M. KRAKOWSKI (Łódź)

O PEWNYCH FUNKCJACH ZWIĄZANYCH Z FUNKCJAMI BESSLA

W niektórych zagadnieniach elektrotechnicznych, dotyczących przepływu prądu zmiennego w ziemi, występują całki o ogólnej postaci $\int_0^\infty e^{-z\cosh t+nt}dt$. Do takich zagadnień należą:

1° obliczenie impedancji własnej pętli, utworzonej przez przewód napowietrzny i przez ziemię, przy założeniu, że przewodząca warstwa ziemna ma ograniczoną grubość, a pod spodem znajduje się nieprzewodząca warstwa skalna [1];

2° obliczenie impedancji własnej pętli, utworzonej przez przewód napowietrzny i przez ziemię, przy założeniu, że na dużej głębokości pod powierzchnią ziemi znajduje się płaska warstwa ziemna przewodząca bardzo dobrze;

3° obliczenie impedancji własnej obwodu, złożonego z kabla podziemnego oraz ziemi jako przewodu powrotnego, przy założeniu, że przewodząca warstwa ziemna jest bardzo gruba.

Bliższe badanie wykazuje, że całki $\int_0^\infty e^{-z\cosh t+nt}dt$ przedstawiają ciekawe funkcje związane z funkcjami Bessla. Niniejsza praca zajmuje się badaniem własności tych funkcji.

Rozważmy na wstępie funkcję $M_p(z)$, określoną w następujący sposób:

$$M_p(z) = \int_0^\infty e^{-z\cosh t}\sinh pt\,dt, \tag{1}$$

przy czym p oznacza liczbę rzeczywistą, z zaś liczbę zespoloną. Łatwo wykazać, że powyższa całka jest zbieżna bezwzględnie i jednostajnie względem z w dowolnej płaszczyźnie $\operatorname{re} z \geqslant \sigma_0 > 0$.

Udowodnimy, że funkcja $M_p(z)$ spełnia niejednorodne równanie Bessla

$$y''(z)+\frac{1}{z}y'(z)-\left(1+\frac{p^2}{z^2}\right)y(z) = \frac{pe^{-z}}{z^2}. \tag{2}$$

Istotnie,

$$y''(z)+\frac{1}{z}y'(z)-y(z) =$$

$$= \int_0^\infty e^{-z\cosh t}\sinh pt(\cosh^2 t-1)\,dt - \frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-z\cosh t}\sinh pt\cosh t\,dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-z\cosh t}\sinh pt\sinh^2 t\,dt - \frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-z\cosh t}\sinh pt\cosh t\,dt.$$

Całkując przez części ostatnią całkę otrzymuje się

$$y''(z)+\frac{1}{z}y'(z)-y(z) = \frac{p}{z}\int_0^\infty e^{-z\cosh t}\cosh pt\sinh t\,dt;$$

jeśli tu także całkowanie wykonamy przez części, to otrzymamy równanie (2).

Zwróćmy uwagę, iż funkcja $M_p(z)$ jest nieparzysta względem indeksu p, tzn.

(3) $$M_{-p}(z) = -M_p(z);$$

własność ta wynika natychmiast z przedstawienia całkowego (1) funkcji $M_p(z)$.

Funkcja $M_p(z)$ ma własności bardzo zbliżone do własności zmodyfikowanej funkcji Hankela $K_p(z)$, której postacią całkową jest ([2], str. 350, wzór 6.444.1)

(4) $$K_p(z) = \int_0^\infty e^{-z\cosh t}\cosh pt\,dt.$$

Wykażemy jedną z tych własności. Korzystając z wyrażenia (1) możemy napisać

$$M_{p+1}(z) = \int_0^\infty e^{-z\cosh t}\sinh(p+1)t\,dt,$$

$$M_{p-1}(z) = \int_0^\infty e^{-z\cosh t}\sinh(p-1)t\,dt.$$

Wzór $\sinh x-\sinh y = 2\sinh\frac{1}{2}(x-y)\cosh\frac{1}{2}(x+y)$ daje

$$M_{p+1}(z)-M_{p-1}(z) = 2\int_0^\infty e^{-z\cosh t}\cosh pt\sinh t\,dt;$$

całkując tu przez części, otrzymujemy

$$M_{p+1}(z)-M_{p-1}(z) = 2e^{-z}/z+(2p/z)M_p(z). \tag{5}$$

W podobny sposób można wykazać jeszcze inne własności:

$$
\begin{aligned}
&M_{p+1}(z)+M_{p-1}(z) = 2\frac{dM_p}{dz},\\
&z\frac{dM_p}{dz}+pM_p(z) = -e^{-z}-zM_{p-1}(z),\\
&z\frac{dM_p}{dz}-pM_p(z) = e^{-z}-zM_{p+1}(z),\\
&\frac{d}{dz}[z^pM_p(z)] = -z^pM_{p-1}(z)-z^{p-1}e^{-z},\\
&\frac{d}{dz}[z^{-p}M_p(z)] = -z^{-p}M_{p+1}(z)+z^{-p-1}e^{-z}.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Własności zmodyfikowanej funkcji Hankela $K_p(z)$ ([3], str. 93) otrzymuje się z (5) i (6) przez skreślenie wyrazów zawierających e^{-z}.

Funkcja $K_p(z)$ spełnia ponadto równanie różniczkowe ([3], str. 91)

$$y''(z)+(1/z)y'(z)-(1+p^2/z^2)y(z) = 0. \tag{7}$$

Za pomocą zależności (5) możemy w prosty sposób znaleźć wyrażenia dla funkcji $M_p(z)$, których rząd p jest liczbą całkowitą. Z wzoru (1) wynika, że $M_0(z) = 0$. Po uwzględnieniu zależności (3) ze związku (5) dla $p = 0$ otrzymujemy $M_1(z) = e^{-z}/z$; dla $p = 1$ z (5) otrzymujemy $M_2(z) = (2e^{-z}/z)(1+1/z)$ itd. Powyższe wyniki są zgodne z obliczeniem bezpośrednim przez całkowanie wyrażenia (1) przy odpowiednich wartościach p.

Funkcja $M_p(z)$ jest szczególnym rozwiązaniem równania różniczkowego (2), natomiast rozwiązaniem ogólnym równania różniczkowego uproszczonego (7) jest wyrażenie

$$C_1I_p(z)+C_2K_p(z),$$

w którym C_1 i C_2 są dowolnymi liczbami stałymi, $I_p(z)$ zaś jest funkcją Bessla „urojonego argumentu". Możemy zatem, na podstawie znanego twierdzenia, napisać ogólne rozwiązanie równania różniczkowego (2) w postaci

$$y(z) = C_1 I_p(z) + C_2 K_p(z) + M_p(z). \tag{8}$$

Całkę (1) można obliczyć w ogólnym przypadku, gdy $p = n$ jest liczbą naturalną. Napiszemy funkcję $M_n(z)$ w postaci

$$M_n(z) = \frac{e^{-z}}{z} f_n\left(\frac{1}{z}\right). \tag{9}$$

Powyżej obliczyliśmy funkcje $M_1(z)$ oraz $M_2(z)$; w tym przypadku $f_1(1/z) = 1$ oraz $f_2(1/z) = 2(1+1/z)$. Na podstawie wyrażenia (5) obliczamy w prosty sposób zależność rekurencyjną dla funkcji f_n, określonej wzorem (9); podstawiając $x = 1/z$ otrzymujemy

$$f_{n+1}(x) - f_{n-1}(x) = 2 + 2nxf_n(x). \tag{10}$$

Będziemy poszukiwać funkcji $f_n(x)$ w postaci wielomianu $(n-1)$-go stopnia, tzn.

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(n)} x^k.$$

Załóżmy ponadto, że $a_k^{(n)} = 0$, gdy $k \geqslant n$. Jeśli podstawimy wyrażenie na $f_n(x)$ do wzoru (10), to po wykonaniu elementarnych przekształceń otrzymamy

$$a_0^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} a_k^{(n+1)} x^k = a_0^{(n-1)} + \sum_{k=1}^{n-2} a_k^{(n-1)} x^k + 2 + 2n \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}^{(n)} x^k.$$

Z tej równości otrzymujemy zależności rekurencyjne dla współczynników $a_k^{(n)}$:

$$a_0^{(n+1)} = a_0^{(n-1)} + 2, \qquad a_k^{(n+1)} = a_k^{(n-1)} + 2na_{k-1}^{(n)} \qquad (k \geqslant 1). \tag{11}$$

Udowodnimy teraz, że wyrażenie

$$a_k^{(n)} = \begin{cases} 2^k k! \binom{n+k}{2k+1}, & \text{gdy } k < n, \\ 0, & \text{gdy } k \geqslant n \end{cases} \tag{12}$$

spełnia zależności rekurencyjne (11). Jeżeli $k = 0$, to bardzo prosty rachunek wykazuje spełnienie pierwszej zależności (11). W przypadku $k \geqslant 1$ drugą z zależności (11) można napisać w postaci

$$a_k^{(n)} - a_k^{(n-2)} = 2(n-1) a_{k-1}^{(n-1)}. \tag{13}$$

Wykorzystując następnie wzór (12) dla $k < n-1$ otrzymujemy

$$a_k^{(n)}-a_k^{(n-2)} = 2^k k!\left[\binom{n+k}{2k+1}-\binom{n+k-2}{2k+1}\right] =$$

$$= \frac{2^k k!}{(2k+1)!}\left[\frac{(n+k)!}{(n-k-1)!}-\frac{(n+k-2)!}{(n-k-3)!}\right] =$$

$$= \frac{2^k k!}{(2k+1)!}(n+k-2)(n+k-3)\ldots(n-k)[(n+k)(n+k-1)-$$

$$-(n-k-1)(n-k-2)] =$$

$$= 2^{k-1}(k-1)!\binom{n+k-2}{2k-1}2(n-1) = 2(n-1)a_{k-1}^{(n-1)}.$$

Łatwo sprawdzamy również, że równość (13) pozostaje w mocy, gdy $k = n-1$. Jeżeli $k \geqslant n$, to obie strony zależności (13) są równe zeru. Wynika stąd, że wyrażenie (12) spełnia zależności rekurencyjne (11).

Z zależności (12) wynika, że $a_0^{(1)} = 1$, $a_0^{(2)} = 2$, $a_1^{(2)} = 2$, a więc $f_1(x) = a_0^{(1)} = 1$; $f_2(x) = a_0^{(2)}+a_1^{(2)}x = 2(1+x)$. Stwierdzamy zatem, że przy $n = 1$ i $n = 2$ otrzymujemy dla funkcji $M_1(z)$ i $M_2(z)$ wyrażenia, które są zgodne z zależnościami obliczonymi poprzednio. Możemy więc twierdzić, że funkcja $M_n(z)$ wyraża się wzorem

$$M_n(z) = \frac{e^{-z}}{z}\sum_{k=0}^{n-1} k!\binom{n+k}{2k+1}\left(\frac{2}{z}\right)^k \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{14}$$

Z wzoru (14) wynika, że funkcja $M_n(z)$ (wyrażona w postaci całkowej (1) dla $\operatorname{re} z \geqslant \sigma_0 > 0$) ma w punkcie $z = 0$ biegun n-go rzędu.

W monografii Watsona [3] obszerny rozdział jest poświęcony funkcjom związanym z funkcjami Bessla. O funkcji $M_p(z)$ jest wzmianka na str. 341 i 342, przytoczona w dosłownym tłumaczeniu; „Całka $\int_0^\infty e^{-z\cosh t}\cosh \nu t\, dt$ została obliczona wcześniej (§ 6.3); jednak $\int_0^\infty e^{-z\cosh t}\sinh \nu t\, dt$ prawdopodobnie nie da się obliczyć w prosty sposób; jej rozwinięcie według wzrastających potęg z można obliczyć z wzoru (4), § 6.22,

$$I_{-\nu}(z)+I_\nu(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{z\cos\theta}\cos\nu\theta\, d\theta+\frac{2\sin\nu\pi}{\pi}\int_0^\infty e^{-z\cosh t}\sinh \nu t\, dt,$$

ale ponieważ

$$\int_0^\pi \cos^m\theta\cos\nu\theta\, d\theta = \frac{(-1)^m\sin\nu\pi}{2^m(\nu+m)}\cdot {}_2F_1\left(-m; \frac{\nu+m}{2}; 1-\frac{\nu+m}{2}; -1\right),$$

więc rozpatrywana całka nie może być wyrażona w żadnej prostej postaci". Podane w tej pracy obliczenie całki $\int\limits_0^\infty e^{-z\cosh t}\sinh pt\,dt$ dotyczy szczególnego przypadku, gdy $p = n$ jest liczbą naturalną, i daje dla tej całki niezbyt skomplikowane wyrażenie (14).

Jeżeli do wyrażeń (1) i (4) podstawimy odpowiednio $\sinh pt = \frac{1}{2}(e^{pt}-e^{-pt})$ oraz $\cosh pt = \frac{1}{2}(e^{pt}+e^{-pt})$, a następnie te wyrażenia dodamy stronami, to otrzymamy

$$\int\limits_0^\infty e^{-z\cosh t+pt}dt = K_p(z)+M_p(z). \tag{15}$$

Wprowadźmy nową funkcję określoną zależnością

$$G_p(z) = K_p(z)+M_p(z). \tag{16}$$

Z wzoru (15) wynika, że przedstawieniem całkowym funkcji $G_p(z)$ przy $\operatorname{re} z \geqslant \sigma_0 > 0$ jest wyrażenie

$$G_p(z) = \int\limits_0^\infty e^{-z\cosh t+pt}dt. \tag{17}$$

Jeżeli we wzorach (16) i (17) zastąpimy p przez $-p$ i uwzględnimy, że funkcja $K_p(z)$ jest parzysta względem indeksu p, natomiast funkcja $M_p(z)$ jest nieparzysta względem tego indeksu, to otrzymamy

$$\begin{aligned} G_{-p}(z) &= K_p(z)-M_p(z), \\ G_{-p}(z) &= \int\limits_0^\infty e^{-z\cosh t-pt}dt. \end{aligned} \tag{18}$$

W przypadku gdy $p = 0$, mamy oczywiście $G_0(z) = K_0(z)$.

Wiadomo, że zmodyfikowana funkcja Hankela $K_p(z)$ jest funkcją wielowartościową; wynika stąd, że i funkcja $G_p(z)$, określona za pomocą wyrażenia (16), jest również funkcją wielowartościową, przy czym punkt $p = 0$ jest punktem rozgałęzienia.

Dowodzi się w bardzo prosty sposób, że funkcja $G_p(z)$ dzieli własności (5) i (6) funkcji $M_p(z)$, a ponadto funkcja ta spełnia niejednorodne równanie Bessla (2). Wszystkie dowody powyższych własności są bardzo proste: ponieważ funkcja $M_p(z)$ spełnia zależności (5) i (6) oraz funkcja $K_p(z)$ spełnia powyższe zależności, w których skreślono wyrazy zawierające e^{-z}, przeto $G_p(z)$, jako suma funkcji $M_p(z)$ i $K_p(z)$, ma te same własności co i funkcja $M_p(z)$.

Jeżeli n jest liczbą naturalną, to $|G_n(z)| \to \infty$, gdy $z \to 0$; istotnie, z rozwinięcia w szereg funkcji $K_n(z)$ (por. [2], str. 353, wzór 6.456) oraz ze wzoru (14) wynika, że częścią główną funkcji $G_n(z)$ w otoczeniu punktu

$z = 0$ jest wyraz a_n/z^n. Łatwo natomiast okazać, że funkcja $G_{-n}(z)$ dąży do skończonej granicy, gdy $z \to 0$. Tę granicę obliczymy, korzystając z postaci całkowej (18) funkcji $G_{-n}(z)$. Całka $\int_0^\infty e^{-z\cosh t - nt}dt$ jest jednostajnie zbieżna względem z w całej półpłaszczyźnie $\operatorname{re} z \geqslant 0$, gdy $n \geqslant 1$, a więc, przechodząc do granicy przy $z \to 0$ tak, żeby nie przekroczyć osi urojonych, otrzymujemy

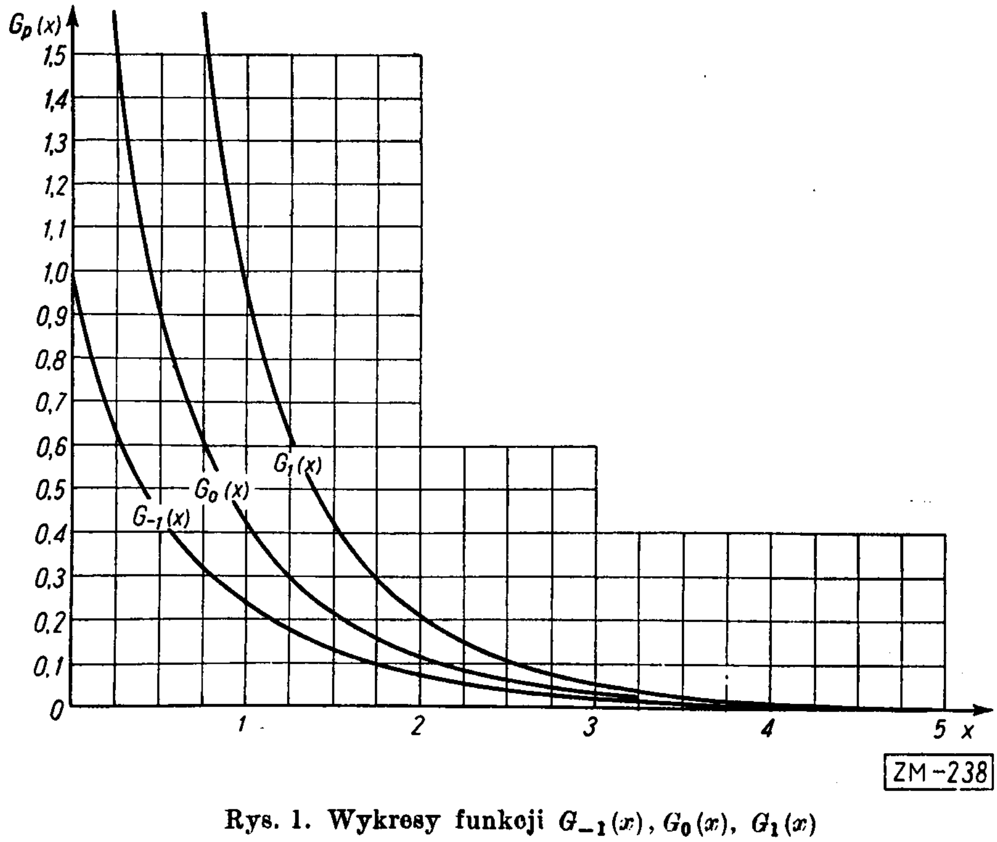
$$\lim_{z\to 0} G_{-n}(z) = \lim_{z\to 0}\int_0^\infty e^{-z\cosh t - nt}dt = \int_0^\infty e^{-nt}dt = 1/n.$$

Wynika stąd, że jeżeli $n \geqslant 1$, to funkcję $G_{-n}(z)$ można przedstawić w postaci

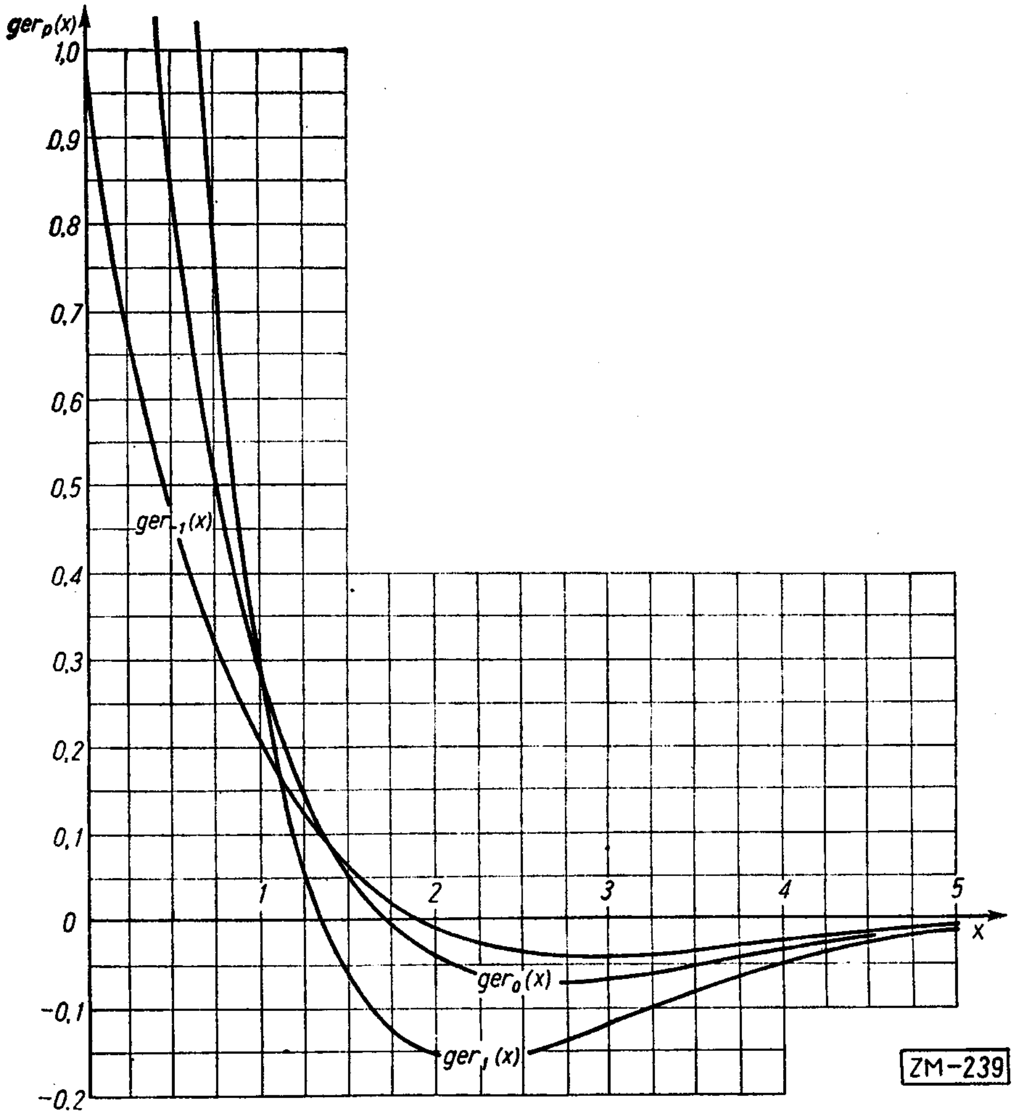
$$G_{-n}(z) = 1/n + o(z),$$

przy czym $o(z) \to 0$, gdy $z \to 0$. Należy jednak zwrócić uwagę na okoliczność, że wyrażenie $o(z)$ oprócz wyrazów zawierających z^k $(k > 0)$ będzie zawierać również wyraz $I_n(z)\ln z$, dążący do zera, gdy $z \to 0$ przy $n \geqslant 1$.

Na rysunku 1 przedstawiony jest przebieg funkcji $G_{-1}(x)$, $G_0(x)$, $G_1(x)$ dla rzeczywistych wartości x.



Rys. 1. Wykresy funkcji $G_{-1}(x)$, $G_0(x)$, $G_1(x)$



Rys. 2. Wykresy funkcji $\mathrm{ger}_{-1}(x)$, $\mathrm{ger}_0(x)$, $\mathrm{ger}_1(x)$

W zastosowaniach elektrotechnicznych występują funkcje $G_{\pm n}(z)$, przy czym zmienna niezależna $z = x\exp(i\pi/4) = x\sqrt{i}$, gdy $x > 0$. W tym przypadku wartości funkcji $G_n(x\sqrt{i})$ są liczbami zespolonymi; rozkładając $G_n(x\sqrt{i})$ na część rzeczywistą i urojoną, można napisać

$$G_n(x\sqrt{i}) = \mathrm{ger}_n(x) + i\,\mathrm{gei}_n(x). \tag{19}$$

Na podstawie zależności (5) i przy użyciu wyrażenia (19) otrzymujemy następujące związki rekurencyjne dla funkcji $\mathrm{ger}_n(x)$ oraz $\mathrm{gei}_n(x)$:

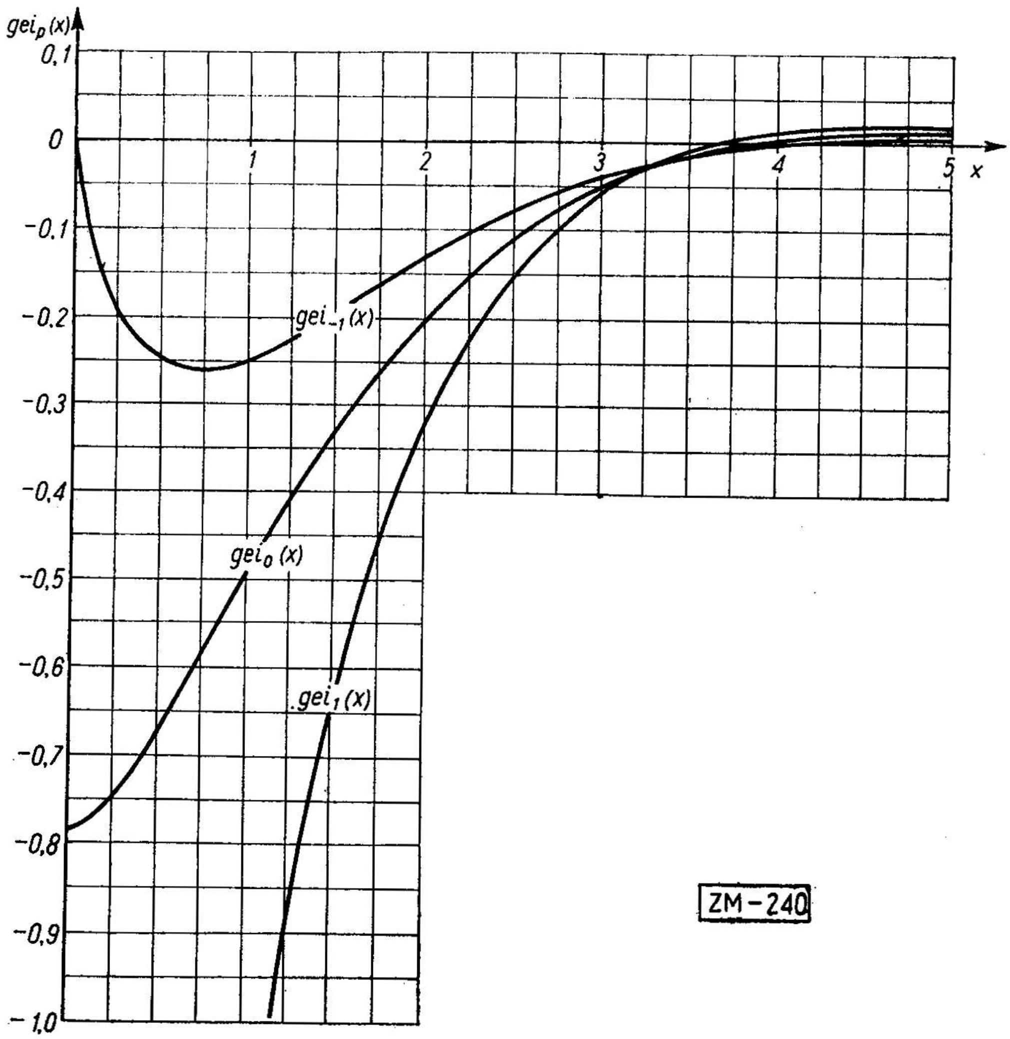
$$\begin{aligned} \mathrm{ger}_{n+1}(x) - \mathrm{ger}_{n-1}(x) &= (n\sqrt{2}/x)\big(\mathrm{ger}_n(x) + \mathrm{gei}_n(x)\big) + 2\,\mathrm{mer}_1(x), \\ \mathrm{gei}_{n+1}(x) - \mathrm{gei}_{n-1}(x) &= (n\sqrt{2}/x)\big(\mathrm{gei}_n(x) - \mathrm{ger}_n(x)\big) + 2\,\mathrm{mei}_1(x). \end{aligned} \tag{20}$$

We wzorach tych oznaczono

$$
\begin{aligned}
\operatorname{mer}_1(x) &= \operatorname{re} M_1(x\sqrt{i}) = \frac{\exp(-x/\sqrt{2})}{x}\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}\right),\\
\operatorname{mei}_1(x) &= \operatorname{im} M_1(x\sqrt{i}) = -\frac{\exp(-x/\sqrt{2})}{x}\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}\right).
\end{aligned}
\tag{21}
$$

W zależnościach (20) n może przybierać wartości zarówno dodatnie, jak i ujemne.

Na rysunku 2 przedstawione są wykresy funkcji $\operatorname{ger}_{-1}(x)$, $\operatorname{ger}_0(x)$, $\operatorname{ger}_1(x)$, natomiast na rysunku 3 podano wykresy funkcji $\operatorname{gei}_{-1}(x)$, $\operatorname{gei}_0(x)$, $\operatorname{gei}_1(x)$.



Rys. 3. Wykresy funkcji $\operatorname{gei}_{-1}(x)$, $\operatorname{gei}_0(x)$, $\operatorname{gei}_1(x)$

Za pomocą funkcji $G_n(z)$ można obliczyć wiele całek. Rozważmy całkę

$$\int_0^\infty \frac{\exp(-z\sqrt{x^2+a^2})\,dx}{(\sqrt{x^2+a^2}\pm x)^p\sqrt{x^2+a^2}},$$

przy czym $a>0$ oraz $\operatorname{re} z>0$. Podstawiając $x=a\sinh t$ otrzymujemy

$$\int_0^\infty \frac{\exp(-z\sqrt{x^2+a^2})\,dx}{(\sqrt{x^2+a^2}\pm x)^p\sqrt{x^2+a^2}} = \int_0^\infty \frac{\exp(-az\cosh t)\,a\cosh t\,dt}{a^p(\cosh t\pm\sinh t)^p a\cosh t} =$$

$$= \frac{1}{a^p}\int_0^\infty \exp(-az\cosh t\mp pt)\,dt = \frac{1}{a^p}G_{\mp p}(az).$$

W analogiczny sposób obliczamy:

$$\int_0^\infty \frac{\exp(-z\sqrt{x^2+a^2})\,dx}{(\sqrt{x^2+a^2}\pm x)^p} = \frac{1}{2a^{p-1}}[G_{\mp(p-1)}(az)+G_{\mp(p-1)}(az)],$$

$$\int_0^\infty \frac{x\exp(-z\sqrt{x^2+a^2})\,dx}{(\sqrt{x^2+a^2}\pm x)^p} = \frac{1}{4a^{p-2}}[G_{\mp p+2}(az)-G_{\mp p-2}(az)],$$

$$\int_0^\infty \frac{x\exp(-z\sqrt{x^2+a^2})\,dx}{(\sqrt{x^2+a^2}\pm x)^p\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{2a^{p-1}}[G_{\mp p+1}(az)-G_{\mp p-1}(az)].$$

Powyższe związki pozostają w mocy również wtedy, gdy $z>0$ i $\operatorname{re} a>0$.

Prace cytowane

[1] M. Krakowski, *Obliczanie linii przesyłkowej „dwa przewody-ziemia" przy założeniu, że przewodząca warstwa ziemna ma wymiary skończone*, Praca kandydacka, Łódź 1955.

[2] И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, изд. III, Москва - Ленинград 1951.

[3] Г. Н. Ватсон, *Теория бесселевых функции*, т. I, Москва 1949.

Praca wpłynęła 15. 6. 57

М. КРАКОВСКИЙ (Лодзь)

О НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЯХ, СВЯЗАННЫХ С ФУНКЦИЯМИ БЕССЕЛЯ

РЕЗЮМЕ

В работе рассмотрены функции $M_p(z)$ и $G_p(z)$ вида

$$M_p(z) = \int_0^\infty e^{-z\cosh t}\sinh pt\,dt \quad \text{и} \quad G_p(z) = \int_0^\infty e^{-z\cosh t+pt}\,dt.$$

Из рассуждений вытекает, что эти функции имеют свойства, подобные свойствам модифицированной функции Ганкеля $K_p(z)$. Показывается, что функцию $M_n(z)$, для натурального числа n, можно представить формулой

$$M_n(z) = \frac{e^{-z}}{z} \sum_{k=0}^{n-1} k! \binom{n+k}{2k+1} \left(\frac{2}{z}\right)^k.$$

Функции $K_p(z), M_p(z)$ и $G_p(z)$ связаны соотношением

$$G_p(z) = K_p(z) + M_p(z).$$

Дальше доказывается, что неоднородное дифференциальное уравнение Бесселя

$$y''(z) + \frac{1}{z} y'(z) - \left(1 + \frac{p^2}{z^2}\right) y(z) = \frac{pe^{-z}}{z^2}$$

имеет общее решение вида

$$y(z) = C_1 I_p(z) + C_2 K_p(z) + M_p(z),$$

где C_1, C_2 суть постоянные интегрирования, а $I_p(z)$ означает функцию Бесселя „мнимого аргумента".

В конце работы даны приложения функции $G_p(z)$ к вычислению несобственных интегралов в пределах от 0 до ∞.

M. KRAKOWSKI (Łódź)

ON CERTAIN FUNCTIONS CONNECTED WITH THE BESSEL FUNCTIONS

SUMMARY

The author considers the functions $M_p(z)$ and $G_p(z)$ with the integral forms

$$M_p(z) = \int_0^\infty e^{-z\cosh t} \sinh pt\, dt \quad \text{and} \quad G_p(z) = \int_0^\infty e^{-z\cosh t + pt} dt.$$

The considerations show that both functions have properties similar to the properties of the modified Hankel function $K_p(z)$. It is shown that the function $M_n(z)$, n denoting a natural number, can be represented by the formula

$$M_n(z) = \frac{e^{-z}}{z} \sum_{k=0}^{n-1} k! \binom{n+k}{2k+1} \left(\frac{2}{z}\right)^k;$$

the functions $K_p(z)$, $M_p(z)$, and $G_p(z)$ are connected by the simple relation

$$G_p(z) = K_p(z) + M_p(z).$$

It is then proved that the non-homogeneous differential Bessel equation

$$y''(z) + \frac{1}{z} y'(z) - \left(1 + \frac{p^2}{z^2}\right) y(z) = \frac{pe^{-z}}{z^2}$$

has a general solution of the form

$$y(z) = C_1 I_p(z) + C_2 K_p(z) + M_p(z),$$

C_1 and C_2 being the constants of integration and $I_p(z)$ denoting the Bessel function of the „imaginary argument". Finally, the author gives the application of the function $G_p(z)$ to the calculation of improper integrals in the interval from 0 to ∞.