C. RAJSKI (Warszawa)

O DYSTRYBUANTACH TRWAŁOŚCI

Wartość użytkową większości przedmiotów znajdujących się w obrocie gospodarczym można uważać za malejącą funkcję czasu. Po dostatecznie długim czasie każdy prawie przedmiot jest uznawany za nienadający się do spełniania czynności, do których został wytworzony. Uznanie to może mieć bądź charakter konwencjonalny, bądź też może być spowodowane rzeczywistą utratą pewnych cech fizycznych. W obu przypadkach będziemy mówili, że przedmiot został *zużyty*.

W dalszym ciągu będziemy się zajmowali towarami, u których malenie wartości użytkowej zachodzi tylko w okresach użytkowania i ma przebieg ciągły. Przez *trwałość* przedmiotu będziemy rozumieli czas jego użytkowania w pewnych warunkach przyjętych umownie za normalne. W niektórych przypadkach bezpośrednią miarą stopnia zużycia przedmiotu jest nie czas, lecz liczba zadziałań, ale i wówczas można trwałość określać w jednostkach czasu, przypisując arbitralnie każdemu zadziałaniu pewien okres czasu.

Trwałość jest zmienną losową. Znajomość jej rozkładu ma pewne znaczenie gospodarcze, przede wszystkim ze względu na możność ustalenia, czy wyprodukowana partia towaru spełnia stawiane jej wymagania. Do badania trwałości towaru nadają się tylko metody wyrywkowe, ponieważ jest ono zawsze niszczące.

Do oszacowania parametrów populacji generalnej na podstawie zbadania pewnej liczby jej elementów konieczne jest poczynienie założeń co do kształtu dystrybuanty. W istniejącym piśmiennictwie o wyrywkowym badaniu trwałości zakłada się, że dystrybuanta ma przebieg funkcji wykładniczej. Założenie takie jest na ogół nieuzasadnione i niektórzy autorzy zdają sobie z tego sprawę. Celem niniejszej pracy jest określenie warunków, jakim muszą odpowiadać dystrybuanty trwałości, oraz podanie pewnych funkcji, które spełniają te warunki i są dość wygodne w zastosowaniach.

Z partii rozpatrywanych przez nas towarów wyłączymy te, które zawierają jawne braki, np. partie żarówek o przerwanych włóknach, partie rowerów o dziurawych dętkach itp. Inaczej mówiąc założymy, że trwałość żadnego przedmiotu nie może być równa zeru. Potrzeba takiego założenia wynika z tego, że parametry dystrybuanty trwałości mogą i powinny być podstawą do oceny jakości poprawnie prowadzonego procesu produkcyjnego, natomiast istnienie w partii jawnych braków, które mogą powstawać przypadkowo po zakończeniu tego procesu, wykazuje tylko wadliwe funkcjonowanie kontroli ostatecznej.

Badaniu trwałości może w rzeczywistości podlegać tylko nieznaczna frakcja wyprodukowanych przedmiotów, jednakże dla odkrycia praw rządzących procesem zużywania się założymy, że wszystkie produkowane przedmioty dzielimy na partie o liczności N każda i wszystkie sztuki w każdej partii badamy na zużycie. Przypuśćmy, że stan wszystkich sztuk badanych sprawdzamy w odstępach czasu Δx, określając w ten sposób liczby sztuk zużytych. Oznaczmy przez Δv_{ij} liczbę sztuk zużytych w ciągu badania i-tej partii w przedziale czasu Δx_j, zawartym między chwilą $(j-1)\Delta x$ a $j\Delta x$.

Oznaczmy z kolei przez $\Delta v_j^{(n)}$ średnią liczbę sztuk zużytych w n partiach, w okresie między chwilą $(j-1)\Delta x$ a $j\Delta x$:

$$\Delta v_j^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta v_{ij}.$$

Załóżmy, że wszystkie sztuki są produkowane w tych samych warunkach. Wówczas przy nieograniczonym wzroście liczby n zbadanych partii, wielkości $\Delta v_j^{(n)}$ dążą do wartości oczekiwanych Δv_j:

$$\Delta v_j = \lim_{n\to\infty}\Delta v_j^{(n)}.$$

Oznaczmy przez v_j oczekiwaną liczbę sztuk zużytych do chwili $j\Delta x$. Wprowadźmy następnie funkcję G_j określoną wzorem

$$G_j = \frac{1}{N-v_j}\cdot\frac{\Delta v_j}{\Delta x}. \tag{1}$$

Ułamek $\Delta v_j/\Delta x$ jest wartością oczekiwaną średniej szybkości zużywania się w j-tym przedziale. Ponieważ funkcja G_j jest ilorazem tej szybkości przez liczbę sztuk niezużytych, jest ona wartością oczekiwaną względnej średniej szybkości zużywania się. Funkcję G_j będziemy nazywali *wartością oczekiwaną względnej szybkości zużywania się*, lub krócej: *względną szybkością zużywania*.

Bezpośrednie operowanie funkcją G_j jest kłopotliwe ze względu na to, że jest to funkcja zmiennej naturalnej, oraz ze względu na to, że postać jej zależy od obranego przedziału Δx. Wobec tego przejdziemy do równania przybliżonego, które powstaje z (1), gdy przedział czasu Δx

maleje nieograniczenie. Wówczas oczekiwana liczba sztuk zużytych ν_j, będąca w równaniu (1) funkcją zmiennej naturalnej j, przechodzi w pewną funkcję ν zmiennej ciągłej x, funkcja G_j przechodzi w pewną funkcję czasu $G(x)$, a równanie (1) przechodzi w równanie

$$d\nu/(N-\nu) = G(x)dx. \tag{2}$$

Oznaczmy poszukiwaną dystrybuantę trwałości przez $F(x)$. Niechaj ξ oznacza trwałość pewnej sztuki badanego towaru. Poszukiwana dystrybuanta jest prawdopodobieństwem $\mathrm{P}\{\xi \leqslant x\}$, że zmienna losowa ξ nie przekroczy x. Z drugiej strony,

$$F(x) = \nu/N. \tag{3}$$

Na podstawie (2) i (3) otrzymujemy równość

$$dF(x)/\big(1-F(x)\big) = G(x)dx,$$

a stąd

$$f(x)/\big(1-F(x)\big) = G(x), \tag{4}$$

gdzie funkcja $f(x)$ oznacza frekwencję zmiennej losowej ξ. Ponieważ funkcja $G(x)$ ma określone znaczenie — podobne jak G_j — nie można jej obierać dowolnie. Na początku badania frakcja sztuk zużytych musi być równa zeru, w przeciwnym przypadku bowiem trwałość niektórych sztuk musiałaby być równa zeru, tzn. musiałyby w populacji generalnej istnieć sztuki już niezdatne do użytku, co jest sprzeczne z uczynionym poprzednio założeniem. Zatem

$$G(0) = 0. \tag{5}$$

W miarę upływania czasu badania frakcje sztuk zużytych, tzn. kolejne ułamki $\Delta\nu/(N-\nu)$, powinny na ogół rosnąć, gdyż takie przypadki, że przez użycie przedmiot uodpornia się na pewien czas, są rzadkie. Wobec tego przyjmiemy ogólnie dla $0 \leqslant x < \infty$

$$G'(x) \geqslant 0. \tag{6}$$

Każdy rodzaj towaru ma skończoną trwałość, tzn. w każdym przypadku istnieje taka chwila x, że w przedziale od x do $x+\Delta x$ wszystkie sztuki zostaną zużyte. Możemy to wyrazić w postaci asymptotycznej za pomocą wzoru

$$G(\infty) = 1. \tag{7}$$

Przy założonym zakresie zmienności x warunki (5), (6) i (7) są równoważne z żądaniem, żeby funkcja $G(x)$ była dystrybuantą. Z tego spostrzeżenia wynika twierdzenie następujące:

Oznaczmy przez S klasę dystrybuant określonych w przedziale $\langle 0, \infty)$ i mających prawie wszędzie pierwsze pochodne. Oznaczmy przez T taką podklasę S, której elementami są dystrybuanty trwałości. *Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by dystrybuanta $F(x)$ była elementem klasy T, jest, żeby wyrażenie*

$$\frac{1}{1-F(x)} \cdot \frac{dF(x)}{dx}$$

było elementem klasy S.

Dowiedziemy obecnie, że klasa T nie jest pusta, mianowicie że zawiera ona co najmniej dystrybuanty gamma określone wzorem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad 0 \leqslant x < c, \\ 1-e^{-(x-c)} \sum\limits_{j=0}^{r} (x-c)^j/j! & \text{dla} \quad c \leqslant x < \infty, \end{cases} \tag{8}$$

gdzie r jest liczbą naturalną, a $c \geqslant 0$, jednak nie zachodzą jednocześnie równości $r = 0$ i $c = 0$. Przy tej definicji mamy

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad 0 \leqslant x < c, \\ e^{-(x-c)}(x-c)^r/r! & \text{dla} \quad c \leqslant x < \infty, \end{cases} \tag{9}$$

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad 0 \leqslant x < c, \\ \dfrac{(x-c)^r/r!}{\sum\limits_{j=0}^{r} (x-c)^j/j!} & \text{dla} \quad c \leqslant x < \infty. \end{cases} \tag{10}$$

Warunek (5), tzn. $G(0) = 0$, jest spełniony dla $c > 0$, co widać wprost z (10). Jeśli $c = 0$ i $r > 0$, to warunek ten też jest spełniony, wówczas bowiem

$$G(x) = \frac{x^r/r!}{\sum\limits_{j=0}^{r} x^j/j!}$$

i dla $x = 0$ licznik jest równy zeru, a mianownik równy jedności. Jeśli jednakże $c = 0$ i $r = 0$, to $G(x) = 1$ i warunek (5) nie jest spełniony.

Jeśli chodzi o warunek (6), tzn. $G'(x) \geqslant 0$, to w przedziale $0 \leqslant x \leqslant c$ jest $G'(0) = 0$, a dla przedziału $c < x < \infty$ możemy napisać

$$G(x) = \frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{r} r!/j!\,(x-c)^{r-j}}; \tag{11}$$

np. dla $r = 3$

$$G(x) = \frac{1}{6/(x-c)^3+6/(x-c)^2+3/(x-c)+1}.$$

Jak widać, w mianowniku prawej strony (11) wszystkie wyrazy z wyjątkiem ostatniego, stałego, są monotonicznie malejące, ich suma zatem jest monotonicznie malejąca, a $G(x)$ monotonicznie rosnąca, czyli $G'(x) > 0$, c. n. d.

Wreszcie z (11) wynika również spełnienie warunku (7), tzn. $G(\infty) = 1$.

Praca wpłynęła 21. 9. 1956

Ч. РАЙСКИЙ (Варшава)

О ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДОЛГОВЕЧНОСТИ

РЕЗЮМЕ

Вообще в теории долговечности принимается, что функция распределения долговечности показательна. Статья посвящена поискам более обширного класса функций, которые могли бы найти применение как функции распределения долговечности. При очень общих предположениях получено следующую теорему:

Функция $f(x)$ является функцией распределения долговечности, если

$$\frac{1}{1-F(x)} \cdot \frac{dF(x)}{dx}$$

какая нибудь функция распределения.

В статье имеется доказательство, что это условие выполнего функцией распределения типа гамма определенными формулой

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \leqslant x < c, \\ 1-e^{-(x-c)}\sum_{j=0}^{r}(x-c)^j/i!, & \text{если} \quad c \leqslant x < \infty, \end{cases}$$

причем r натуральное число и $c \geqslant 0$, но не может быть одновременно $r = 0$ и $c = 0$.

C. RAJSKI (Warszawa)

THE LIFE-TESTS DISTRIBUTION FUNCTIONS

SUMMARY

In the theory of life-tests it is commonly assumed that the probability distribution function of the length of the life is an exponential one. The present paper is concerned with a search for a wider class of distribution functions which can reasonably be used as life distribution functions. Under very general asumptions the following theorem is deduced:

$F(x)$ is a life distribution function if

$$\frac{1}{1-F(x)} \cdot \frac{dF(x)}{dx}$$

is a distribution function of any kind.

Further it is proved that the above condition is fulfilled by the distribution function of the gamma type, defined in the following manner:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad 0 \leqslant x < c, \\ 1 - e^{-(x-c)} \sum_{j=0}^{r} (x-c)^j / j!, & \text{if} \quad c \leqslant x < \infty, \end{cases}$$

with r natural and $c \geqslant 0$, except for the case when $r = 0$ and $c = 0$.