COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XV 1966 FASC. 1

SUR LA LONGUEUR DE L'INDICATRICE DANS LA GÉOMÉTRIE PLANE DE MINKOWSKI

PAR

S. GOŁĄB (CRACOVIE)

La métrique d'une géométrie plane de Minkowski est déterminée, comme on sait, par le choix d'un point a, appelé l'*origine*, et d'un ensemble I, dit l'*indicatrice*, qui doit être étoilé par rapport à l'origine a, c'est-à-dire tel que tout rayon r issu de a passe exactement par un point p de I différent de a. Excluons les métriques irrégulières et admettons que l'indicatrice I est une courbe (fermée) continue. Sous cette hypothèse, la rectifiabilité des arcs au sens de la métrique minkowskienne équivaut à celle au sens de la métrique euclidienne [1]. C'est H. Minkowski qui a démontré (en supposant la continuité de l'indicatrice I) que la condition suffisante et nécessaire pour que la métrique de Minkowski satisfasse à l'axiome de triangle, est que l'indicatrice I soit une courbe convexe (au sens large). La métrique n'est symétrique que si I a un centre de symétrie coïncidant avec a. Un arc possède alors en général la longueur dépendant encore de l'orientation. La longueur de l'indicatrice sera désignée ici par $L_+(I)$ ou par $L_-(I)$ suivant l'orientation adoptée. Lorsqu'elle est fixée, l'indexe $+$ et $-$ sera omis respectivement.

Dans le travail [1], j'ai établi en me basant sur quelques considérations de la géométrie élémentaire que si I est convexe, on a

$$(1) \qquad L(I) \geqslant 4+\sqrt{2}$$

indépendamment du choix de l'origine a à l'intérieur de I et j'ai formulé la conjecture que l'on a l'inégalité précise

$$(2) \qquad L(I) \geqslant 6,$$

ce qui a été en effet démontré tout récemment par Grünbaum [2].

Le but de cette communication est de généraliser ce résultat par suppression de l'hypothèse de convexité de l'indicatrice I.

THÉORÈME. *Si l'indicatrice I est une courbe continue* (*et rectifiable*), *on a l'inégalité* (2).

Quant à l'hypothèse de rectifiabilité, elle peut être évidemment rejetée, car dans le cas contraire $L(I) = \infty$.

Il s'ensuit des hypothèses admises que la courbe I est bornée. Or on peut introduire pour les indicatrices non convexes, tout comme pour les courbes convexes, la notion de droite d'appui. Appelons une droite a *droite d'appui de* I lorsque $a \cap I \neq \emptyset$ et que la courbe I est située entièrement d'un côté de la droite a.

Pour chaque direction d, il existe exactement deux droites d'appui de I et l'origine a se trouve entre elles. On peut partager toutes ces droites d'appui en deux classes disjointes I et II en rangeant dans la classe I toutes celles pour lesquelles $a \cap I$ est un point ou un segment. Alors, si la droite d'appui a appartient à la classe II, l'ensemble $a \cap I$ (bien entendu borné et fermé) est situé entre deux points extrémaux p_1 et p_2. Comme il y a sur le segment $\langle p_1, p_2 \rangle$ des points n'appartenant pas à I, il doit y avoir sur I entre p_1 et p_2 au moins un point de concavité q [3]. La partie de l'arc de I contenant q et comprise entre ces points sera dite l'*arc de concavité* de l'indicatrice I. Il est clair que I ne peut posséder au plus qu'une infinité dénombrable d'arcs de concavité, puisque deux arcs de concavité ne peuvent avoir au plus qu'un point commun.

Désignons par $H(A)$ la plus petite enveloppe convexe de A:

$$(3) \qquad x \in H(A) \iff (x \text{ est situé sur un segment } \langle y, z \rangle \text{ où } y, z \in A).$$

I^* désignant alors la frontière de $H(I)$, on voit aisément que chaque point de I est situé on bien sur I^* ou bien à l'intérieur de I^*. J'omets la démonstration facile du lemme suivant:

LEMME. *Lorsque les indicatrices I_1 et I_2 ont l'origine commune a et que I_1 est disjoint à l'extérieur de I_2, on a*

$$(4) \qquad L_1(C) \geqslant L_2(C)$$

pour tout arc rectifiable C où $L_i(C)$ est la longueur de C dans la métrique définie par l'indicatrice I_i.

Reprenons la démonstration du théorème. Il suffit de l'établir pour les indicatrices non convexes. Une telle indicatrice I possède, comme on a vu, des arcs de concavité. Numérotons ces arcs d'une façon arbitraire $C_1, C_2, \ldots$ et désignons par $S_1, S_2, \ldots$ les segments tendus entre les extrémités de chacun d'eux respectivement. Posons

$$(5) \qquad R \stackrel{\mathrm{df}}{=} I - \bigcup_i C_i.$$

Je vais montrer que

$$(6) \qquad R \subset I^*.$$

Supposons en effet qu'il existe un point $p_0 \in R - I^*$. Or $p_0 \in R$ entraîne $p_0 \in I$ et comme $p_0 \notin I^*$, ce point est situé à l'intérieur de I^*. Désignons par r le rayon $\overrightarrow{ap_0}$ et par p_0^* le point d'intersection de r et I^*. Il en résulte que p_0 est situé sur l'arc de concavité de I, ce qui est en vertu de (5) impossible pour un point $p_0 \in R$.

Il s'ensuit de (6) que

$$R = I^* - \bigcup_i S_i. \tag{7}$$

$L(A)$ et $L^*(A)$ désignant la longueur de A dans la métrique définie par I et par I^* respectivement, on a

$$L(R) \geqslant L^*(R) \tag{8}$$

d'après le lemme et en même temps

$$L(C_i) \geqslant L^*(C_i) \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

La définition de R et les égalités

$$I = \bigcup_i C_i + R \quad \text{et} \quad I^* = \bigcup_i S_i + R$$

entraînent, les arcs C_i et C_j, de même que les segments S_i et S_j n'empiétant pas deux à deux les uns sur les autres, les égalités

$$L(I) = \sum_i L(C_i) + L(R) \quad \text{et} \quad L^*(I^*) = \sum_i L^*(S_i) + L^*(R). \tag{10}$$

L'indicatrice I^* étant convexe et le segment S_i joignant les extrémités de C_i, on a (voir [1])

$$L^*(S_i) \leqslant L^*(C_i) \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

d'où, en vertu de (9), $L(C_i) \geqslant L^*(S_i)$ et finalement en vertu de (8) et (10)

$$L(I) \geqslant L^*(I^*). \tag{12}$$

Vu la convexité de l'indicatrice I^*, on a d'après le résultat précité de Grünbaum l'inégalité

$$L^*(I^*) \geqslant 6,$$

qui entraîne d'après (12) l'inégalité (2), c. q. f. d.

TRAVAUX CITÉS

[1] S. Gołąb, *Quelques problèmes métriques de la géométrie de Minkowski* (en polonais avec un résumé français), Prace Akademii Górniczej w Krakowie 6 (1932), p. 1-79.

[2] B. Grünbaum, *The perimeter of Minkowski unit disc*, ce volume, p. 135-139.

[3] F. Leja et W. Wilkosz, *Sur une propriété des domaines concaves*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 2 (1923), p. 222-224.

Reçu par la Rédaction le 28. 1. 1965