ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXII (1969)

Sur certaines équations fonctionnelles vérifiées par la fonction $\varphi(x) = x^{-1}$

par L. DUBIKAJTIS (Toruń)

Dans le travail [1] Kuczma a posé le problème suivant:

Caractériser la fonction $\varphi(x) = 1/x$ à l'aide de l'équation fonctionnelle

$$\varphi(\varphi(x)) = x \tag{1}$$

et quelques conditions supplémentaires.

Lui-même a considéré les possibilités de caractérisation de la fonction $\varphi(x) = 1/x$ par l'équation

$$\varphi(x+1) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(x)+1}. \tag{2}$$

Notamment il a démontré que la fonction $\varphi(x) = 1/x$ est l'unique solution de l'équation (2) définie et convexe dans tout l'intervalle $R^+ = (0, \infty)$ et vérifiant la condition

$$\varphi(1) = 1. \tag{3}$$

Dans le cas de l'équation (2) la convexité est une condition très forte. En la remplaçant par la continuité, on obtient davantage de solutions, car on peut démontrer

THÉORÈME 1. *Toutes les solutions $\varphi(x)$ de l'équation* (2) *déterminées dans tout l'intervalle R^+ et vérifiant les conditions*: (3) *et*

(4) $\varphi(x)$ *est continue dans* R^+

ont la forme

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_0(y)}{1+n\cdot\varphi_0(y)}, \tag{5}$$

où

(6) $n \in N_0$ [1] *et* $n < x \leqslant n+1$,

$$y = x-n, \tag{7}$$

[1] N_0 désigne ici l'ensemble des entiers non-négatifs.

(8) $\varphi_0(y)$ *est une fonction définie et continue* [2] *dans tout l'intervalle* $(0,1]$ *et vérifiant les conditions*:

$$\varphi_0(1) = 1 , \tag{9}$$

$$\varphi_0(y) \geqslant 0 \quad \textit{pour } y \in (0,1] , \tag{10}$$

$$\lim_{y\to 0+0} \varphi_0(y) = +\infty . \tag{11}$$

On peut démontrer ce théorème d'une manière analogue à celle de démonstration du lemme 3.1 dans le livre [2] de M. Kuczma.

Comme une conclusion directe du lemme 15.2 de [2], on obtient un théorème analogue concernant les solutions continues de l'équation (1):

THÉORÈME 2. *Toutes les solutions* $\varphi(x)$ *de l'équation* (1) *déterminées dans tout l'intervalle* R^+ *et vérifiant les conditions*: (3) *et* (4) *ont la forme*:

$$\varphi(x) = x , \tag{12}$$

ou la forme

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_0(x) , & \textit{pour } x \in (0,1] , \\ \varphi_0^{-1}(x) , & \textit{pour } x \in (1,\infty) , \end{cases} \tag{13}$$

où $\varphi_0(y)$ *vérifie les conditions*: (8), (9) *et*

(14) $\varphi_0(y)$ *est strictement decroissante de* $+\infty$ *à* 1 *dans l'intervalle* $(0,1]$.

Nous voyons donc, que l'équation (1) et l'équation (2) possèdent chacun une famille des solutions dépendant d'une fonction $\varphi_0(x)$ définie dans $(0,1]$. Nous allons démontrer que ces deux familles ne contiennent qu'une seule fonction commune et que c'est justement la fonction $\varphi(x) = 1/x$. La fonction $\varphi(x) = 1/x$ est donc la seule solution commune des équations (1) et (2) définie et continue dans tout l'intervalle R^+ et vérifiant la condition supplementaire (3). Nous allons même démontrer

THÉORÈME 3. *La fonction* $\varphi(x) = 1/x$ *est l'unique fonction définie dans tout l'intervalle* R^+ *vérifiant les équations*: (1), (2) *et la condition*

(15) $\varphi(x)$ *est continue dans un intervalle non-vide* $(x_1, x_2) \subset R^+$.

La démonstration de ce théorème sera précédée par plusieurs lemmes. Les voici:

LEMME 1. *Si la fonction* $\varphi(x)$ *déterminée dans tout l'intervalle* R^+ *vérifie l'équation* (2), *alors pour chaque* $x \in R^+$ *et pour chaque entier* n *vérifiant l'inégalité* $n > -x$, *on a* $\varphi(x+n) = \varphi(x)/\big(1+n\varphi(x)\big)$.

---

[2] La fonction $\varphi_0(x)$ doit être continue à gauche au point 1.

On démontre ce lemme par induction pour n positifs et pour n négatifs séparément (cf. la formule (8) dans [1]).

LEMME 2. *L'ensemble W^+ de tous les nombres rationnels positifs est le plus petit ensemble X, tel que*

1° $1 \in X$,

2° *si* $x \in X$, $x+1 \in X$,

3° *si* $x \in X$, $1/x \in X$.

Démonstration. Soit X un ensemble vérifiant les conditions 1°, 2° et 3°. Nous allons démontrer que $W^+ \subset X$. Supposons qu'au contraire il y a des nombres rationnels positifs n'appartenant pas à X. Soit k/n un tel nombre ayant le plus petit dénominateur, c'est-à-dire:

$$k, n \in N_1 \tag{16}$$

(N_1 désigne ici l'ensemble des entiers positifs),

$$k/n \notin X , \tag{17}$$

$$\text{si } k', n' \in N_1 \text{ et si } n' < n, \text{ alors } k'/n' \in X. \tag{18}$$

Le nombre k/n peut être toujours présenté sous la forme

$$k/n = p + q/n , \tag{19}$$

où $p, q \in N_0$ et

$$q < n . \tag{20}$$

Si $q = 0$, $k/n = p$, donc d'après (16) et (17), le nombre p vérifie les conditions: $p \in N_1$ et $p \notin X$, ce qui est incompatible avec 1° et 2°.

Si $q > 0$, les conditions (20) et (18) impliquent $n/q \in X$, d'où selon 3°, resulte $q/n \in X$ et enfin, en vertu de 2° et (19) on obtient $k/n \in X$, ce qui est incompatible avec (17).

Nous avons donc démontré que $W^+ \subset X$. Or il est évident que l'ensemble $X = W^+$ vérifie les conditions: 1°, 2° et 3°, ce qui complète la démonstration de notre lemme.

Soit $\varphi(x)$ une fonction arbitraire. Désignons par E_φ l'ensemble de tous les points x_0 pour lesquels il existe une suite $\{x_n\}$ contenue dans le domaine de la fonction $\varphi(x)$ et vérifiant les conditions suivantes:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 , \tag{21}$$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = 1/x_0 . \tag{22}$$

Cette définition entraîne immédiatement

COROLLAIRE 1. *Si la fonction* $\varphi(x)$ *est continue au point* x_0 *et si* $x_0 \in E_\varphi$, *alors* $\varphi(x_0) = 1/x_0$.

LEMME 3. *Si la fonction* $\varphi(x)$ *est déterminée dans tout* R^+ *et si elle vérifie les équations* (1), (2), *alors*

$$W^+ \subset E_\varphi . \tag{23}$$

Démonstration. Nous allons démontrer que l'ensemble $X = E_\varphi$ vérifie les conditions 1°, 2°, 3° du lemme 2, d'où résulte d'après ce lemme la condition (23).

Soit $\varphi(1) = c$. Le lemme 1 implique pour chaque $n \in N_0$ l'égalité $\varphi(n+1) = c/(1+nc)$, donc en vertu de (1), on a: $c/(1+nc) \in R^+$ et $\varphi\big(c/(1+nc)\big) = n+1$. La dernière égalité entraîne en vertu de (2) l'égalité $\varphi\big(1+c/(1+nc)\big) = (n+1)/(n+2)$. La suite $x_n = 1+c/(1+nc)$ vérifie donc les conditions (21) et (22) (pour $x_0 = 1$) et en conséquence $1 \in E_\varphi$, c'est-à-dire la condition 1° du lemme 2 est accomplie.

Supposons maintenant que $x \in E_\varphi$, donc il existe une suite $\{x_n\}$ telle que $x_n \in R^+$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = 1/x$. Mettons $x'_n \overset{\mathrm{df}}{=} x_n+1$ et $x''_n \overset{\mathrm{df}}{=} \varphi(x_n)$ d'où résulte: $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = x+1$ et $\lim\limits_{n\to\infty} x''_n = 1/x$. On en conclut en vertu de (2), que $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (x_n+1) = \lim\limits_{n\to\infty} \big(\varphi(x_n)/(\varphi(x_n)+1)\big) = \dfrac{1/x}{1/x+1} = \dfrac{1}{x+1}$, et en vertu de (1), que $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x''_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi\big(\varphi(x_n)\big) = \lim x_n = x = \dfrac{1}{1/x}$. Nous voyons donc que la supposition $x \in E_\varphi$ entraîne: $x+1 \in E_\varphi$ et $1/x \in E_\varphi$, c'est-à-dire les conditions 2° et 3° du lemme 2 sont aussi accomplies.

LEMME 4. *Si la fonction* $\varphi(x)$ *déterminée dans tout* R^+ *vérifie les équations* (1), (2) *et si elle est continue dans l'intervalle* $(x_1, x_2) \subset R^+$, *alors*

$$\varphi(x) = 1/x \tag{24}$$

dans tout (x_1, x_2).

Démonstration. Soit $x \in (x_1, x_2)$. Si $x \in W^+$, l'égalité (24) résulte du corollaire 1 et du lemme 3. La fonction $\varphi(x)$ étant continue dans (x_1, x_2), on en conclut que l'égalité (24) est vérifiée dans tout cet intervalle.

On obtient de ce lemme, comme une conclusion directe

LEMME 5. *L'égalité* (24) *définit l'unique fonction déterminée et vérifiant les conditions* (1), (2) *et* (4) *dans tout* R^+.

LEMME 6. *Si la fonction* $\varphi(x)$ *définie dans tout* R^+ *vérifie les équations* (1), (2) *et si elle est continue dans l'intervalle* $(x_1, x_2) \subset R^+$, *alors elle est aussi continue dans*

1) *l'intervalle* (x_1+n, x_2+n)
pour chaque n *entier vérifiant l'inégalité*

$$x_1+n \geqslant 0 , \tag{25}$$

2) *l'intervalle* $(1/x_2, 1/x_1)$
(*où* $1/x_1 = +\infty$, *si* $x_1 = 0$).

Démonstration. En vertu du lemme 4, pour chaque y

$$y \in (x_1, x_2) \text{ entraîne } \varphi(y) = 1/y . \tag{26}$$

1) Si $x \in (x_1+n, x_2+n)$, alors $y = x-n \in (x_1, x_2)$, d'où selon (26), $\varphi(y) = 1/y$. On en conclut en vertu de (25) et du lemme 1, que

$$\varphi(x) = \varphi(y+n) = \frac{\varphi(y)}{1+n\varphi(y)} = \frac{1/y}{1+n/y} = \frac{1}{y+n} = \frac{1}{x} .$$

L'égalité (24) étant valable pour chaque $x \in (x_1+n, x_2+n)$, nous voyons que la fonction $\varphi(x)$ est continue dans cet intervalle.

2) Si $x \in (1/x_2, 1/x_1)$, alors $y = 1/x \in (x_1, x_2)$, d'où selon (26), $\varphi(y) = 1/y$. On en conclut d'après (1), que $\varphi(x) = \varphi(1/y) = \varphi[\varphi(y)] = y = 1/x$. L'égalité (24) étant valable dans tout l'intervalle $(1/x_2, 1/x_1)$, nous voyons que la fonction $\varphi(x)$ est continue dans cet intervalle.

Lemme 7. *Si la fonction* $\varphi(x)$ *est définie et vérifie les équations* (1) *et* (2) *dans tout l'intervalle* R^+ *et si elle est continue dans un intervalle non-vide* (n, x_0) (*où* $n \in N_0$), *elle est continue dans tout* R^+.

Démonstration. Supposons que $\varphi(x)$ vérifie les conditions (1), (2) et qu'elle est continue dans l'intervalle (n, x_0), où $n \in N_0$ et $n < x_0$. On en conclut selon le lemme 6 1), que $\varphi(x)$ est continue dans l'intervalle $(0, x_1)$, où $x_1 = x_0-n \neq 0$. En conséquence, en vertu du lemme 6.2), $\varphi(x)$ est aussi continue dans $(1/x_1, +\infty)$.

Soit n_0 un nombre entier vérifiant l'inégalité $n_0 > 1/x_1$. On en conclut que

$$\varphi(x) \text{ est continue dans } (n_0, +\infty) \tag{27}$$

et en particulier

$$\varphi(x) \text{ est continue dans } (n_0, 2n_0+1). \tag{28}$$

La condition (28) entraîne d'après le lemme 6 1) continuité de $\varphi(x)$ dans l'intervalle $(0, n_0+1)$, d'où en vertu de (27) résulte notre lemme.

Démonstration du théorème 3. Pour démontrer notre théorème il suffit, d'après les lemmes 5 et 6, de trouver un intervalle non-vide (n, x_0) (où $n \in N_0$), dans lequel la fonction $\varphi(x)$ est continue.

14*

Supposons que le théorème est faux, donc pour chaque intervalle non-vide (y_1, y_2)

(29) si $\varphi(x)$ est continue dans (y_1, y_2), il existe $n \in N_0$, tel que $n < y_1 < y_2 \leqslant n+1$.

La fonction $\varphi(x)$ étant (d'après les hypothèses) continue dans un intervalle (x_1, x_2) ayant longueur $a = x_2 - x_1 > 0$, nous allons démontrer par l'induction que pour chaque n entier vérifiant les inégalités

$$0 \leqslant n < \frac{1}{a}, \tag{30}$$

(31) il existe un intervalle (y_1, y_2) de longueur $\frac{a}{1-na}$, dans lequel $\varphi(x)$ est continue.

1° Pour $n = 0$ il suffit de mettre $(y_1, y_2) = (x_1, x_2)$.

2° Supposons que

$$0 < n+1 < \frac{1}{a} \tag{32}$$

et qu'il existe un intervalle (z_1, z_2), tel que

$$\varphi(x) \text{ est continue dans } (z_1, z_2)\,, \tag{33}$$

et

$$z_2 - z_1 = b = \frac{a}{1-na}\,. \tag{34}$$

Les conditions (33) et (29) impliquent l'existence d'un entier n_0 vérifiant les inégalités $n_0 < z_1 < z_2 \leqslant n_0+1$ d'où résulte, d'après le lemme 6 1), la continuité de la fonction $\varphi(x)$ dans l'intervalle (z_1', z_2'), où $z_i' = z_i - n_0$ $(i = 1, 2)$. Les extrémités de cet intervalle vérifient les inégalités $0 < z_1' = z_2' - b < z_2' \leqslant 1$, d'où résulte

$$0 < z_1' \cdot z_2' \leqslant 1 - b\,. \tag{35}$$

Selon le lemme 6 2), $\varphi(x)$ est aussi continue dans l'intervalle $(1/z_2', 1/z_1')$. La longueur de celui-ci vérifie d'après (34) et (35), les conditions

$$\frac{1}{z_1'} - \frac{1}{z_2'} = \frac{z_2' - z_1'}{z_1' \cdot z_2'} = \frac{b}{z_1' \cdot z_2'} \geqslant \frac{b}{1-b} = \frac{a}{1-(n+1)a}\,.$$

Nous avons donc démontré que pour chaque n entier vérifiant les inégalités (30) on a toujours (31).

Considérons, en particulier, n déterminé par les conditions: $n < 1/a \leqslant n+1$, d'où résulte $0 < 1/a - n \leqslant 1$. Dans ce cas la longueur de l'intervalle (y_1, y_2) est $\frac{a}{1-na} = \frac{1}{1/a-n} \geqslant 1$, ce qui est incompatible avec l'hypothèse (29).

Ainsi la démonstration du théorème 3 est terminée.

Je tiens à remercier ici à Monsieurs M. Kuczma et F. Maniakowski, dont les remarques precieuses m'ont permis de simplifier les considérations.

Travaux cités

[1] M. Kuczma, *Sur une équation fonctionnelle qui caractérise la fonction $f(x) = x^{-1}$*, Publ. de l'Institut Mathématique (Beograd), 4 (18), (1964), pp. 121-124.

[2] — *Functional equations in a single variable*, Warszawa 1968.

Reçu par la Rédaction le 3. 5. 1968