, sur M. La forme ω de Γ est définie par (3.4) et (3.1).

Définition 3.6. Etant données deux connexions linéaires Γ et $\check{\Gamma}$ sur M, soient Γ^i_{kj} et $\check{\Gamma}^i_{kj}$ les coefficients de Γ et de $\check{\Gamma}$ respectivement par rapport à une section σ: $U \to LM$. Soit T une ε-densité du type (i, j), $i + j = 2$, et de poids a. La *dérivée covariante mixte* $\nabla_{\Gamma\check{\Gamma}} T$ de T par rapport à un couple $(\Gamma, \check{\Gamma})$ est une ε-densité du type $(i, j+1)$ et de poids a, telle que ses coefficients par rapport à σ sont définis par les formules suivantes (où l'on note $\Gamma_k = \Gamma^i_{ki}$ et σ est donné par (3.2)):

(3.6.1) $$\nabla_k t^{(i)}_j = v_k(t^i_j) - a\Gamma_k t^i_j - \Gamma^s_{kj} t^i_s + \check{\Gamma}^i_{ks} t^s_j$$

dans le cas $i = j = 1$, ou

(3.6.2) $$\nabla_k t^{(i)j} = v_k(t^{ij}) - a\Gamma_k t^{ij} + \Gamma^j_{ks} t^{is} + \check{\Gamma}^i_{ks} t^{sj}$$

dans le cas $i = 2$, $j = 0$, ou enfin

(3.6.3) $$\nabla_k t_{(i)j} = v_k(t_{ij}) - a\Gamma_k t_{ij} - \Gamma^s_{kj} t_{is} - \check{\Gamma}^s_{ki} t_{sj}$$

dans le cas $i = 0$, $j = 2$.

On observe que si T est un tenseur (c'est-à-dire, si $a = 0$ et $\varepsilon(t) = 1$) cette définition coïncide avec la définition introduite par Norden [9] (²). De plus, dans le cas $\Gamma = \check{\Gamma}$, cette définition coincide avec la définition classique de la derivée covariante d'une densité.

4. Endomorphismes induits. Le but de ce paragraphe est d'établir des formules pour les endomorphismes induits

$$\mathscr{L}\varphi \colon \mathscr{L}_n(R) \to \mathscr{L}_n(R) = \mathscr{L}(GL(n, R)) = (R^n)^n,$$

où φ est un endomorphisme du groupe linéaire.

(²) Cette notation a été aussi introduite par Norden [9].

On introduit les notations suivantes:

$$\varepsilon\colon GL(n,R)\to GL(n,R),\qquad \varepsilon(X)=\varepsilon(\det X)I,$$
$$h_a\colon GL(n,R)\to GL(n,R),\qquad h_a(X)=|\det X|^a X,$$
$$k_C\colon GL(n,R)\to GL(n,R),\qquad k_C(X)=CXC^{-1},$$
$$l\colon GL(n,R)\to GL(n,R),\qquad l(X)=(X^{-1})^t,$$

où $a\in R$, $C\in GL(n,R)$ et I est la matrice unité.

On prouve le lemme suivant:

LEMME 4.1. *On a les formules suivantes*:

$$\mathscr{L}\varepsilon = id, \tag{4.1.1}$$
$$\mathscr{L}h_a(E^i_j) = (a\delta^i_j\delta^p_q+\delta^i_q\delta^p_j)E^q_p, \tag{4.1.2}$$
$$\mathscr{L}k_C(E^i_j) = c^i_q\bar{c}^p_j E^q_p, \tag{4.1.3}$$
$$\mathscr{L}l(E^i_j) = -E^i_j, \tag{4.1.4}$$

où $\{E^i_j\}$ *est une base canonique de* $\mathscr{L}_n(R)$ (pour la définition, voir § 3), $C=[c^i_j]$, $C^{-1}=[\bar{c}^s_r]$.

Démonstration. On rappelle que si $\varphi=(\varphi^p_q)$ est un endomorphisme du groupe linéaire alors

$$(\mathscr{L}\varphi)(E^i_j)=\left(\frac{\partial}{\partial x^j_i}\varphi^p_q\right)(I)E^q_p.$$

La formule (4.1.1) est triviale. Pour démontrer la formule (4.1.2) on observe que $h_a=(h^p_q)$, où

$$h^p_q(X)=|\det X|^a x^p_q.$$

Comme $\det X=\sum_{k=1}^{n} x^i_k A^i_k(X)$, où $A^i_k(X)$ ne dépend pas de x^i_k et $A^i_k(I)=\delta^i_k$, alors

$$\frac{\partial}{\partial x^j_i}(\det X)=\delta^k_j A^i_k(X)=A^i_j(X)$$

et par suite

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^j_i}h^p_q\right)(X)=a|\det X|^{a-1}\mathrm{sgm}(\det X)A^i_j(X)x^p_q+|\det X|^a\delta^p_j\delta^i_q,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^j_i}h^p_q\right)(I)=a\delta^i_j\delta^p_q+\delta^p_j\delta^i_q.$$

Il en résulte la formule (4.1.2).

On observe que $k_C = (k_q^p)$, où $k_q^p(X) = c_r^p x_s^r \bar{c}_q^s$. Alors

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i^j} k_q^p\right)(X) = c_r^p \delta_j^r \delta_s^i \bar{c}_q^s = \bar{c}_q^i c_j^p$$

et l'on en déduit la formule (4.1.3).

Pour démontrer (4.1.4) on observe que $l = (l_q^p)$, où $l_q^p(X) = \bar{x}_q^p(X)$ et $\bar{x}_s^q x_r^s = \delta_r^q$. (On a $\bar{x}_r^s(I) = \delta_r^s$.) De l'égalité $\bar{x}_s^q x_r^s = \delta_r^q$, il vient

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i^j} \bar{x}_s^q\right) x_r^s + \bar{x}_s^q \delta_j^s \delta_r^i = 0$$

et par conséquent

$$\left(\frac{\bar{x}_p^q}{x_i^j}\right)(X) = -\bar{x}_j^q(X)\bar{x}_p^i(X), \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x_i^j} l_q^p\right)(I) = -\delta_j^q \delta_p^i.$$

Il en résulte la formule (4.1.4).

On en déduit immédiatement

PROPOSITION 4.2. *Soient*

$$\begin{aligned} &\varphi_{\varepsilon Ca}\colon GL(n, R) \to GL(n, R), \\ &\varphi_{\varepsilon Ca}(X) = \varepsilon(\det X)|\det X|^a CXC^{-1}, \\ &\psi_{\varepsilon Ca}\colon GL(n, R) \to GL(n, R), \\ &\psi_{\varepsilon Ca}(X) = \varepsilon(\det X)|\det X|^a C(X^{-1})^t C^{-1}, \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

où $C \in GL(n, R)$ *et* $a \in R$. *On a*

$$(\mathscr{L}\varphi_{\varepsilon Ca})(E_j^i) = (a\delta_j^i \delta_s^r + c_s^i \bar{c}_j^r)E_r^s,$$
$$(\mathscr{L}\psi_{\varepsilon Ca})(E_j^i) = (a\delta_j^i \delta_s^r - c^{ri}\bar{c}^{js})E_r^s,$$

où $C = [c_s^i]$ *et* $C^{-1} = [\bar{c}_s^r]$ *dans le cas de la première formule ou bien* $C = [c^{ij}]$ *et* $C^{-1} = [\bar{c}_{rs}]$ *dans la cas de la seconde.*

Pour démontrer cette proposition il suffit d'observer que

$$\varphi_{\varepsilon Ca} = \varepsilon \circ h_a \circ k_C, \qquad \psi_{\varepsilon Ca} = \varepsilon \circ h_{-a} \circ k_C \circ l,$$

car $\mathscr{L}(f \circ g) = (Lf) \circ (\mathscr{L}g)$.

5. Connexions linéaires φ-conjuguées. Dans ce paragraphe on utilisera la notation (4.2.1). On va démontrer:

PROPOSITION 5.1. *Soient Γ et $\check{\Gamma}$ deux connexions linéaires sur M.*

(a) *Pour que Γ et Γ soient $\varphi_{\varepsilon Ca}$-conjuguées il faut et il suffit qu'il existe un espace fibré réduit $P(M, H_{\varepsilon Ca})$ de LM (où $H_{\varepsilon Ca} = \{X\colon \varphi_{\varepsilon Ca}(X) = X\}$) tel que pour des coefficients par rapport à toute section $\sigma\colon U \to P$ on ait*

$$\check{\Gamma}_{kj}^i - a\Gamma_k \delta_j^i - c_s^i \bar{c}_j^r \Gamma_{kr}^s = 0.$$

(b) *Pour que Γ et $\check{\Gamma}$ soient $\psi_{\varepsilon C_a}$-conjuguées il faut et il suffit qu'il existe un espace fibré réduit $P(M, \bar{H}_{\varepsilon C_a})$ de LM (où $\bar{H}_{\varepsilon C_a} = \{X: \psi_{\varepsilon C_a}(X) = X\}$) tel que pour des coefficients par rapport à toute section $\sigma: U \to P$, on ait*

$$\check{\Gamma}^i_{kj} - a\Gamma_k \delta^i_j + c^{ir}\bar{c}_{sj}\Gamma^s_{kr} = 0.$$

(Pour les éléments de C on utilise la notation de la Proposition 4.2.)

Démonstration. (a) D'après la Définition 1.1, pour que Γ et $\check{\Gamma}$ soient $\varphi_{\varepsilon C_a}$-conjuguées il faut et il suffit qu'il existe un espace fibré réduit $P(M, H_{\varepsilon C_a})$ de LM tel que pour toute section $\sigma: U \to PM$

$$\sigma^* \check{\omega} = \mathscr{L}\varphi_{\varepsilon C_a} \cdot \sigma^* \omega, \tag{5.1.1}$$

où ω et $\check{\omega}$ sont les formes de Γ et de $\check{\Gamma}$ respectivement. D'après (3.1) et de la formule

$$\mathscr{L}\varphi \cdot (\omega^j_i E^i_j) = \omega^j_i \cdot \mathscr{L}\varphi(E^i_j),$$

en utilisant la Proposition 4.2, on trouve que la formule (5.1.1) est équivalente à

$$\check{\omega}^j_i - a\delta^j_i \omega^r_r - c^j_s \bar{c}^r_i \omega^s_r = 0,$$

et, d'après (3.4), cette dernière formula est équivalente à

$$\check{\Gamma}^j_{ki} - a\delta^j_i \Gamma_k - c^j_s \bar{c}^r_i \Gamma^s_{kr} = 0$$

(pour toute section $\sigma: U \to P$).

La démonstration de la partie (b) est analogue.

Maintenant on va démontrer le théorème fondamental de cette note.

Théorème 5.2. *Etant données deux connexions linéaires Γ et $\check{\Gamma}$ sur M, soient $\varphi_{\varepsilon C_a}$ et $\psi_{\varepsilon C_a}$ les endomorphismes du groupe linéaire $GL(n, R)$ définis par (4.2.1), où $n = \dim M$. Pour que Γ et $\check{\Gamma}$ soient $\varphi_{\varepsilon C_a}$-conjuguées (respectivement $\psi_{\varepsilon C_a}$-conjuguées) il faut et il suffit qu'il existe une ε-densité T de poids a, du type (1, 1) (resp. du type (2, 0)) et de genre C telle que*

$$\nabla_{\Gamma\check{\Gamma}} T = 0.$$

Démonstration. Soient Γ et $\check{\Gamma}$ deux connexions $\varphi_{\varepsilon C_a}$-conjuguées (resp. $\psi_{\varepsilon C_a}$-conjuguées), autrement dit (grâce à 5.1), il existe un espace fibré réduit $P(M, H)$ de LM, où $H = H_{\varepsilon C_a}$ (resp. $H = \bar{H}_{\varepsilon C_a}$), tel que

$$\check{\Gamma}^i_{kj} - a\delta^i_j \Gamma_k - c^i_r \bar{c}^s_j \Gamma^r_{ks} = 0 \tag{5.2.1}$$

$$(\text{resp. } \check{\Gamma}^i_{kj} - a\delta^i_j \Gamma_k + c^{ir}\bar{c}_{sj}\Gamma^s_{kr} = 0),$$

pour toute section $\sigma: U \to P$ (Γ^s_{kr} et $\check{\Gamma}^s_{kr}$ sont les coefficients de Γ et de $\check{\Gamma}$ par rapport à σ, et $C = [c^i_j]$, $C^{-1} = [\bar{c}^i_j]$ (resp. $C = [c^{ij}]$, $C^{-1} = [\bar{c}_{ij}]$)). D'après la Proposition 2.5, l'espace fibré $P(M, H)$, où $H = H_{\varepsilon C_a}$ (resp.

$H = \bar{H}_{\varepsilon C_a}$) est déterminé d'une manière unique par une ε-densité T du type $(1, 1)$ (resp. du type $(2, 0)$), de poids a et de genre C. Pour toute section $\sigma\colon U \to P$, C est la matrice des coefficients de T par rapport à σ. Alors, d'après la Définitions (3.6.1) (resp. (3.6.2)), on a

$$\begin{aligned} (5.2.2) \qquad \nabla_k t_p^{(i)} &= v_k(t_p^i) - a t_p^i \Gamma_k - \Gamma_{kp}^r t_r^i + \check{\Gamma}_{kj}^i t_p^j \\ &= -a c_p^i \Gamma_k - c_r^i \Gamma_{kp}^r + \check{\Gamma}_{kj}^i c_p^j \\ &= (-\delta_j^i \Gamma_k - c_r^i \bar{c}_j^s \Gamma_{kp}^r + \check{\Gamma}_{kj}^i) c_p^j \\ (\text{resp. } \nabla_k t^{(i)p} &= v_k(t^{ip}) - a t^{ip} \Gamma_k + \Gamma_{kr}^p \check{t}^{ir} + \Gamma_{kj}^i t^{jp} \\ &= -a c^{ip} \Gamma_k + c^{ir} \Gamma_{kr}^p + \check{c}^{jp} \Gamma_{kj}^i \\ &= (-a\delta_j^i \Gamma_k + c^{ir} \bar{c}_{sj} \check{\Gamma}_{kr}^s + \Gamma_{kj}^i) c^{jp}). \end{aligned}$$

Il en résulte que $\nabla_{\Gamma\check{\Gamma}} T = 0$, et réciproquement, si $\nabla_{\Gamma\check{\Gamma}} T = 0$ et $P(M, H)$ est l'espace fibré réduit associé à T, alors les formules (5.2.2) sont satisfaites pour $\sigma\colon U \to P$ et, par suite, les formules (5.2.1) sont aussi vraies.

Ce raisonnement démontre notre théorème.

Corollaire 5.3. *Soient $\varphi_{\varepsilon C} = \varphi_{\varepsilon C_a}$ et $\psi_{\varepsilon C} = \psi_{\varepsilon C_a}$, où $a = 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *Γ et $\check{\Gamma}$ sont $\varphi_{\varepsilon C}$-conjuguées (resp. $\psi_{\varepsilon C}$-conjuguées).*

(b) *Il existe une ε-densité T du type $(1, 1)$ (resp. du type $(2, 0)$), de poids 0 et de genre C telle que $\nabla_{\Gamma\check{\Gamma}} T = 0$.*

(c) *Il existe une ε-densité $\tilde{T}$ du type $(1, 1)$ (resp. du type $(0, 2)$), de poids 0 et de genre C^{-1} telle que $\nabla_{\check{\Gamma}\Gamma} \tilde{T} = 0$.*

On introduira les notations suivantes.

Si G est une ε-densité du type (r, s) et de poids a $(r, s \geqslant 1)$ on note $C_j^i \circ G$, où $i \leqslant r$, $j \leqslant s$, la ε-densité du type $(r-1, s-1)$ et de poids a dont les coordonnées sont obtenues des coordonnées de G par contradiction du i-ème indice supérieur et du j-ème indice inférieur.

Si G et F sont des ε-densiés des types (r, s) et (p, q), et de poids a et β respectivement dont les coordonnées sont

$$G_{j_1 \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_r}, \qquad F_{l_1 \ldots l_q}^{k_1 \ldots k_p},$$

on note $S = G \otimes F$ la ε-densité du type $(r+p, s+q)$ et de poids $a+\beta$ dont les coordonnées sont définies par les formules

$$(5.3.1) \qquad S_{j_1 \ldots j_s l_1 \ldots l_q}^{i_1 \ldots i_r k_1 \ldots k_p} = G_{j_1 \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_r} F_{l_1 \ldots l_q}^{k_1 \ldots k_p}.$$

On observe que, si G et F sont des ε-densités du type $(1, 1)$ et de poids a et $\beta = 0$, alors

$$(5.3.2) \qquad \nabla_\Gamma\big(C_1^2 \circ (G \otimes F)\big) = C_1^2 \circ \big((\nabla_{\Gamma\check{\Gamma}} G) \otimes F + G \otimes (\nabla_{\check{\Gamma}\Gamma} F)\big),$$

et si G et F sont des ε-densités des types $(0,2)$ et $(2,0)$ et de poids α et $\beta = 0$ respectivement, alors

$$\nabla_{\Gamma}\big(C_2^1\circ(G\otimes F)\big) = C_2^1\circ\big((\nabla_{\Gamma\check{\Gamma}}G)\otimes F + G\otimes(\nabla_{\check{\Gamma}\Gamma}F)\big). \tag{5.3.3}$$

(On observe que ces formules ne sont plus vraies si $\beta = 0$. Dans les symboles $\nabla_k g_j^{(i)}$ et $\nabla_k\ g_{(i)j}$, l'indice k est toujours considéré comme le dernièr indice; à ce point de vue, les notations $g_{j;k}^{(i)}$ et $g_{(i)j;k}$ sont plus conséquentes.)

Démonstration du Corollaire 5.3. Il suffit de démontrer l'équivalence des conditions (b) et (c). Soit $\tilde{T}$ la ε-densité associée à T de la manière définie par la Proposition 2.5. Comme $C_j^i\circ(T\otimes\tilde{T}) = \delta$, où $i = 2$, $j = 1$ pour $\varphi_{\varepsilon C}$ et $i = 1$, $j = 2$ pour $\psi_{\varepsilon C}$, et $\nabla_{\Gamma}\delta = 0$, alors les formules (5.3.2) et (5.3.3) donnent l'équivalence des conditions (a) et (b).

COROLLAIRE 5.4. *Soit $\psi = \psi_{\varepsilon C}$, où $\varepsilon(t) = 1$ et $C = I$. Pour que deux connexions linéaires Γ et $\check{\Gamma}$ sur M soient ψ-conjuguées il faut et il suffit qu'il existe un tenseur métrique g sur M tel que*

$$\nabla_{\Gamma\check{\Gamma}}g = 0 \qquad (\textit{ou bien } \nabla_{\check{\Gamma}\Gamma}g = 0).$$

Démonstration. D'après le Corollaire 5.3, il suffit d'observer, que pour qu'un tenseur g du type $(0,2)$ soit un tenseur métrique il faut et il suffit qu'il soit de genre I. En effet, si g est un tenseur métrique, alors il définit l'espace fibré $L^0(M, g)$ de repères orthogonaux (par rapport à g) — c'est un espace réduit de LM, et pour toute section $\sigma\colon U\to L^0$, les coordonnées de g par rapport à σ forment la matrice I. Réciproquement, si g est un tenseur du type $(0,2)$ et de genre I, alors il est symétrique et positivement défini, c'est-à-dire il est un tenseur métrique.

Ce cas a été considéré par Norden [9].

COROLLAIRE 5.5. *Soit $\varphi = \varphi_{\varepsilon C}$, où $\varepsilon(t) = 1$ et*

$$C = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \in GL(2n, R).$$

(I_n est la matrice unité dans $GL(n, R)$.) *Pour que deux connexions linéaires Γ et Γ sur M* ($\dim M = 2n$) *soient φ-conjuguées il faut et il suffit qu'il existe un tenseur g du type* $(1,1)$ *tel que*

$$C_1^2\circ(g\otimes g) = -\delta \quad \textit{et} \quad \nabla_{\Gamma\check{\Gamma}}g = 0 \quad (\textit{ou bien } \nabla_{\Gamma\check{\Gamma}}g = 0).$$

Démonstration. Soit g un tenseur du type (1.1). D'après le Théorème 5.2, il suffit de vérifier: pour que g soit de genre C il faut et il suffit que $C_1^2\circ(g\otimes g) = -\delta$.

On suppose que g est de genre C; alors, par définition, pour toute section $\sigma\colon U\to LM$ la matrice g_σ des coefficients de g par rapport à σ s'écrit sous la forme

$$g_\sigma = XCX^{-1},$$

où X: $U \to GL(2n, R)$. Alors on a

$$[C_1^2 \circ (g \otimes g)]_\sigma = (g_\sigma)^2 = XC^2X^{-1} = -I_{2n},$$

car $C^2 = -I_{2n}$, et par suite $C_1^2 \circ (g \otimes g) = -\delta$.

Réciproquement, soit g tel que $C_1^2 \circ (g \otimes g) = -\delta$. g définit un automorphisme G: $TM \to TM$ tel que, si $\{v_1, \ldots, v_{2n}\}$ est une base de $T_x M$ alors

$$G(v_i) = g_i^j(x) v_j,$$

où $[g_i^j]$ est la matrice des coefficients de g par rapport à une section σ: $U \to LM$ définie dans un voisinage de x telle que $\sigma(x) = (v_1, \ldots, v_{2n})$ (x est fixé). G ne dépend ni de la base $\{v_1, \ldots, v_{2n}\}$, ni de σ.

Maintenant, soit x_0 un point quelconque de M. Il existe un champ v_1: $U \to TM$ de vecteur tel que $v_1(x) \neq 0$ dans un voisinage de x_0. Soit $w_1 = G \circ v_1$: $U \to TM$. Il est clair que pour $x \in U$ les vecteurs $v_1(x)$ et $w_1(x)$ sont linéairement indépendents. Alors v_1 et w_1 définissent un sous-fibré vectoriel E de $TM | U$, $\dim E = 2$, et $G(E) = E$ car $G^2 = -id$. Pour U suffismment petit, il existe un sous-fibré vectoriel F de $TM | U$ tel que $TM | U = E \oplus F$ et $G(F) = F$. Comme $\dim F = 2(n-1)$ on peut construire, par récurrence, des champs v_j, w_j: $U \to TM$ de vecteurs $(i, j = 1, \ldots, n)$ tels que $G \circ v_i = w_i$ et $\big(v_1(x), \ldots, v_n(x), w_1(x), \ldots, w_n(x)\big) = \sigma(x)$ est une base de $T_x M$. σ est une section de LM définie dans un voisinage de x_0 et il est immédiat que $g_\sigma = C$. Ce raisonnement achève la démonstration.

Ce cas a été considéré par Cruceanu et Miron [3]. Le tenseur g définit une structure presque complexe sur M.

COROLLAIRE 5.6. *Soit* $\tilde{\varphi} = \varphi_{\varepsilon C}$, *où* $\varepsilon(t) = 1$ *et* $C = I_s \oplus (-I_{n-s}) \in GL(n, R)$. *Pour que deux connexions linéaires* Γ *et* $\check{\Gamma}$ *sur* M ($\dim M = n$) *soient* $\tilde{\varphi}$*-conjuguées il faut et il suffit qu'il existe un tenseur* f *sur* M *du type* $(1, 1)$ *et d'ordre* s *tel que* $C_1^2 \circ (f \otimes f) = f$ *et* $\nabla_{\Gamma\check{\Gamma}}(2f - \delta) = 0$.

Démonstration. D'après le Corollaire 5.3, il suffit de démontrer: pour qu'un tenseur g du type $(1, 1)$ soit de genre C il faut et il suffit que $f = \frac{1}{2}(g + \delta)$ soit d'ordre s et $C_1^2 \circ (f \oplus f) = f$.

Tout d'abord on suppose que g est de genre C. Si σ: $U \to LM$ est une section telle que $g_\sigma = C$, alors $f_\sigma = \frac{1}{2}(g_\sigma + I) = I_s \oplus O$ est d'ordre s. Ensuite, pour tout σ: $U \to LM$, on a

$$g_\sigma = XCX^{-1},$$

où X: $U \to GL(n, R)$, d'où il vient

$$\begin{aligned}\big(C_1^2 \circ (f \otimes f)\big)_\sigma &= (f_\sigma)^2 = \tfrac{1}{4}(g_\sigma + I)^2 \\ &= \tfrac{1}{4}(g_\sigma^2 + 2g_\sigma + I) = \tfrac{1}{2}(g_\sigma + I) = f_\sigma,\end{aligned}$$

car $g_\sigma^2 = XC^2X^{-1} = I$ $(C^2 = I)$.

Réciproquement, on suppose que f vérifie les conditions: (1) f est d'ordre s et (2) $C_1^2\circ(f\oplus f) = f$. Pour démontrer que $g = 2f-\delta$ est de genre C il suffit d'observer que f est de genre $B = I_s\oplus O_{n-s}$. f définit un endomorphisme $F\colon TM\to TM$. Soient $E_1 = \ker(F-id)$ et $E_2 = \ker F$. E_1 et E_2 sont des sous-fibrés vectoriels de TM tels que $TM = E_1\oplus E_2$ et $\dim E_1 = s$ (on observe que $F\circ F = F$). Dans un voisinage de chaque point de M il existe donc des champs $v_1, \ldots, v_n\colon U\to TM$ de vecteurs tels que $\{v_1(x), \ldots, v_s(x)\}$ est une base de $(E_1)_x$ et $\{v_{s+1}(x), \ldots, v_n(x)\}$ est une base de $(E_2)_x$. Comme $F\circ v_i = v_i$ pour $1\leqslant i\leqslant s$ et $F\circ v_j = 0$ pour $s+1\leqslant j\leqslant n$, alors $f_\sigma = I_s\oplus O_{n-s}$, où $\sigma(x) = \big(v_1(x), \ldots, v_n(x)\big)$, c'est-à-dire f est de genre $B = I_s\oplus O_{n-s}$.

Bibliographie

[1] J. Aczél und S. Gołąb, *Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objecte*, Warszawa 1960.

[2] V. Cruceanu et R. Miron, *Sur les connexions compatible avec une structure métrique ou presque symplectique*, Mathematica 9 (32), 2 (1967), p. 245–252.

[3] — *Sur les couples de connexions compatibles avec les structures presque complexes*, Ann. St. Univ. „Al. I. Cuza", Iași, 12 (1967), p. 79–88.

[4] J. Gancarzewicz, *Connexions conjuguées* (A paraître au Colloquium Mathematicum).

[5] S. Gołąb, *Rachunek tensorowy*, Warszawa 1963.

[6] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, New York — London 1963.

[7] M. Kucharzewski und A. Zajtz, *Über die linearen homogenen geometrischen Objekte des Typus* $[m, n, 1]$, *wo* $m\leqslant n$ *ist*, Ann. Polon. Math. 18 (1966), p. 205–225.

[8] R. Miron, *Sur les espaces à connexions conjuguées au sens de Norden*, Ann. Şt. Univ. „Al. I. Cuza", Iași 9 (1963), p. 445–454.

[9] А. П. Норден, *Пространства аффинной связности*, Москва 1960.

[10] В. Н. Ведерников, *Симметрические пространства. Сопряженные связности как нормализованная связность*, Труды геом. семинара, Москва 1966, p. 63–68.

Reçu par la Rédaction le 13. 9. 1971