ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXVII (1972)

Sur quelques inégalités différentielles relatives à des lignes polygonales

par A. Sobolewska (Rzeszów)

Soient un système de fonctions

$$\{f_1(t, Y), f_2(t, Y), \ldots, f_n(t, Y)\}, \tag{1}$$

où $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ est un point de l'espace à n dimensions, et un point fixé $(t_0, Y_0) = (t_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})$ de l'espace à $(n+1)$ dimensions.

Admettons que

1° chacune des fonctions $f_i(t, Y)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ est continue par rapport à la variable Y et bornée dans l'ensemble: $Z = \{(t, Y)\colon\ t_0 \leqslant t \leqslant a, -\infty < y_i < +\infty\ (i = 1, 2, \ldots, n)\}$,

et

2° le système de fonctions $\{f_1(t, Y), \ldots, f_n(t, Y)\}$ dans l'ensemble Z satisfait à la condition W_- par rapport à Y (1).

Divisons ensuite l'intervalle $[t_0, a]$ en k parties quelconques par les points $t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}$ tels que

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k = a \tag{2}$$

et construisons la ligne brisée

$$L = \{L_1, L_2, \ldots, L_n\}, \tag{3}$$

ou la coordonnée L_i est la ligne brisée déterminée par les sommets $A_{i0}(t_0, y_{i0})$, $A_{i1}(t_1, y_{i1}), \ldots, A_{i,k-1}(t_{k-1}, y_{i,k-1})$, $A_{ik}(t_k, y_{ik})$ contenus dans le plan (t, y_i), les ordonnées de ces sommets étant données par les formules

$$\begin{aligned} y_{i1} &= y_{i0}+f_i(t_0, Y_0)(t_1-t_0), \\ y_{i2} &= y_{i1}+f_i(t_1, Y_1)(t_2-t_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{ik} &= y_{i,k-1}+f_i(t_{k-1}, Y_{k-1})(t_k-t_{k-1}), \end{aligned} \tag{4}$$

(1) J. Szarski, *Differential inequalities*, Warszawa 1967.

où

$$Y_1 = (y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1}),\ Y_2 = (y_{12}, y_{22}, \ldots, y_{n2}), \ldots,$$
$$Y_{k-1} = (y_{1,k-1}, y_{2,k-1}, \ldots, y_{n,k-1}).$$

Désignons par P^δ la famille de tous les réseaux de la forme (2) tels que le diamètre de chaque réseau appartenant à P^δ ne soit pas supérieur à un nombre positif δ fixé. A la famille de réseaux P^δ correspond la famille de lignes brisées $\mathscr{L}^\delta = \{\mathscr{L}_1^\delta, \mathscr{L}_2^\delta, \ldots, \mathscr{L}_n^\delta\}$ définies par (3) et (4).

Observons que la famille de toutes les lignes brisées (3) est formée de fonctions équicontinues et bornées dans leur ensemble dans l'intervalle $[t_0, a]$. Rn tenant compte de ce fait on peut définir les deux fonctions suivantes, continues dans l'intervalle $[t_0, a]$:

$$\Omega^\delta(t) = \{\Omega_1^\delta(t), \Omega_2^\delta(t), \ldots, \Omega_n^\delta(t)\}, \tag{5}$$

$$\omega^\delta(t) = \{\omega_1^\delta(t), \omega_2^\delta(t), \ldots, \omega_n^\delta(t)\}, \tag{6}$$

où $\Omega_i^\delta(t) = \sup\limits_{L_i \in \mathscr{L}_i^\delta} L_i(t)$, $\omega_i^\delta(t) = \inf\limits_{L_i \in \mathscr{L}_i^\delta} L_i(t)$ pour $t \in [t_0, a]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Nous établirons le théorème suivant relatif aux fonctions (5) et (6):

THÉORÈME I. *Si les fonctions $f_i(t, Y)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ satisfont aux hypothèses* 1°, 2° *et si δ est fixé quelconque, les fonctions* (5) *et* (6) *vérifient dans l'intervalle $[t_0, a]$ les inégalités différentielles suivantes*:

$$\left.\begin{aligned} &D_+ \Omega_i^\delta(t) \geqslant f_i(t, \Omega^\delta(t)) \quad (7)\\ &D^+ \omega_i^\delta(t) \leqslant f_i(t, \omega^\delta(t)) \quad (8)\end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Démonstration. Nous nous bornerons à établir l'inégalité (7), la démonstration de l'inégalité (8) étant analogue. Supposons, pour la démonstration par l'absurde, que l'on ait, pour un i_0 et un t^* de l'intervalle $[t_0, a)$ l'inégalité

$$d' = D_+ \Omega_{i0}^\delta(t^*) < f_{i0}(t^*, \Omega^\delta(t^*)) = d. \tag{9}$$

Cette inégalité entraîne

$$d' < \frac{d+d'}{2} < d. \tag{9'}$$

Des inégalités (9) et (9′) il résulte que dans chaque intervalle (t^*, t^*+h), $h > 0$, il existe un point t_1^* tel que

$$\frac{\Omega_{i0}^\delta(t_1^*) - \Omega_{i0}^\delta(t^*)}{t_1^* - t^*} < \frac{d+d'}{2}, \tag{10}$$

d'où l'on tire, après quelques transformations,

$$(10') \qquad \Omega^{\delta}_{i0}(t^*) < \Omega^{\delta}_{i0}(t^*) + \frac{d+d'}{2}(t_1^* - t^*).$$

Supposons que le nombre h vérifie l'inégalité $0 < h \leqslant \delta$. De la définition de la fonction $\Omega^{\delta}(t)$ il résulte que pour un nombre positif quelconque fixé ε il existe une ligne brisée $\tilde{L} \in \mathscr{L}^{\delta}$ telle qu'un sommet $\tilde{A}_{i_0 p}$ aura une abscisse égale à t^* et son ordonnée vérifiera l'inégalité

$$(11) \qquad \Omega^{\delta}_{i_0}(t^*) - \varepsilon < \tilde{y}_{i_0 p} < \Omega^{\delta}_{i_0}(t^*) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On peut, de plus, admettre que pour $t \in [t^*, t^* + h)$ l'équation de la ligne brisée $\tilde{L}_i$ sera de la forme

$$(12) \qquad y_i(t) = \tilde{y}_{ip} + f_i\big(t^*, \tilde{L}(t^*)\big)(t - t^*) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

De la continuité de la fonction $f_{i0}(t, Y)$ par rapport à Y et de la condition 2° il résulte que si le nombre ε dans les inégalités (11) est suffisamment petit, la ligne brisée $\tilde{L}_{i0}$ coupera la demi-droite d'équation

$$y_{i0}(t) = \Omega^{\delta}_{i0}(t^*) + \frac{d+d'}{2}(t - t^*) \qquad (t \geqslant t^*)$$

en un point d'abscisse t_2^* telle que

$$(13) \qquad t_2^* = -\frac{\Omega^{\delta}_{i0}(t^*) - \tilde{y}_{ip}}{f_{i0}\big(t^*, \tilde{L}(t^*)\big) - \dfrac{d+d'}{2}} + t^* < t_1^*.$$

On tire de là et de l'inégalité (10′) la suivante:

$$(14) \qquad \tilde{L}_{i0}(t_1^*) > \Omega^{\delta}_{i0}(t_1^*),$$

qui est en contradiction avec la définition de la fonction $\Omega^{\delta}(t)$, ce qui achève la démonstration du théorème I.

Remarque. Sous les hypothèses du théorème I les inégalités de la forme (7) ou (8) sont en général en défaut pour les dérivées à gauche, comme le montrent les deux exemples suivants:

1. Supposons $f(t, y)$ définie dans l'ensemble $\{(t, y)\colon t \in [0, 2],\ -\infty < y < +\infty\}$ par la formule:

$$f(t, y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \in [0, 1],\ -\infty < y < +\infty, \\ 1 & \text{pour } t \in [1, 2],\ -\infty < y < +\infty \end{cases}$$

et soit $(t_0, y_0) = (0, 0)$. Alors, pour $\delta \leqslant 1$, on a

$$\Omega^\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \in [0, 1], \\ t-1 & \text{pour } t \in (1, 2] \end{cases}$$

et

$$D^- \Omega^\delta(1) = D_- \Omega^\delta(1) = 0 < f\big(1, \Omega^\delta(1)\big) = 1.$$

2. Définissons la fonction $f(t, y)$ dans l'ensemble $\{(t, y)\colon t \in [0, 1], -\infty < y < +\infty\}$ par la formule:

$$f(t, y) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \text{ rationnels}, \ -\infty < y < +\infty, \\ 0 & \text{pour } t \text{ irrrationnels}, \ -\infty < y < +\infty \end{cases}$$

et prenons $(t_0, y_0) = (0, 0)$. Alors, pour $\delta \leqslant 1$ et $t \in [0, 1]$ on a $\Omega^\delta(t) = t$ et

$$D^- \Omega^\delta(t) = D_- \Omega^\delta(t) = 1 > f\big(t, \Omega^\delta(t)\big)$$

pour t irrationnels.

Nous établirons maintenant le théorème de comparaison suivant:

THÉORÈME II. *Si les hypothèses* $1^\circ, 2^\circ$ *sont vérifiées et si*

3° *la fonction* $\varphi(t) = \big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)\big)$ *est continue dans l'intervalle* $[t_0, a]$ *et satisfait à l'inégalité initiale*

$$\varphi_i(a) \leqslant \Omega_i^\delta(a) \qquad (\varphi_i(a) \geqslant \omega_i^\delta(a)) \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et aux inégalités différentielles

$$D_+ \varphi_i(t) < f_i\big(t, \varphi(t)\big) \qquad (D^+ \varphi_i(t) > f_i(t, \varphi(t))$$

pour $t \in [t_0, a)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *on a l'inégalité*

$$\varphi_i(t) > \Omega_i^\delta(t) \qquad (\varphi_i(t) < \omega_i^\delta(t)) \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

pour $t \in [t_0, a]$.

Démonstration. Soit $E = \big\{t \in [t_0, a]\colon \bigvee_i \big(\varphi_i(t) \leqslant \Omega_i^\delta(t)\big)\big\}$. Supposons, pour la démonstration par l'absurde, que l'ensemble E est non vide. Soit encore $\bar{t}$ la borne supérieure de l'ensemble E. De la définition du nombre $\bar{t}$ et des hypothèses du théorème II on déduit l'inégalité $\bar{t} < a$.

D'autre part, on sait que

$$\varphi_i(\bar{t}) \geqslant \Omega_i^\delta(\bar{t}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et

$$\varphi_{i_0}(\bar{t}) = \Omega_{i_0}^\delta(\bar{t}), \qquad \varphi_{i_0}(t) > \Omega_{i_0}^\delta(t) \qquad \text{pour un } i_0, \ t \in (\bar{t}, a],$$

d'où l'on tire l'inégalité

$$\frac{\varphi_{i_0}(t)-\varphi_{i_0}(\bar{t})}{t-\bar{t}} > \frac{\Omega^\delta_{i_0}(t)-\Omega^\delta_{i_0}(\bar{t})}{t-\bar{t}} \quad \text{pour } t\in(\bar{t}, a].$$

En passant à la limite, nous en obtenons

$$D_+\varphi_{i_0}(\bar{t}) \geqslant D_+\Omega^\delta_{i_0}(\bar{t}).$$

D'autre part, on sait que

$$D_+ \Omega^\delta_{j_0}(\bar{t}) \geqslant f_{j_0}(\bar{t}, \Omega^\delta(\bar{t})).$$

Puisque l'on a au point t les relations

$$\varphi_i(\bar{t}) \geqslant \Omega^\delta_i(\bar{t}) \quad \text{pour } i\neq j_0,$$
$$\varphi_{j_0}(\bar{t}) = \Omega^\delta_{j_0}(\bar{t}),$$

et que les fonctions de la suite (1) satisfont à la condition W_-, il s'ensuit que

$$f_{j_0}(\bar{t}, \Omega^\delta(t)) \geqslant f_{j_0}(\bar{t}, \varphi(\bar{t})),$$

d'où l'on tire l'inégalité

$$D^+\varphi_{j_0}(\bar{t}) \geqslant f_{j_0}(\bar{t}, \varphi(\bar{t})),$$

qui est en contradiction avec les inégalités différentielles admises pour la fonction $\varphi(t)$. Pour établir l'inégalité contraire figurant dans la conclusion du théorème on procéderait d'une façon analogue.

La famille à un paramètre de fonctions $\Omega^\delta(t)$ constitue pour $\delta\in(0, a-t_0]$ une famille de fonctions bornées dans leur ensemble et équicontinues par rapport à t, ainsi que croissantes par rapport à δ. (Cela résulte de la définition (5) et de l'implication suivante: si $\delta_1>0$, $\delta_2>0$ et $\delta_1\leqslant\delta_2$, alors $\mathscr{L}^{\delta_1}\subset\mathscr{L}^{\delta_2}$.) Il en résulte l'existence de la limite

(15) $$\lim_{\delta\to 0}\Omega^\delta(t) = \Omega_0(t),$$

qui est une fonction continue dans l'intervalle $[t_0, a]$. Des propriétés semblables de la famille de fonctions $\omega^\delta(t)$ résulte l'existence de la limite

(16) $$\lim_{\delta\to 0}\omega^\delta(t) = \omega_0(t),$$

qui est une fonction continue dans l'intervalle $[t_0, a]$. Les fonctions limites (15) et (16) satisfont aux inégalités

(17) $$\Omega_{0i}(t)\leqslant\Omega^\delta_i(t), \quad \omega_{0i}(t)\geqslant\omega^\delta_i(t) \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

pour $t\in[t_0, a]$ et $\delta\in(0, a-t_0]$, tandis qu'elles ne vérifient pas, en général, les inégalités différentielles du théorème I.

Cependant observons que les relations (15), (16) et (17) ainsi que le théorème II entraînent le théorème de comparaison suivant:

THÉORÈME III. *Si les fonctions* $f_i(t, Y)$ *satisfont aux hypotheses* 1° *et* 2° *du théorème* II, *et si la fonction* $\Omega_0(t)$ $(\omega_0(t))$ *est la fonction définie précedémment et la fonction* $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ *est continue dans l'intervalle* $[t_0, a]$ *et satisfait l'inégalité initiale*:

$$\varphi_i(a) > \Omega_{0i}(a) \qquad (\varphi_i(a) < \omega_{0i}(a))$$

et aux inégalités différentielles

$$D_+ \varphi_i(t) < f_i(t, \varphi(t)) \qquad (D^+ \varphi_i(t) > f_i(t, \varphi(t)))$$

on a

$$\varphi_i(t) > \Omega_{0i}(t) \qquad (\varphi_i(t) < \omega_{0i}(t))$$

pour $t \in [t_0, a]$.

La démosntration de ce théorème est bien simple et on peut l'omettre.

Reçu par la Rédaction le 20. 3. 1971