COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. LIII | 1987 | FASC. 2

UNE REMARQUE SUR LA DÉRIVÉE LOGARITHMIQUE DE LA FONCTION ZÊTA DE RIEMANN

PAR

HUBERT DELANGE (ORSAY)

Pour obtenir des régions sans zéros pour la fonction ζ, il est usuel de partir de l'inégalité

$$\mathrm{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+2it)+4\mathrm{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it)+3\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma)\leqslant 0,$$

valable pour $\sigma>1$ et t réel quelconque.

Supposant que $\zeta(\beta+i\gamma)=0$, avec $\gamma\neq 0$, on utilise cette inégalité pour obtenir un majorant de β. On prend $t=\gamma$ et on choisit convenablement σ.

Un théorème sur les fonctions holomorphes d'une variable complexe fournit des minorants des deux premiers termes, celui du second dépendant de β. On a besoin d'avoir aussi un minorant de $(\zeta'/\zeta)(\sigma)$.

La plupart des auteurs disent que, puisque

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma)\sim-\frac{1}{\sigma-1}$$

quand σ tend vers 1, étant donné $\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$ tel que

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma)\geqslant-\frac{1+\varepsilon}{\sigma-1}\quad\text{pour } 1<\sigma\leqslant 1+\eta.$$

(Il est d'ailleurs nécessaire de choisir $\varepsilon<\frac{1}{3}$.)

Dans son livre [1], Davenport dit qu'il existe une constante A telle que

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma)\geqslant-\frac{1}{\sigma-1}-A\quad\text{pour } 1<\sigma\leqslant 2.$$

La même inégalité est utilisée dans le livre d'Ellison et Mendès France

[2], et il est démontré dans un appendice au chapitre V que la valeur $A = 0$ convient. La démonstration est basée sur la formule connue

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \log 2\pi - 1 - \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}+1\right) + \sum\left(\frac{1}{s-\varrho}+\frac{1}{\varrho}\right),$$

où, dans la somme, ϱ parcourt l'ensemble des zéros non triviaux de ζ.

Pas mal de travail est nécessaire pour établir cette formule.

On va montrer ici qu'en fait un calcul extrêmement simple permet de montrer que l'on a

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) > -\frac{1}{\sigma-1} \quad \text{pour tout } \sigma > 1,$$

et même un peu mieux. On n'a besoin d'aucune autre propriété de la fonction ζ que le fait que

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{pour } s \text{ réel} > 1.$$

On prouve le résultat suivant:

THÉORÈME. *On a pour tout s réel* > 1

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) > -\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2s^2}.$$

Démonstration. On a trivialement pour s réel > 1

$$\zeta(s) = s\int_1^\infty \frac{[t]}{t^{s+1}}\,dt = \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^{s+1}}\,dt,$$

d'où

$$(s-1)\zeta(s) = s - s(s-1)\int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^{s+1}}\,dt. \tag{1}$$

Par dérivation, on obtient

$$\zeta(s) + (s-1)\zeta'(s) = 1 - (2s-1)\int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^{s+1}}\,dt + s(s-1)\int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^{s+1}}\log t\,dt,$$

d'où, puisque la deuxième intégrale est > 0,

$$\zeta(s) + (s-1)\zeta'(s) > 1 - (2s-1)\int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^{s+1}}\,dt. \tag{2}$$

Maintenant, on peut écrire

$$\int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^{s+1}}\,dt = \frac{1}{2s} + \int_1^\infty \frac{t-[t]-1/2}{t^{s+1}}\,dt.$$

Ceci montre que l'on a

$$\int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^{s+1}}\,dt < \frac{1}{2s}, \tag{3}$$

car

$$\int_1^\infty \frac{t-[t]-1/2}{t^{s+1}}\,dt = \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} \frac{t-n-1/2}{t^{s+1}}\,dt$$

et

$$\int_n^{n+1} \frac{t-n-1/2}{t^{s+1}}\,dt = \int_0^1 \frac{u-1/2}{(n+u)^{s+1}}\,du = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(n+u)^{s+1}}\,d(u^2-u)$$
$$= \frac{s+1}{2}\int_0^1 \frac{u^2-u}{(n+u)^{s+2}}\,du,$$

ce qui est <0 puisque $u^2-u<0$ pour $0<u<1$.

En tenant compte de (3), (2) donne

$$\zeta(s)+(s-1)\zeta'(s) > \frac{1}{2s},$$

d'où, en divisant par $(s-1)\zeta(s)$,

$$\frac{1}{s-1}+\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} > \frac{1}{2s(s-1)\zeta(s)}.$$

Comme, d'après (1), $(s-1)\zeta(s) < s$, ceci donne bien le résultat annoncé.

TRAVAUX CITÉS

[1] H. Davenport, *Multiplicative Number Theory*, Chicago 1967.

[2] W. J. Ellison et M. Mendès France, *Les nombres premiers*, Paris 1975.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE
UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD, ORSAY

Reçu par la Rédaction le 15. 1. 1983