COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXV 1972 FASC. 1

ENCORE SUR LES ÉQUATIONS HYPERBOLIQUES AVEC PETIT PARAMÈTRE DANS LES ESPACES DE BANACH GÉNÉRAUX

PAR

MIROSLAV SOVA (PRAGUE)

En continuant les recherches de [6], on est arrivé à de nouveaux résultats pour le cas homogène qui y est considéré. Cependant ces résultats permettent aussi de résoudre un problème important non-homogène (voir section 5). Pour d'autres remarques, voir plus loin, section 8.

1. PRÉLIMINAIRES

1.1. Les notations et résultats de [6] seront fréquemment employés dans la suite. Leur connaissance est donc indispensable.

1.2. LEMME. *On a pour tous $a, b \in R$, $\lambda > a > b$ et $p = 0, 1, \ldots$ l'inégalité*

$$(1) \qquad (-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p}\left(\frac{1}{\lambda-a}\,\frac{1}{\lambda-b}\right) \leqslant \frac{1}{a-b}\,(-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p}\,\frac{1}{\lambda-a}.$$

En effet, d'après 1.4 de [6],

$$(-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p}\left(\frac{1}{\lambda-a}\,\frac{1}{\lambda-b}\right) = (-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p}\left[\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{\lambda-a} - \frac{1}{\lambda-b}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{a-b}\left[(-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p}\,\frac{1}{\lambda-a} - \frac{p!}{(\lambda-b)^{p+1}}\right] \leqslant \frac{1}{a-b}\,(-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p}\,\frac{1}{\lambda-a}.$$

1.3. LEMME. *On a pour tous $a, b \in R$, $\lambda > a > b$ et $p = 0, 1, \ldots$*

$$(1) \qquad (-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p}\left(\frac{1}{(\lambda-a)^2}\,\frac{1}{\lambda-b}\right) \leqslant \frac{1}{a-b}\,(-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p}\,\frac{1}{(\lambda-a)^2}.$$

En effet, en vertu de 1.4 de [6],

$$(-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p}\left(\frac{1}{(\lambda-a)^2}\,\frac{1}{(\lambda-b)}\right) = \frac{1}{a-b}(-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p}\left[\frac{1}{(\lambda-a)^2} - \frac{1}{\lambda-a}\,\frac{1}{\lambda-b}\right]$$

$$= \frac{1}{a-b}(-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{(\lambda-a)^2} - \frac{1}{(a-b)^2}(-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p}\left(\frac{1}{\lambda-a} - \frac{1}{\lambda-b}\right)$$

$$= \frac{1}{a-b}(-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{(\lambda-a)^2} - \frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{p!}{(\lambda-a)^{p+1}} - \frac{p!}{(\lambda-b)^{p+1}}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{a-b}(-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{(\lambda-a)^2}.$$

1.4. LEMME. *Soient $\varphi \in R^+ \to R$, $a \in R$ et $\omega \in R$. Si la fonction φ est continue et la fonction $t \to e^{-\omega t}\varphi(t)$ est bornée sur R^+, on a*

$$\frac{1}{(\lambda-a)^i}\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\varphi(\tau)\,d\tau = \int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\int_0^t (\tau-\sigma)^{i-1}e^{a(\tau-\sigma)}\varphi(\sigma)\,d\sigma\,d\tau$$

pour tout $\lambda > a$, tout $\lambda > |a|+|\omega|$ et tout $i = 1, 2, \ldots$

La démonstration directe est facile. En outre, c'est un cas particulier de la transformation de Laplace des convolutions.

1.5. LEMME. *Soient $\varphi \in R^+ \to R$ et $f \in R^+ \to E$. Si les fonctions φ et f sont continues sur R^+ et s'il existe une constante $\omega \in R$ telle que*

(1) *les fonctions $t \to e^{-\omega t}\varphi(t)$ et $t \to e^{-\omega t}f(t)$ sont bornées sur R^+,*

$$\left\|\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\tau^p f(\tau)\,d\tau\right\| \leqslant \int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\tau^p\varphi(\tau)\,d\tau \tag{2}$$

pour tout $\lambda > \omega$ et tout $p = 0, 1, \ldots$, on a $\|f(t)\| \leqslant \varphi(t)$ pour tout $t \in R^+$.

C'est une conséquence immédiate du lemme de Post-Widder (voir [6], 1.8).

1.6. LEMME. *Soient $f \in R^+ \to E$ et $\Phi \in R^+ \to \mathfrak{L}(E)$. Admettons que*

(1) *la fonction f est intégrable sur l'intervalle $(0, a)$ pour tout $a > 0$,*

(2) *la fonction $\|\Phi(\cdot)x\|$ y est bornée,*

(3) *la fonction $\Phi(\cdot)x$ est continue sur R^+ pour tout $x \in E$.*

Alors

$$\int_0^t\int_0^\tau \Phi(\tau-\sigma)f(\sigma)\,d\sigma\,d\tau = \int_0^t\left(\int_0^{t-\tau}\Phi(\sigma)f(\tau)\,d\sigma\right)d\tau \tag{4}$$

$$= \int_0^t\int_0^\tau \Phi(\sigma)f(\tau-\sigma)\,d\sigma\,d\tau = \int_0^t \Phi(\tau)\left(\int_0^{t-\tau} f(\sigma)\,d\sigma\right)d\tau,$$

quel que soit $t \in R^+$.

Démonstration. Soient $t \in R^+$ et $Q = \{(\sigma, \tau) \colon 0 < \sigma < \tau < t\}$.

La fonction $\Phi(\tau-\sigma)f(\sigma)$ est mesurable sur Q d'après (3) et il existe d'après (2) une constante c telle que

$$\|\Phi(\tau-\sigma)f(\sigma)\| \leqslant c\|f(\sigma)\|.$$

Vu (1), la fonction $\Phi(\tau-\sigma)f(\sigma)$ est donc intégrable sur Q.

En vertu du théorème de Fubini, on peut écrire pour tout $t \in R^+$

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_0^\tau \Phi(\tau-\sigma)f(\sigma)\,d\sigma\,d\tau &= \int_Q \Phi(\tau-\sigma)f(\sigma)\,d\sigma\,d\tau \\ &= \int_0^t\int_\sigma^\tau \Phi(\tau-\sigma)f(\sigma)\,d\tau\,d\sigma = \int_0^t\Big(\int_0^{t-\sigma} \Phi(\tau)f(\sigma)\,d\tau\Big)d\sigma,\end{aligned}$$

ce qui est la première ligne de (4). La second ligne de (4) se démontre de la même façon. Enfin, l'identité

$$\int_0^t\Big(\int_0^\tau \Phi(\tau-\sigma)f(\sigma)\,d\sigma\Big)d\tau = \int_0^t\Big(\int_0^\tau \Phi(\sigma)f(\tau-\sigma)\,d\sigma\Big)d\tau$$

est triviale.

2. HYPOTHÈSE PRINCIPALE

2.1. Admettons désormais qu'un opérateur $A \in \mathfrak{L}^+(E)$ et deux nombres constants $M \geqslant 0$ et $\omega \geqslant 0$ sont donnés, tels que

(I) l'opérateur A est densement défini,

(II) l'opérateur $\lambda^2 I + A$ est biunivoque et on a

$$(\lambda^2 I + A)^{-1} \in \mathfrak{L}(E) \quad \text{pour tout } \lambda > \omega,$$

(III) on a

$$\left\|\frac{d^p}{d\lambda^p}(\lambda^2 I + A)^{-1}\right\| \leqslant M(-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{\lambda^2-\omega^2}$$

pour tout $\lambda > \omega$ et tout $p = 0, 1, \ldots$

2.2. PROPOSITION. *L'hypothèse* 2.1 *de* [6] *entraîne l'hypothèse* 2.1.

La démonstration est simple à l'aide de la formule de Leibniz (voir 1.2 de [6]) et du lemme 1.2 de la communication présente.

2.3. PROPOSITION. *Il existe une norme* $|||\cdot|||$ *sur* E *telle que*

(1) $$\|x\| \leqslant |||x||| \leqslant M\|x\| \quad \textit{pour tout } x \in E,$$

(2) $$\left|\left|\left|\frac{d^p}{d\lambda^p}(\lambda^2 I + A)^{-1}\right|\right|\right| \leqslant (-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{\lambda^2-\omega^2}$$

pour tout $\lambda > \omega$ *et tout* $p = 0, 1, \ldots$

Démonstration. Le théorème 9.1 (voir Appendice, p. 156) garantit l'existence d'une fonction $\mathscr{D}\in R^+\to\mathfrak{L}(E)$ ayant les propriétés (A)-(E) et qui va nous servir pour construire la norme $|||\cdot|||$. Posons pour tout $x\in E$

$$|||x||| = \sup_{s\in R^+}\Big[\int_0^s \operatorname{coh}(\omega\sigma)\,d\sigma\Big]^{-1}\cdot\|\mathscr{D}(s)x\|. \tag{3}$$

Il est manifeste d'après (B) et (D) que l'on obtient ainsi une norme sur E qui satisfait à (1). En vertu de (A), deux cas sont possibles pour tout $t\in R^+$ et $x\in E$:

$$|||x||| = \sup_{0<s<t}\Big[\int_0^s \operatorname{coh}(\omega\sigma)\,d\sigma\Big]^{-1}\cdot\|\mathscr{D}(s)x\|, \tag{4}$$

$$|||x||| = \sup_{s>t}\Big[\int_0^s \operatorname{coh}(\omega\sigma)\,d\sigma\Big]^{-1}\cdot\|\mathscr{D}(s)x\|. \tag{5}$$

Soit donc $t\in R^+$. Il s'agit de montrer que

$$|||\mathscr{D}(t)||| \leqslant \int_0^t \operatorname{coh}(\omega\tau)\,d\tau. \tag{6}$$

Envisageons d'abord le cas (4). On a

$$\|\mathscr{D}(s)x\| \leqslant \int_0^s \operatorname{coh}(\omega\sigma)\,d\sigma\,|||x|||$$

pour tout $x\in E$ et $s\in R^+$ d'après la définition (3) d'où en vertu de (C)

$$\begin{aligned} |||\mathscr{D}(t)x||| &= \sup_{0<s<t}\Big[\int_0^s \operatorname{coh}(\omega\sigma)\,d\sigma\Big]^{-1}\|\mathscr{D}(s)\mathscr{D}(t)x\| \\ &\leqslant \sup_{0<s<t}\Big[\int_0^s \operatorname{coh}(\omega\sigma)\,d\sigma\Big]^{-1}\cdot\frac{1}{2}\Big\|\int_{t-s}^{t+s}\mathscr{D}(\tau)x\,d\tau\Big\| \\ &\leqslant \sup_{0<s<t}\Big[\int_0^s \operatorname{coh}(\omega\sigma)\,d\sigma\Big]^{-1}\cdot\frac{1}{2}\int_{t-s}^{t+s}\Big(\int_0^\tau \operatorname{coh}(\omega\sigma)\,d\sigma\Big)d\tau\,|||x|||, \end{aligned} \tag{7}$$

et d'après l'identité classique de d'Alembert pour le cosinus hyperbolique,

$$\frac{1}{2}\int_{t-s}^{t+s}\int_0^\tau \operatorname{coh}(\omega\sigma)\,d\sigma\,d\tau = \int_0^t \operatorname{coh}(\omega\tau)\,d\tau\cdot\int_0^s \operatorname{coh}(\omega\sigma)\,d\sigma. \tag{8}$$

L'inégalité (6) s'ensuit de (7) et (8) dans le cas (4) considéré.

Dans le cas (5), le procédé est tout à fait analogue.

Ayant établi l'inégalité (6), on peut utiliser la propriété (E), ce qui entraîne (2) immédiatement.

2.4. Proposition. *On a pour tout $\lambda > \omega^2$ et $p = 0, 1, \ldots$*

$$\left\| \frac{d^p}{d\lambda^p} (\lambda I + A)^{-1} \right\| \leqslant M(-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p} \frac{1}{\lambda - \omega^2}. \tag{1}$$

Démonstration. Il s'ensuit de la proposition 2.3 que

$$|||(\mu^2 I + A)^{-1}||| \leqslant \frac{1}{\mu^2 - \omega^2} \quad \text{pour } \mu > \omega,$$

c'est-à-dire que

$$|||(\lambda I + A)^{-1}||| \leqslant \frac{1}{\lambda - \omega^2} \quad \text{pour } \lambda > \omega^2, \tag{2}$$

où $|||\cdot|||$ est la norme construite dans 2.3. On sait que

$$\frac{d^p}{d\lambda^p} (\lambda I + A)^{-1} = (-1)^p (\lambda I + A)^{-(p+1)}, \tag{3}$$

$$\frac{d^p}{d\lambda^p} \frac{1}{\lambda - \omega^2} = (-1)^p \frac{1}{(\lambda - \omega^2)^{p+1}} \tag{4}$$

pour $\lambda > \omega^2$. Par conséquent, (1) résulte de (2)-(4) en vertu du lemme 1.9 de [6].

3. ESTIMATIONS AUXILIAIRES

3.1. Lemme. *On a pour tous $\varepsilon > 0$, $\lambda > \omega/\sqrt{\varepsilon}$, $\sigma \geqslant 0$ et $p = 0, 1, \ldots$*

$$\left|\left|\left| \frac{d^p}{d\lambda^p} [\varepsilon(\lambda + \sigma)^2 I + A]^{-1} \right|\right|\right| \leqslant (-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p} \frac{1}{\varepsilon(\lambda + \sigma)^2 - \omega^2}. \tag{1}$$

La démonstration coïncide avec celle de l'inégalité 3.1 (2) de mon travail [6], cette formule ne dépendant que de l'inégalité 2.3 (1) de [6] qui est identique à l'inégalité 2.3 (2) du travail présent.

3.2. Lemme. *On a pour tous $\varepsilon > 0$, $\sigma \geqslant 0$, $\lambda > \sqrt{\sigma/2\varepsilon} + \omega/\sqrt{\varepsilon}$ et $p = 0, 1, \ldots$*

$$\left|\left|\left| \frac{d^p}{d\lambda^p} \left(\varepsilon(\lambda + \sigma)^2 I + A - \frac{\sigma}{2} I \right)^{-1} \right|\right|\right| \leqslant (-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p} \frac{1}{\varepsilon(\lambda + \sigma)^2 - \omega^2 - \dfrac{\sigma}{2}}. \tag{1}$$

Pour la démonstration, voir celle de 3.4 (2) dans [6] et la remarque qui vient d'être faite au sujet du lemme 3.1 qui précède.

3.3. PROPOSITION. *On a pour tous $\lambda > \omega^2$, $\varepsilon > 0$ et $p = 0, 1, \ldots$*

$$\left\| \frac{d^p}{d\lambda^p}\left(\lambda^2 I + \lambda \frac{1}{\varepsilon} I + \frac{1}{\varepsilon} A\right)^{-1} \right\| \leqslant \varepsilon(-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p} \frac{M}{\lambda - \omega^2}. \tag{1}$$

Pour la démonstration, on procédera comme dans celle de 3.5 (2) de [6]; voir aussi la remarque au lemme 3.1.

3.4. PROPOSITION. *On a pour tous $x \in \mathfrak{D}(A^2)$, $\lambda > \omega^2$, $\varepsilon > 0$ et $p = 0, 1, \ldots$*

$$\left\| \frac{d^p}{d\lambda^p} \frac{1}{\varepsilon}\left(\lambda^2 I + \lambda \frac{1}{\varepsilon} I + \frac{1}{\varepsilon} A\right)^{-1} x - \frac{d^p}{d\lambda^p} (\lambda I + A)^{-1} x \right\| \tag{1}$$

$$\leqslant (-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p} \left[\frac{1}{\lambda + \frac{1}{\varepsilon}} \|x\| + \varepsilon \frac{2M}{\lambda - \omega^2} \|Ax\| + \varepsilon \frac{M^2}{(\lambda - \omega^2)^2} \|A^2 x\| \right].$$

Démonstration. On peut écrire

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(\lambda^2 I + \lambda \frac{1}{\varepsilon} I + \frac{1}{\varepsilon} A\right)^{-1} = (\varepsilon\lambda^2 I + \lambda I + A)^{-1}, \tag{2}$$

d'où en vertu de 1.10 de [6]

$$(\varepsilon\lambda^2 I + \lambda I + A)^{-1} - (\lambda I + A)^{-1} = \varepsilon\lambda^2 (\varepsilon\lambda^2 I + \lambda I + A)^{-1} (\lambda I + A)^{-1}. \tag{3}$$

En se servant du lemme 1.11 de [6], on déduit de (2) et (3)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\varepsilon}\left(\lambda^2 I + \lambda \frac{1}{\varepsilon} I + \frac{1}{\varepsilon} A\right)^{-1} x - (\lambda I + A)^{-1} x \\
&= (\varepsilon\lambda^2 I + \lambda I + A)^{-1} x - (\lambda I + A)^{-1} x \\
&= \left[((\varepsilon\lambda^2 + \lambda) I + A)^{-1} x - \frac{1}{\varepsilon\lambda^2 + \lambda} x \right] - \\
&\quad - \left[(\lambda I + A)^{-1} x - \frac{1}{\lambda} x \right] + \left[\frac{1}{\varepsilon\lambda^2 + \lambda} - \frac{1}{\lambda} \right] x \\
&= -\frac{1}{\varepsilon\lambda^2 + \lambda} (\varepsilon\lambda^2 I + \lambda I + A)^{-1} A x + \frac{1}{\lambda} (\lambda I + A)^{-1} A x - \frac{1}{\lambda + 1/\varepsilon} x \\
&= -\frac{1}{\lambda + 1/\varepsilon} x - \left(\frac{1}{\varepsilon\lambda^2 + \lambda} - \frac{1}{\lambda} \right) (\lambda I + A)^{-1} A x - \\
&\quad - \frac{1}{\varepsilon\lambda^2 + \lambda} [(\varepsilon\lambda^2 I + \lambda I + A)^{-1} A x - (\lambda I + A)^{-1} A x]
\end{aligned} \tag{4}$$

$$= -\frac{1}{\lambda+1/\varepsilon}\,x+\frac{1}{\lambda+1/\varepsilon}\,(\lambda I+A)^{-1}Ax+$$

$$+\frac{\lambda}{\lambda+1/\varepsilon}\,(\varepsilon\lambda^2 I+\lambda I+A)^{-1}(\lambda I+A)^{-1}Ax$$

$$= -\frac{1}{\lambda+1/\varepsilon}\,x+\frac{1}{\lambda+1/\varepsilon}\,(\lambda I+A)^{-1}Ax+$$

$$+\frac{1}{\lambda+1/\varepsilon}\,(\varepsilon\lambda^2 I+\lambda I+A)^{-1}[Ax-(\lambda I+A)^{-1}A^2x]$$

$$= -\frac{1}{\lambda+1/\varepsilon}\,x+\frac{1}{\lambda+1/\varepsilon}\,(\lambda I+A)^{-1}Ax+$$

$$+\frac{1}{\lambda+1/\varepsilon}\,(\varepsilon\lambda^2 I+\lambda I+A)^{-1}Ax-$$

$$-\frac{1}{\lambda+1/\varepsilon}\,(\varepsilon\lambda^2 I+\lambda I+A)^{-1}(\lambda I+A)^{-1}A^2x.$$

Il s'ensuit de 2.4 (1), 3.4 (2) (il manque un ε après le signe d'inégalité) et 3.3 (1) à l'aide de la formule de Leibniz (voir 1.2 de [6]) que l'on a pour $\varepsilon > 0$, $\lambda > \omega^2$ et $p = 0, 1, \ldots$

$$\left\|\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{\lambda+1/\varepsilon}\,(\lambda I+A)^{-1}\right\| \leqslant (-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\left(\frac{1}{\lambda+1/\varepsilon}\,\frac{M}{\lambda-\omega^2}\right), \tag{5}$$

$$\left\|\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{\lambda+1/\varepsilon}\,(\varepsilon\lambda^2 I+\lambda I+A)^{-1}\right\| \leqslant (-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\left(\frac{1}{\lambda+1/\varepsilon}\,\frac{M}{\lambda-\omega^2}\right), \tag{6}$$

$$\left\|\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{\lambda+1/\varepsilon}\,(\varepsilon\lambda^2 I+\lambda I+A)^{-1}(\lambda I+A)^{-1}\right\| \leqslant (-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\left(\frac{1}{\lambda+1/\varepsilon}\,\frac{M^2}{(\lambda-\omega^2)^2}\right). \tag{7}$$

Mais on a pour tout $\varepsilon > 0$, $\lambda > \omega^2$ et $p = 0, 1, \ldots$ d'après 1.2 et 1.3

$$(-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{\lambda+1/\varepsilon}\,\frac{1}{\lambda-\omega^2} \leqslant \varepsilon(-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{\lambda-\omega^2}, \tag{8}$$

$$(-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{\lambda+1/\varepsilon}\,\frac{1}{(\lambda-\omega^2)^2} \leqslant \varepsilon(-1)^p\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{(\lambda-\omega^2)^2}. \tag{9}$$

Les inégalités (5)-(9) et l'identité (4) entraînent (1) immédiatement.

3.5. PROPOSITION. *Il existe pour tous $x \in E$ et $\delta > 0$ un $\varepsilon_0 > 0$ tel que, quels que soient $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $\lambda > \omega^2$ et $p = 0, 1, \ldots$, on a*

$$(1)\quad \left\| \frac{d^p}{d\lambda^p} \frac{1}{\varepsilon} \left(\lambda^2 I + \lambda \frac{1}{\varepsilon} I + \frac{1}{\varepsilon} A \right)^{-1} x - \frac{d^p}{d\lambda^p} (\lambda I + A)^{-1} x \right\|$$
$$\leqslant (-1)^{-p} \frac{d^p}{d\lambda^p} \frac{1}{\lambda + 1/\varepsilon} \|x\| + \delta \frac{d^p}{d\lambda^p} \left(\frac{1}{\lambda - \omega^2} + \frac{1}{(\lambda - \omega^2)^2} \right).$$

Démonstration. $\mathfrak{D}(A^2)$ étant dense, il existe une suite $\bar{x}_k \in \mathfrak{D}(A^2)$, où $k = 1, 2, \ldots$, telle que $\bar{x}_k \to x$ avec $k \to \infty$. Soit

$$x_k = \begin{cases} 0, & \text{si } \bar{x}_k = 0, \\ \|x\| \cdot \|\bar{x}_k\|^{-1} \cdot \bar{x}_k, & \text{si } \bar{x}_k \neq 0. \end{cases}$$

Il est facile de voir que pour tout $k = 1, 2, \ldots$

$$(1)\quad x_k \in \mathfrak{D}(A^2),$$

$$(2)\quad \|x_k\| \leqslant \|x\|,$$

$$(3)\quad x_k \to x \quad \text{lorsque } k \to \infty.$$

Il existe en vertu de (3) et 3.3 un k_1 tel que

$$(4)\quad \left\| \frac{d^p}{d\lambda^p} \frac{1}{\varepsilon} \left(\lambda^2 I + \lambda \frac{1}{\varepsilon} I + \frac{1}{\varepsilon} A \right)^{-1} (x - x_k) \right\| \leqslant \frac{\delta}{3} (-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p} \frac{1}{\lambda - \omega^2}$$

pour tous $\varepsilon > 0$, $\lambda > \omega^2$, $p = 0, 1, \ldots$ et $k \geqslant k_1$.

En vertu de (3) et 2.4, il existe en outre un k_2 tel que

$$(5)\quad \left\| \frac{d^p}{d\lambda^p} (\lambda I + A)^{-1} (x - x_k) \right\| \leqslant \frac{\delta}{3} (-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p} \frac{1}{\lambda - \omega^2}$$

pour tous $\lambda > \omega^2$, $p = 0, 1, \ldots$ et $k \geqslant k_2$.

Soit $k_0 = \max(k_1, k_2)$.

Vu que $x_{k_0} \in \mathfrak{D}(A^2)$ d'après (1), il résulte de 3.4 que

$$(6)\quad \left\| \frac{d^p}{d\lambda^p} \frac{1}{\varepsilon} \left(\lambda^2 I + \lambda \frac{1}{\varepsilon} I + \frac{1}{\varepsilon} A \right)^{-1} x_{k_0} - \frac{d^p}{d\lambda^p} (\lambda I + A)^{-1} x_{k_0} \right\|$$
$$\leqslant (-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p} \left[\frac{1}{\lambda + 1/\varepsilon} \|x_{k_0}\| + \varepsilon \frac{2M}{\lambda - \omega^2} \|A x_{k_0}\| + \varepsilon \frac{M^2}{(\lambda - \omega^2)^2} \|A^2 x_{k_0}\| \right]$$

pour tous $\varepsilon > 0$, $\lambda > \omega^2$ et $p = 0, 1, \ldots$

On a en vertu de (2)

$$(7)\quad \|x_{k_0}\| \leqslant \|x\|.$$

Considérons un $\varepsilon_0 > 0$ tel que l'on ait pour tout $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$

$$\varepsilon \|Ax_{k_0}\| \leqslant \frac{\delta}{3} \quad \text{et} \quad \varepsilon\|A^2x_{k_0}\| \leqslant \delta, \tag{8}$$

ce qui est toujours possible. On conclut de (7) et (8) d'après (6) que

$$\left\| \frac{d^p}{d\lambda^p} \frac{1}{\varepsilon}\left(\lambda^2 I + \lambda \frac{1}{\varepsilon} I + \frac{1}{\varepsilon} A\right)^{-1} x_{k_0} - \frac{d^p}{d\lambda^p} (\lambda I + A)^{-1} x_{k_0} \right\| \tag{9}$$

$$\leqslant (-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p} \frac{1}{\lambda + 1/\varepsilon} \|x\| + \frac{\delta}{3} (-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p} \frac{1}{\lambda - \omega^2} + \delta(-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p} \frac{1}{(\lambda - \omega^2)^2},$$

quels que soient $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $\lambda > \omega^2$ et $p = 0, 1, \ldots$

Enfin, l'inégalité suivante est manifeste:

$$\left\| \frac{d^p}{d\lambda^p} \frac{1}{\varepsilon}\left(\lambda^2 I + \lambda \frac{1}{\varepsilon} I + \frac{1}{\varepsilon} A\right) x - \frac{d^p}{d\lambda^p} (\lambda I + A)^{-1} x \right\| \tag{10}$$

$$\leqslant \left\| \frac{d^p}{d\lambda^p} \frac{1}{\varepsilon}\left(\lambda^2 I + \lambda \frac{1}{\varepsilon} I + \frac{1}{\varepsilon} A\right) x_{k_0} - \frac{d^p}{d\lambda^p} (\lambda I + A)^{-1} x_{k_0} \right\| +$$

$$+ \left\| \frac{d^p}{d\lambda^p} \frac{1}{\varepsilon}\left(\lambda^2 I + \lambda \frac{1}{\varepsilon} I + \frac{1}{\varepsilon} A\right) (x - x_{k_0}) \right\| + \left\| \frac{d^p}{d\lambda^p} (\lambda I + A)^{-1} (x - x_{k_0}) \right\|$$

pour tous $\varepsilon > 0$, $\lambda > \omega^2$ et $p = 0, 1, \ldots$

Ceci étant, l'énoncé à démontrer résulte de (10) et (9) en appliquant (4) et (5) avec $k = k_0$.

4. EXISTENCE ET CONVERGENCE DES SOLUTIONS DU PROBLÈME HOMOGÈNE

4.1. THÉORÈME D'EXISTENCE. *Il existe pour tout $x \in \mathfrak{D}(A)$ et tout $\varepsilon > 0$ une fonction unique $u_\varepsilon \in R^+ \to E$ satisfaisant aux conditions suivantes:*

(a) *u_ε est deux fois continûment dérivable sur R^+,*

(b) *$u_\varepsilon(t) \in \mathfrak{D}(A)$ pour tout $t \in R^+$,*

(c) *$\varepsilon u_\varepsilon''(t) + u_\varepsilon'(t) + Au_\varepsilon(t) = 0$ pour tout $t \in R^+$,*

(d) *$u_\varepsilon(0_+) = 0$ et $u_\varepsilon'(0_+) = x$.*

En outre, les conditions (a)-(d) *étant satisfaites pour un $x \in \mathfrak{D}(A)$, un $\varepsilon > 0$ et une fonction $u_\varepsilon \in R^+ \to E$, on a*

$$\|u_\varepsilon(t)\| \leqslant \varepsilon M e^{\omega^2 t} \|x\| \quad \textit{pour tout } t \in R^+ \tag{1}$$

et, de plus, $x \in \mathfrak{D}(A)$ entraîne

$$\|u_\varepsilon'(t)\| \leqslant e^{-t/\varepsilon}\|x\| + Mte^{\omega^2 t}\|Ax\|. \tag{2}$$

La démonstration des propriétés (a)-(d) se trouve dans mon travail [5]. Reste à établir (1) et (2). Fixons un $\varepsilon > 0$.

D'après le théorème d'existence du travail précité [5], il existe aussi deux constantes K et $\varkappa$ telles que

(3) $$\|u_\varepsilon(t)\| \leqslant Ke^{\varkappa t}\|x\| \quad \text{pour tout } t \in R^+.$$

L'opérateur A étant fermé, on déduit aisément de (a)-(c) et (3) que

(4) $$\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}u_\varepsilon(\tau)\,d\tau = \left(\lambda^2 I + \lambda\frac{1}{\varepsilon}I + \frac{1}{\varepsilon}A\right)^{-1}x$$

pour tout $\lambda > \varkappa$ et $\lambda > \omega^2$.

L'inégalité (1) en résulte en vertu de 3.3 et 1.5.

D'autre part, on a pour $\lambda > \varkappa$ et $\lambda > \omega^2$

(5) $$\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}u_\varepsilon'(\tau)\,d\tau = \lambda\left(\lambda^2 I + \lambda\frac{1}{\varepsilon}I + \frac{1}{\varepsilon}A\right)^{-1}x$$

$$= \left(\lambda + \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1}\left(\lambda^2 + \lambda\frac{1}{\varepsilon}\right)\left(\lambda^2 I + \lambda\frac{1}{\varepsilon}I + \frac{1}{\varepsilon}A\right)^{-1}x$$

$$= \left(\lambda + \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1}x - \left(\lambda + \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1}\frac{1}{\varepsilon}\left(\lambda^2 I + \lambda\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}A\right)^{-1}Ax.$$

L'inégalité (2) en résulte en vertu de 3.3 et 1.5 à l'aide de la formule de Leibniz (voir 1.2 de [6]).

4.2. Théorème d'existence. *Il existe pour tout $x \in E$ et tout $\varepsilon > 0$ une fonction unique $u_\varepsilon \in R^+ \to E$ satisfaisant aux conditions suivantes:*

(a) *u_ε est continue sur R^+ et bornée sur l'intervalle* $(0, 1)$,

(b) $\int_0^t\int_0^\tau u_\varepsilon(\sigma)\,d\sigma\,d\tau \in \mathfrak{D}(A)$ *pour tout* $t \in R^+$,

(c) $\varepsilon u_\varepsilon(t) + \int_0^t u_\varepsilon(\sigma)\,d\sigma + A\int_0^t\int_0^\tau u_\varepsilon(\sigma)\,d\sigma\,d\tau = \varepsilon tx$ *pour tout* $t \in R^+$.

En outre, les conditions (a)-(c) *étant satisfaites pour un $x \in E$, un $\varepsilon > 0$ et une fonction $u_\varepsilon \in R^+ \to E$, on a*

(1) $$\|u_\varepsilon(t)\| \leqslant \varepsilon Me^{\omega^2 t}\|x\| \quad \textit{pour tout } t \in R^+.$$

La démonstration résulte aussitôt de 4.1 vu que l'opérateur A est fermé.

4.3. Proposition. *Les conditions* (a)-(d) *de* 4.1 *entraînent, pour tous $\varepsilon > 0$, $x \in E$ et $u_\varepsilon \in R^+ \to E$, les conditions* (a)-(c) *de* 4.2.

La démonstration résulte immédiatement de 4.1, l'opérateur A étant fermé.

4.4. THÉORÈME D'ÉCART. *Pour tout* $x \in \mathfrak{D}(A^2)$, *toute famille de fonctions* $u_\varepsilon \in R^+ \to E$ *où* $\varepsilon > 0$ *et toute fonction* $u \in R^+ \to E$ *assujettis aux conditions* (a)-(d) *et* (1) *du théorème* 4.1 *qui précède et à celles de* 4.2 *de* [6], *on a*

$$(1) \qquad \left\| \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon(t) - u(t) \right\| \leqslant e^{-t/\varepsilon}\|x\| + 2\varepsilon M e^{\omega^2 t}\|Ax\| + \varepsilon M^2 t e^{\omega^2 t}\|A^2 x\|,$$

quels que soient $t \in R^+$ *et* $\varepsilon > 0$.

Démonstration. L'opérateur A étant fermé, on conclut sans peine que, pour $\varepsilon > 0$ et $\lambda > \omega^2$,

$$(2) \qquad \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} u_\varepsilon(\tau)\,d\tau = \left(\lambda^2 I + \lambda \frac{1}{\varepsilon} I + \frac{1}{\varepsilon} A\right)^{-1} x,$$

$$(3) \qquad \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} u(\tau)\,d\tau = (\lambda I + A)^{-1} x.$$

Ces égalités entraînent en vertu de 3.4 l'inégalité

$$(4) \qquad \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\tau^p \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon(\tau)\,d\tau - \int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\tau^p u(\tau)\,d\tau \right\|$$
$$\leqslant \int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\tau^p e^{-\tau/\varepsilon}\,d\tau\,\|x\| + 2\varepsilon M \int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\tau^p e^{\omega^2\tau}\,d\tau\,\|Ax\| +$$
$$+ \varepsilon M^2 \int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\tau^{p+1} e^{\omega^2\tau}\,d\tau\,\|A^2 x\|$$

pour tous $\varepsilon > 0$, $\lambda > \omega^2$ et $p = 0, 1, \ldots$ Il reste à se servir de 1.5 et de l'inégalité (4).

4.5. THÉORÈME DE CONVERGENCE. *Pour tout* $x \in E$, *toute famille de fonctions* $u_\varepsilon \in R^+ \to E$ *où* $\varepsilon > 0$ *et toute fonction* $u \in R^+ \to E$, *assujettis aux conditions* (a)-(c) *et* (1) *du théorème* 4.2 *qui précède et à celles de* 4.5 *de* [6], *il existe pour tout* $\delta > 0$ *un* $\varepsilon_0 > 0$ *tel que*

$$(1) \qquad \left\| \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon(t) - u(t) \right\| \leqslant e^{-t/\varepsilon}\|x\| + \delta(e^{\omega^2 t} + t e^{\omega^2 t}),$$

quels que soient $t \in R^+$ *et* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

Démonstration. Il est aisé de vérifier que les identités (2) et (3) de 4.4 sont satisfaites pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\lambda > \omega^2$. En vertu de ces identités, on déduit de 3.5 l'existence d'un $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$(2) \qquad \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\tau^p \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon(\tau)\,d\tau - \int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\tau^p u(\tau)\,d\tau \right\|$$
$$\leqslant \int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\tau^p e^{-\tau/\varepsilon}\,d\tau\,\|x\| + \delta\left(\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\tau^p e^{\omega^2\tau}\,d\tau + \int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\tau^{p+1} e^{\omega^2\tau}\,d\tau\right)$$

pour tous $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $\lambda > \omega^2$ et $p = 0, 1, \ldots$

L'inégalité (1) résulte de (2) en vertu de 1.5.

4.6. Comparons maintenant les résultats de la section 4 de [6] et du travail présent. Supposons donc pour ce moment qu'un opérateur $A \in \mathfrak{L}^+(E)$ satisfasse à l'hypothèse 2.1 de [6].

Soient $x \in \mathfrak{D}(A^2)$, $u \in R^+ \to E$ une fonction assujettie aux conditions (a)-(d) de 4.2 de [6], $\bar{u}_\varepsilon \in R^+ \to E$, $\bar{\bar{u}}_\varepsilon \in R^+ \to E$, où $\varepsilon > 0$, des familles de fonctions assujetties aux conditions (a)-(d) de 4.1 de [6] avec $y = 0$ et de 4.1 du travail présent. Nous avons pour $t > 0$ et $\varepsilon > 0$

$$(1) \qquad \|\bar{u}_\varepsilon(t) - u(t)\| \leqslant \varepsilon M e^{\omega^2 t}\|Ax\| + \varepsilon M^2 t e^{\omega^2 t}\|A^2 x\|,$$

$$(2) \qquad \left\| \frac{1}{\varepsilon}\bar{\bar{u}}_\varepsilon(t) - u(t) \right\| \leqslant e^{-t/\varepsilon}\|x\| + 2\varepsilon M e^{\omega^2 t}\|Ax\| + \varepsilon M^2 t e^{\omega^2 t}\|A^2 x\|.$$

L'importance de l'inegalité (2) provient de son application au problème non-homogène avec petit paramètre qui sera examiné dans la section suivante.

5. *EXISTENCE ET CONVERGENCE DE SOLUTIONS DU PROBLÈME NON-HOMOGÈNE*

5.1. PROPOSITION. *Il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une fonction unique $\mathscr{H}_\varepsilon \in R^+ \to \mathfrak{L}(E)$ satisfaisant pour tout $x \in E$ et tout $t \in R^+$ aux conditions:*

(a) *$\mathscr{H}_\varepsilon(\cdot)x$ est continue sur R^+ et bornée sur l'intervalle $(0,1)$,*

(b) $\int_0^t \int_0^\tau \mathscr{H}_\varepsilon(\sigma) x \, d\sigma \, d\tau \in \mathfrak{D}(A)$,

(c) $\varepsilon \mathscr{H}_\varepsilon(t)x + \int_0^t \mathscr{H}_\varepsilon(\tau) x \, d\tau + A \int_0^t \int_0^\tau \mathscr{H}_\varepsilon(\sigma) x \, d\sigma \, d\tau = \varepsilon t x.$

En outre,

$$(1) \qquad \|\mathscr{H}_\varepsilon(t)\| \leqslant \varepsilon M e^{\omega^2 t} \quad \textit{pour tout } t \in R^+ \textit{ et tout } \varepsilon > 0.$$

C'est une simple conséquence de 4.2.

Les trois propositions 5.2-5.4 qui suivent seront démontrées simultanément.

5.2. THÉORÈME D'EXISTENCE. *Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute fonction $h \in R^+ \to E$ satisfaisant aux conditions:*

(I) *h est continue sur R^+ et intégrable sur $(0,1)$,*

(II) *$h(t) \in \mathfrak{D}(A)$ pour tout $t \in R^+$,*

(III) *la fonction $t \to Ah(t)$, où $t \in R^+$, est intégrable sur $(0,a)$ pour tout $a > 0$,* *la fonction* $u_\varepsilon \in R^+ \to E$ *définie par l'égalité*

$$[*] \qquad u_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mathscr{H}_\varepsilon(t-\tau)h(\tau)\,d\tau \qquad \textit{pour } t\in R^+$$

satisfait aux conditions:

(a) u_ε *est deux fois continûment dérivable sur* R^+,

(b) $u_\varepsilon(0_+) = u'_\varepsilon(0_+) = 0$,

(c) $u_\varepsilon(t)\in \mathfrak{D}(A)$ *pour tout* $t\in R^+$,

(d) $\varepsilon u''_\varepsilon(t)+u'_\varepsilon(t)+Au_\varepsilon(t) = h(t)$ *pour tout* $t\in R^+$.

En outre,

$$(1) \qquad \|u_\varepsilon(t)\| \leqslant Me^{\omega^2 t}\int_0^t \|h(\tau)\|\,d\tau \qquad \textit{pour tout } t\in R^+.$$

5.3. Théorème d'existence. *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *et pour toute fonction* $h\in R^+ \to E$ *assujettie à la condition*

(I) h *est intégrable sur* $(0, a)$ *pour tout* $a > 0$,

la fonction $u_\varepsilon \in R^+ \to E$ *définie par l'égalité* [*] *satisfait aux conditions:*

(a) u_ε *est continue sur* R^+ *et bornée sur* $(0,1)$,

(b) $\int_0^t\int_0^\tau u_\varepsilon(\sigma)\,d\sigma\,d\tau \in \mathfrak{D}(A)$ *pour tout* $t\in R^+$,

(c) $\varepsilon u_\varepsilon(t)+\int_0^t u_\varepsilon(\tau)\,d\tau+A\int_0^t\int_0^\tau u_\varepsilon(\sigma)\,d\sigma\,d\tau = \int_0^t\int_0^\tau h(\sigma)\,d\sigma\,d\tau$ *pour tout* $t\in R^+$.

On a en outre l'inégalité (1) *de* 5.2.

5.4. Proposition. *Pour tous* $\varepsilon > 0$, $h\in R^+ \to E$ *et* $u_\varepsilon \to R^+ \to E$ *satisfaisant aux conditions* (I) *de* 5.3 *et* (a)-(d) *de* 5.2, *les conditions* (a)-(c) *de* 5.3 *se trouvent également satisfaites.*

La proposition 5.4 est manifeste, vu que l'opérateur A est fermé. Pour établir la proposition 5.3, soient $\varepsilon > 0$ et $h\in R^+ \to E$ assujettis à la condition (I) de 5.3 et u_ε la fonction définie par l'égalité [*]. Alors la condition (a) de 5.3 résulte aisément de [*] et 5.1. En vertu de 1.6, on a pour $t\in R^+$

$$(1) \qquad \int_0^t u_\varepsilon(\tau)\,d\tau = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\int_0^{t-\tau} \mathscr{H}_\varepsilon(\sigma)h(\tau)\,d\sigma\,d\tau,$$

$$(2) \qquad \int_0^t\int_0^\tau u_\varepsilon(\sigma)\,d\sigma\,d\tau = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\int_0^{t-\tau}\int_0^\sigma \mathscr{H}_\varepsilon(\varrho)h(\tau)\,d\varrho\,d\sigma\,d\tau.$$

Il s'ensuit de 5.1 que, pour tout $t \in R^+$ et tout $0 < \tau < t$,

$$\int_0^{t-\tau}\int_0^{\sigma} \mathscr{H}_\varepsilon(\varrho)h(\tau)\,d\varrho\, d\sigma \in \mathfrak{D}(A), \tag{3}$$

$$\varepsilon\mathscr{H}_\varepsilon(t-\tau)h(\tau)+\int_0^{t-\tau} \mathscr{H}(\sigma)h(\tau)\,d\sigma + A\int_0^{t-\tau}\int_0^{\sigma} \mathscr{H}(\varrho)h(\tau)\,d\varrho\, d\sigma = \varepsilon(t-\tau)h(\tau). \tag{4}$$

L'opérateur A étant fermé, on conclut de (1)-(4) que pour tout $t \in R^+$

$$\int_0^{t}\int_0^{\tau} u_\varepsilon(\sigma)\,d\sigma\, d\tau \in \mathfrak{D}(A), \tag{5}$$

$$\varepsilon u_\varepsilon(t)+\int_0^{t} u_\varepsilon(\tau)\,d\tau + A\int_0^{t}\int_0^{\tau} u_\varepsilon(\sigma)\,d\sigma\, d\tau = \int_0^{t}(t-\tau)h(\tau)\,d\tau = \int_0^{t}\int_0^{\tau} h(\sigma)\,d\sigma\, d\tau. \tag{6}$$

Mais (5) et (6) coïncident avec (b) et (c) de 5.3 respectivement. L'inégalité (1) de 5.2 résulte aussitôt de [*] et de la proposition 5.1, ce qui achève la démonstration de 5.3.

Reste à établir 5.2. Posons pour $t \in R^+$ et $\varepsilon > 0$

$$g_\varepsilon(t) = -\frac{1}{\varepsilon}\, e^{-t/\varepsilon}\int_0^{t} e^{-\tau/\varepsilon} h(\tau)\,d\tau + h(t). \tag{7}$$

On vérifie aisément en intégrant par parties que

$$\varepsilon g_\varepsilon(t)+\int_0^{t} g_\varepsilon(\tau)\,d\tau = h(t) \qquad \text{pour tout } t \in R^+ \text{ et } \varepsilon > 0. \tag{8}$$

Il s'ensuit de la condition (I) de 5.2 que

(9) la fonction g_ε est continue sur R^+ et bornée sur $(0, 1)$.

L'opérateur A étant fermé, on déduit aisément des conditions (I)-(III) de 5.2 que, quel que soit $\varepsilon > 0$,

$$g_\varepsilon(t) \in \mathfrak{D}(A) \qquad \text{pour tout } t \in R^+, \tag{10}$$

(11) la fonction $t \to A g_\varepsilon(t)$ où $t \in R^+$ est intégrable sur $(0, a)$ pour tout $a > 0$,

$$\int_0^{t}\int_0^{\tau} g_\varepsilon(\sigma)\,d\sigma\, d\tau \in \mathfrak{D}(A), \tag{12}$$

$$A\int_0^{t}\int_0^{\tau} g_\varepsilon(\sigma)\,d\sigma\, d\tau = \int_0^{t}\int_0^{\tau} A g_\varepsilon(\sigma)\,d\sigma\, d\tau \qquad \text{pour tout } t \in R^+. \tag{13}$$

Soit pour $t \in R^+$ et $\varepsilon > 0$

$$(14) \qquad v_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mathscr{H}_\varepsilon(t-\tau)Ag_\varepsilon(\tau)\,d\tau.$$

En vertu du théorème 5.3 qui vient d'être démontré,

(15) la fonction v_ε est continue sur R^+ et bornée sur $(0, 1)$,

$$(16) \qquad \int_0^t\int_0^\tau v_\varepsilon(\sigma)\,d\sigma\,d\tau \in \mathfrak{D}(A),$$

$$(17) \qquad \varepsilon v_\varepsilon(t) + \int_0^t v_\varepsilon(\sigma)\,d\sigma + A\int_0^t\int_0^\tau v_\varepsilon(\sigma)\,d\sigma\,d\tau = \int_0^t\int_0^\tau Ag_\varepsilon(\sigma)\,d\sigma\,d\tau,$$

quel que soit $t \in R^+$.

Posons à présent pour $t \in R^+$ et $\varepsilon > 0$

$$(18) \qquad w_\varepsilon(t) = -\int_0^t\int_0^\tau v_\varepsilon(\sigma)\,d\sigma\,d\tau + \int_0^t\int_0^\tau g_\varepsilon(\sigma)\,d\sigma\,d\tau.$$

D'après (9) et (15),

(19) la fonction w_ε est deux fois continûment dérivable sur R^+,

$$(20) \qquad w_\varepsilon(0_+) = w'_\varepsilon(0_+) = 0$$

et d'après (12) et (16),

$$(21) \qquad w_\varepsilon(t) \in \mathfrak{D}(A) \quad \text{pour tout } t \in R^+.$$

En appliquant successivement (19), (21), (17), (13), (8) et (18), on conclut que pour tout $t \in R^+$

$$(22) \qquad \varepsilon w''_\varepsilon(t) + w'_\varepsilon(t) + Aw_\varepsilon(t)$$

$$= -\varepsilon v_\varepsilon(t) + \varepsilon g_\varepsilon(t) - \int_0^t v_\varepsilon(\sigma)\,d\sigma + \int_0^t g_\varepsilon(\sigma)\,d\sigma - A\int_0^t\int_0^\tau v_\varepsilon(\sigma)\,d\sigma\,d\tau + A\int_0^t\int_0^\tau g_\varepsilon(\sigma)\,d\sigma\,d\tau$$

$$= \varepsilon g_\varepsilon(t) + \int_0^t g_\varepsilon(\sigma)\,d\sigma - \int_0^t\int_0^\tau Ag_\varepsilon(\sigma)\,d\sigma\,d\tau + A\int_0^t\int_0^\tau g_\varepsilon(\sigma)\,d\sigma\,d\tau = h(t).$$

Il résulte du théorème 5.3 que u_ε satisfait aux conditions (a)-(c) de 5.3. En outre, on conclut de (19)-(22) d'après 5.4 que la fonction w_ε satisfait également à ces conditions, écrites pour w_ε au lieu de u_ε. En vertu de 4.2 (unicité!), on a donc $u_\varepsilon = w_\varepsilon$ et les conditions (a)-(d) de 5.2 résultent de (19)-(22). Enfin l'inégalité (1) de 5.2 est une conséquence immédiate de (1) de 5.1, ce qui achève la démonstration de 5.2.

5.5. Proposition. *Il existe une fonction unique* $\mathscr{H} \in R^+ \to \mathfrak{L}(E)$ *telle que*

(a) *la fonction* $\mathscr{H}(\cdot)x$ *est continue sur* R^+ *et bornée sur* $(0,1)$ *pour tout* $x \in E$,

(b) $\int_0^t \mathscr{H}(\tau)x\,d\tau \in \mathfrak{D}(A)$ *pour tout* $x \in E$ *et tout* $t \in R^+$,

(c) $\mathscr{H}(t)x + \int_0^t \mathscr{H}(\tau)\,d\tau = x$ *pour tout* $x \in E$ *et tout* $t \in R^+$.

En outre,

$$\|\mathscr{H}(t)\| \leqslant Me^{\omega^2 t} \quad \text{pour tout } t \in R^+. \tag{1}$$

C'est une simple conséquence de 4.5 de [6].

Les démonstrations de trois propositions 5.6-5.8 qui suivent sont connues de la théorie des semi-groupes d'opérateurs. Le procédé est analogue à celui des démonstrations des propositions 5.2-5.4, mais il est beaucoup plus simple.

5.6. Théorème d'existence. *Pour toute fonction* $h \in R^+ \to E$ *satisfaisant aux conditions* (I)-(III) *de* 5.2, *la fonction* $u \in R^+ \to E$ *définie par l'égalité*

$$u(t) = \int_0^t \mathscr{H}(t-\tau)h(\tau)\,d\tau \quad \text{pour tout } t \in R^+ \tag{$[{}^{*}_{*}]$}$$

satisfait aux conditions suivantes:

(a) u *est continûment dérivable sur* R^+,

(b) $u(0_+) = 0$,

(c) $u(t) \in \mathfrak{D}(A)$ *pour tout* $t \in R^+$,

(d) $u'(t) + Au(t) = h(t)$ *pour tout* $t \in R^+$.

En outre,

$$\|u(t)\| \leqslant Me^{\omega^2 t}\int_0^t \|h(\tau)\|\,d\tau \quad \text{pour tout } t \in R^+. \tag{1}$$

5.7. Théorème d'existence. *Pour toute fonction* $h \in R^+ \to E$ *satisfaisant à la condition* (I) *de* 5.3, *la fonction* $u \in R^+ \to E$ *définie par l'égalité* $[{}^{*}_{*}]$ *satisfait aux conditions suivantes:*

(a) u *est continue sur* R^+ *et bornée sur* $(0,1)$,

(b) $\int_0^t u(\tau)\,d\tau \in \mathfrak{D}(A)$ *pour tout* $t \in R^+$,

(c) $u(t) + A\int_0^t u(\tau)\,d\tau = \int_0^t h(\tau)\,d\tau$ *pour tout* $t \in R^+$.

On a en outre l'inégalité (1) *de* 5.6.

5.8. Proposition. *Pour tous* $h \in R^+ \to E$ *et* $u \in R^+ \to E$ *satisfaisant aux conditions* (I) *de* 5.3 *et* (a)-(d) *de* 5.6, *les conditions* (a)-(c) *de* 5.7 *sont également satisfaites.*

5.9. THÉORÈME D'ÉCART. *Pour toute famille de fonctions* $u_\varepsilon \in R^+ \to E$ *où* $\varepsilon > 0$, *toute fonction* $u \in R^+ \to E$ *et toute fonction* $h \in R^+ \to E$ *satisfaisant aux conditions*

(I) *la fonction* h *est continue sur* R^+ *et intégrable sur* $(0, 1)$,

(II) $h(t) \in \mathfrak{D}(A^2)$ *pour tout* $t \in R^+$,

(III) *les fonctions* $t \to Ah(t)$ *et* $t \to A^2h(t)$ *où* $t \in R^+$, *sont intégrables sur* $(0, a)$ *pour tout* $a > 0$,

(IV) (a)-(d) *de* 5.2 *et* 5.6,

on a

$$(1) \qquad \|u_\varepsilon(t) - u(t)\| \leqslant \int_0^t e^{-\tau/\varepsilon}\|h(t-\tau)\|\,d\tau + \\ + 2\varepsilon M e^{\omega^2 t}\int_0^t \|Ah(\tau)\|\,d\tau + \varepsilon M^2 t e^{\omega^2 t}\int_0^t \|A^2h(\tau)\|\,d\tau,$$

quels que soient $t \in R^+$ *et* $\varepsilon > 0$.

Démonstration. Il s'ensuit de 4.1, de [6] 4.2 (unicité!), de 5.2 et de 5.6 que pour tout $t \in R^+$ et $\varepsilon > 0$

$$(2') \qquad u_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mathscr{H}_\varepsilon(t-\tau)h(\tau)\,d\tau = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mathscr{H}_\varepsilon(\tau)h(t-\tau)\,d\tau,$$

$$(2'') \qquad u(t) = \int_0^t \mathscr{H}(t-\tau)h(\tau)\,d\tau = \int_0^t \mathscr{H}(\tau)h(t-\tau)\,d\tau.$$

D'autre part, 5.1, 5.5 et 4.4 entraînent pour tous $t \in R^+$, $0 < \tau < t$ et $\varepsilon > 0$

$$(3) \qquad \left\|\frac{1}{\varepsilon}\mathscr{H}_\varepsilon(\tau)h(t-\tau) - \mathscr{H}(\tau)h(t-\tau)\right\| \leqslant e^{-\tau/\varepsilon}\|h(t-\tau)\| + \\ + 2\varepsilon M e^{\omega^2\tau}\|Ah(t-\tau)\| + \varepsilon M^2 \tau e^{\omega^2\tau}\|A^2h(t-\tau)\|.$$

La thèse (1) est une conséquence immédiate de (2'), (2'') et (3).

5.10. THÉORÈME DE CONVERGENCE. *Pour toute famille de fonctions* $u_\varepsilon \in R^+ \to E$ *où* $\varepsilon > 0$, *toute fonction* $u \in R^+ \to E$ *et toute fonction* $h \in R^+ \to E$ *assujetties aux conditions*

(I) *la fonction* h *est intégrable sur* $(0, a)$ *pour tout* $a > 0$,

(II) (a)-(c) *de* 5.3 *et* 5.7,

il existe pour tout $\delta > 0$ *un* $\varepsilon_0 > 0$ *tel que pour tout* $t \in R^+$ *et* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$

$$(1) \qquad \|u_\varepsilon(t) - u(t)\| \leqslant \int_0^t e^{-\tau/\varepsilon}\|h(t-\tau)\|\,d\tau + \delta(e^{\omega^2 t} + te^{\omega^2 t})\int_0^t \|h(\tau)\|\,d\tau.$$

Démonstration. Il s'ensuit de 4.2, de [6] 4.4 (unicité!), 5.3 et 5.7 que les égalités (2'), (2'') de 5.9 sont satisfaites.

Admettons d'abord qu'il existe un ensemble mesurable $X \subseteq R^+$ et un vecteur $x \in E$ tels que

$$h(\tau) = \begin{cases} x & \text{pour } \tau \in X, \\ 0 & \text{pour } \tau \in R^+ \setminus X. \end{cases} \tag{2}$$

Il résulte de 5.1, 5.5 et 4.7 que pour tous $t \in R^+$, $0 < \tau < t$ et $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} \mathscr{H}_\varepsilon(\tau) h(t-\tau) - \mathscr{H}(\tau) h(t-\tau) \right\| \tag{3}$$
$$\leqslant e^{-\tau/\varepsilon} \|h(t-\tau)\| + \delta(e^{\omega^2\tau} + \tau e^{\omega^2\tau}) \|h(t-\tau)\|,$$

d'où (1) en vertu des égalités (2′) et (2″) de 5.9.

Dans le cas général, il est facile d'étendre la démonstration en approchant la fonction h par une suite h_k de fonctions étagées, telle que pour tout $a \in R^+$

$$\int_0^a \|h_k(\xi) - h(\xi)\| d\xi \to 0 \qquad \text{avec } k \to \infty$$

et en utilisant le raisonnement employé dans la démonstration du théorème de Banach et Steinhaus.

Remarque 1. Il y a lieu à ajouter quelques mots sur le comportement asymptotique du membre $\int_0^t e^{\tau/\varepsilon} \|h(t-\tau)\| d\tau$ dans les formules (1) de 5.9 et 5.10.

Deux propositions suivantes sont faciles à vérifier:

Si la fonction h satisfait à la condition (I) *de* 5.3, *on a pour tout* $t \in R^+$

$$\int_0^t e^{-\tau/\varepsilon} \|h(t-\tau)\| d\tau \to 0 \qquad \textit{lorsque } \varepsilon \to 0_+. \tag{[**]}$$

Si la fonction h est mesurable et bornée sur l'intervalle $(0, a)$ *quel que soit* $a > 0$, *on a la convergence* [**] *uniformément pour* $0 < t < a$, *quel que soit* $a > 0$.

Remarque 2. Les démonstrations des théorèmes 4.6 et 4.7 sont construites de façon qu'elles soient indépendantes des théorèmes d'existence 4.1, 4.2 du travail [6], de même que de 4.2 et 4.4 du travail présent. Un tel procédé est naturellement réalisable aussi pour les théorèmes 5.9 et 5.10, mais il serait tellement long et fastidieux qu'il est préférable de fonder les démonstrations sur les théorèmes d'existence, qui sont relativement simples.

6. EXISTENCE ET CONVERGENCE DES DÉRIVÉES DES SOLUTIONS DU PROBLÈME NON-HOMOGÈNE

6.1. Admettons à présent les hypothèses 2.1 du travail [6] précité.

6.2. THÉORÈME D'EXISTENCE DE LA DÉRIVÉE. *Pour tout* $x \in E$, *tout* $\varepsilon > 0$ *et tout* $u_\varepsilon \in R^+ \to E$ *assujettis aux conditions* (a)-(c) *de* 4.2,

(1) *la fonction* u_ε *est continûment dérivable sur* R^+,

(2) $\|u_\varepsilon'(t)\| \leqslant 2Me^{\omega^2 t}\|x\|$ *pour tout* $t \in R^+$.

Démonstration. En vertu de 4.4 du travail [6], il existe une fonction $v_\varepsilon \in R^+ \to E$ satisfaisant aux conditions:

(3) elle est continue sur R^+ et bornée sur $(0, 1)$,

(4) $\int_0^t \int_0^\tau v_\varepsilon(\sigma)\,d\sigma\,d\tau \in \mathfrak{D}(A)$ pour tout $t \in R^+$,

(5) $\varepsilon v_\varepsilon(t) + \int_0^t v_\varepsilon(\sigma)\,d\sigma + A\int_0^t\int_0^\tau v_\varepsilon(\sigma)\,d\sigma\,d\tau = \varepsilon x + tx$ pour tout $t \in R^+$.

Posons pour $t \in R^+$

$$w_\varepsilon(t) = \int_0^t \left[v_\varepsilon(\tau) - \frac{1}{\varepsilon}u_\varepsilon(\tau)\right]d\tau.$$

L'opérateur A étant fermé, on déduit aisément de (3)-(5) et des conditions (a)-(c) de 4.2 que ces conditions se trouvent satisfaites pour w_ε au lieu de u_ε. En outre, l'unicité de la fonction u_ε, établie également dans le théorème 4.2, entraîne $u_\varepsilon = w_\varepsilon$, d'où la thèse (1), et, enfin, la condition (1) de 4.4 du travail [6] et celle de 4.2 entraînent la thèse (2), ce qui achève la démonstration.

6.3. THÉORÈME D'ÉCART. *Pour tout* $x \in \mathfrak{D}(A^2)$ *et pour toute famille de fonctions* $u_\varepsilon \in R^+ \to E$ *où* $\varepsilon > 0$, *les conditions* (a)-(d) *et* (1) *de* 4.1 *entraînent pour tout* $t \in R^+$ *et tout* $\varepsilon > 0$

$$\|u_\varepsilon'(t)\| \leqslant e^{-t/\varepsilon}\|x\| + 3\varepsilon Me^{\omega^2 t}\|Ax\| + 2\varepsilon Mte^{\omega^2 t}\|A^2x\|. \tag{1}$$

Démonstration. L'opérateur A étant fermé, on déduit aisément des conditions (a)-(d) de 4.1 que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}u_\varepsilon'(\tau)\,d\tau &= \lambda\left(\lambda^2 I + \lambda\frac{1}{\varepsilon}I + \frac{1}{\varepsilon}A\right)^{-1}x \\ &= \left[\left(\lambda + \frac{1}{\varepsilon}\right)\left(\lambda^2 I + \lambda\frac{1}{\varepsilon}I + \frac{1}{\varepsilon}A\right)^{-1}x - (\lambda I + A)^{-1}x\right] - \\ &\quad - \left[\frac{1}{\varepsilon}\left(\lambda^2 I + \lambda\frac{1}{\varepsilon}I + \frac{1}{\varepsilon}A\right)^{-1}x - (\lambda I + A)^{-1}x\right],\end{aligned} \tag{2}$$

d'où la thèse (1) en vertu de 3.6 de [6], et de 3.4 et 1.5 du présent travail.

6.4. Théorème de convergence. *Pour tout $x \in E$ et toute famille de fonctions continûment dérivables $u_\varepsilon \in R^+ \to E$ où $\varepsilon > 0$, assujetties aux conditions* (a)-(c) *et* (1) *de* 4.2, *il existe pour tout $\delta > 0$ un $\varepsilon_0 > 0$ tel que*

$$(1) \qquad \|u'_\varepsilon(t)\| \leqslant e^{-t/\varepsilon}\|x\| + \delta(e^{\omega^2 t} + te^{\omega^2 t}) \quad \textit{pour tout } t \in R^+ \textit{ et } 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0.$$

C'est une conséquence de la condition (2) de 6.3, de 3.7 de [6] et des propositions 3.5 et 1.5 du présent travail.

7. EXISTENCE ET CONVERGENCE DES DÉRIVÉES DES SOLUTIONS DU PROBLÈME NON-HOMOGÈNE

7.1. Si Y vérifie les hypothèses 2.1 du travail [6], on a les théorèmes 7.2-7.4 qui suivent et dont les démonstrations sont analogues à celles des théorèmes 6.2-6.4.

7.2. Théorème d'existence de la dérivée. *Pour tout $\varepsilon > 0$, tout $u_\varepsilon \in R \to E$ et tout $h \in R^+ \to E$, les conditions* (I) *et* (a)-(c) *de* 5.3 *entraînent les conditions suivantes:*

(1) *la fonction u_ε est continûment dérivable sur R^+,*

(2) $\|\varepsilon u'_\varepsilon(t)\| \leqslant 2Me^{\omega^2 t}\int_0^t \|h(\tau)\|d\tau$ *pour tout $t \in R^+$ et $\varepsilon > 0$.*

7.3. Théorème d'écart. *Pour toute famille de fonctions $u_\varepsilon \in R^+ \to E$ où $\varepsilon > 0$, et toute fonction $h \in R^+ \to E$, les conditions* (I)-(III) *de* 5.9 *et* (a)-(c) *de* 5.3 *entraînent pour tout $t \in R$ et tout $\varepsilon > 0$*

$$(1) \qquad \|\varepsilon u'_\varepsilon(t)\| \leqslant \int_0^t e^{-\tau/\varepsilon}\|h(t-\tau)\|d\tau +$$

$$+ 3\varepsilon Me^{\omega^2 t}\int_0^t \|Ah(\tau)\|d\tau + 2\varepsilon Mte^{\omega^2 t}\int_0^t \|A^2 h(\tau)\|d\tau.$$

7.4. Théorème de convergence. *Pour toute famille de fonctions continûment dérivables $u_\varepsilon \in R^+ \to E$ où $\varepsilon > 0$ et toute fonction $h \in R^+ \to E$ assujetties aux conditions* (I) *et* (a)-(c) *de* 5.3, *il existe pour tout $\delta > 0$ un $\varepsilon_0 > 0$ tel que*

$$(1) \qquad \|\varepsilon u'_\varepsilon(t)\| \leqslant \int_0^t e^{-\tau/\varepsilon}\|h(t-\tau)\|d\tau + \delta(e^{\omega^2 t} + te^{\omega^2 t})\int_0^t \|h(\tau)\|d\tau$$

pour tout $t \in R^+$ et $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

8. COMMENTAIRES

8.1. On peut remplacer la condition (III) dans les hypothèses 2.1 du travail [6] par

$$\text{(III')} \qquad \left\| \frac{d^p}{d\lambda^p} \lambda(\lambda^2 I + A)^{-1} \right\| \leqslant \frac{Mp!}{(\lambda-\omega)^{p+1}},$$

$$\text{(III'')} \qquad \left\| \frac{d^p}{d\lambda^p} (\lambda^2 I + A)^{-1} \right\| \leqslant \frac{Mp!}{(\lambda-\omega)^{p+1}}$$

pour $\lambda > \omega$ et $p = 0, 1, \ldots$

8.2. L'hypothèse 2.1 du travail présent est beaucoup plus générale que celle de [6].

Soient R^3 l'espace cartésien à 3 dimensions et $E = C(R^3)$ l'espace de Banach des fonctions réelles uniformément continues et bornées dans R^3 avec la norme usuelle supremum. Définissons l'opérateur $A = \Delta$ comme il suit: $x \in \mathfrak{D}(\Delta)$ lorsque $x \in C(R^3)$ et

$$y = \frac{\partial^2}{\partial^2 \xi_1} x + \frac{\partial^2}{\partial^2 \xi_2} x + \frac{\partial^2}{\partial^2 \xi_3} \in C(R^3),$$

les dérivées étant prises au sens des distributions; puis $\Delta x = y$.

On démontre que dans ces conditions Δ satisfait à l'hypothèse 2.1 du travail présent, mais non à celle du travail [6].

8.3. Il se trouve dans les formules 4.4 (1) et 4.5 (1) un nouveau membre remarquable $e^{-t/\varepsilon}\|x\|$ qui empêche dans 4.4 et 4.5 la convergence uniforme pour $t > 0$ suffisamment petit.

9. APPENDICE

9.1. THÉORÈME D'EXISTENCE. *L'hypothèse principale* 2.1 *entraîne l'existence d'une fonction unique $\mathscr{D} \in R^+ \to \mathfrak{L}(E)$ satisfaisant pour tout $x \in E$ aux conditions suivantes*:

(A) *la fonction $\mathscr{D}(\cdot)x$ est continue sur R^+*,

(B) $t^{-1}\mathscr{D}(t)x \to x (t \to 0_+)$,

(C) $\mathscr{D}(s)\,\mathscr{D}(t)x = \mathscr{D}(t)\,\mathscr{D}(s)x = \frac{1}{2}\int_{t-s}^{t+s} \mathscr{D}(\tau)x\,d\tau$ *pour* $0 < s < t$,

(D) $\|\mathscr{D}(t)\| \leqslant M \int_0^t \operatorname{coh}(\omega\tau)\,d\tau$ *pour* $t \in R^+$,

(E) $\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\mathscr{D}(\tau)x\,d\tau = (\lambda^2 I + A)^{-1}x$ *pour* $\lambda > \omega$.

Démonstration. L'unicité de $\mathscr{D}$ étant évidente d'après les propriétés (A), (D) et (E) vu 1.21 de mon travail [4], il ne reste que d'en démontrer l'existence. Cette démonstration sera divisée en prémisses numérotées $1^\circ, 2^\circ, \ldots, 23^\circ$. Désignons par E^* l'espace adjoint de E, muni de la norme usuelle.

1° Posons pour $x \in E$, $l \in E^*$ et $\lambda > \omega$

$$\Pi(x, l)(\lambda) = l\big((\lambda^2 I + A)^{-1} x\big)$$

et pour $p = 0, 1, \ldots$

$$\Pi^{(p)}(x, l)(\lambda) = \frac{d^p}{d\lambda^p} \Pi(x, l)(\lambda).$$

2° On a pour $x \in E$, $l \in E^*$ et $p = 0, 1, \ldots$

$$|\Pi^{(p)}(x, l)(\lambda)| \leqslant (-1)^p M \|x\| \, \|l\| \frac{d^p}{d\lambda^p} \frac{1}{\lambda^2 - \omega^2}.$$

C'est une conséquence immédiate de la condition (III) de 2.1.

3° Il existe pour tout $x \in E$ et tout $l \in E^*$ une fonction $\Phi(x, l)$ mesurable sur R^+ et telle que

(a) $|\Phi(x, l)(t)| \leqslant M \|x\| \, \|l\| \int\limits_0^t \operatorname{coh}(\omega\tau) d\tau$ pour presque tout $t \in R^+$,

(b) $\int\limits_0^\infty e^{-\lambda\tau} \Phi(x, l)(\tau) d\tau = \Pi(x, l)(\lambda)$ pour tout $\lambda > \omega$.

On vérifie 3° aisément à l'aide de 1.22 et 1.19 de mon travail [4], compte tenu de ce que

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda\tau} \int\limits_0^\tau \operatorname{coh}(\omega\sigma) d\sigma d\tau = \frac{1}{\lambda^2 - \omega^2} \quad \text{pour tout } \lambda > \omega.$$

4° Posons pour $x \in \mathfrak{D}(A)$, $l \in E^*$ et $t \in R^+$

$$\Psi(x, l)(t) = t l(x) - \int\limits_0^t \int\limits_0^\tau \Phi(Ax, l)(\sigma) d\sigma d\tau,$$

ce qui est possible grâce à 3°.

5° On a pour tout $x \in \mathfrak{D}(A)$, $l \in E^*$ et $t_1, t_2 \in R^+$

$$\|\Psi(x, l)(t_1) - \Psi(x, l)(t_2) - (t_1 - t_2) l(x)\| \leqslant |t_1 - t_2| M (t_1 + t_2) \|Ax\| \, \|l\| \int\limits_0^{t_1 + t_2} \operatorname{coh}(\omega\tau) d\tau.$$

En fait, on a pour $t_1 > t_2$ en vertu de 3° et 4°

$$|\Psi(x,l)(t_1) - \Psi(x,l)(t_2) - (t_1 - t_2)l(x)| = \left| \int_{t_2}^{t_1}\int_0^{\tau} \Phi(Ax,l)(\sigma)\,d\sigma\,d\tau \right|$$

$$\leqslant (t_1 - t_2) \sup_{t_1 \leqslant \tau \leqslant t_2} \left| \int_0^{\tau} \Phi(Ax,l)(\sigma)\,d\sigma \right| \leqslant |t_1 - t_2| M(t_1 + t_2)\|x\|\,\|l\| \int_0^{t_1+t_2} \operatorname{coh}(\omega\tau)\,d\tau$$

et le cas $t_2 < t_1$ est analogue.

6° On a pour $x \in \mathfrak{D}(A)$, $l \in E^*$ et $\lambda > \omega$

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau}\Psi(x,l)(\tau)\,d\tau = \int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau}\Phi(x,l)(\tau)\,d\tau.$$

En fait, on déduit de 3°-5° que

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau}\Psi(x,l)(\tau)\,d\tau = -l(x)\int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau}\tau\,d\tau - \int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau}\int_0^{\tau}\int_0^{\sigma} \Phi(Ax,l)(\varrho)\,d\varrho\,d\sigma\,d\tau$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\,l(x) - \frac{1}{\lambda^2}\int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau}\Phi(Ax,l)(\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\,l(x) - \frac{1}{\lambda^2}\,\Pi(Ax,l)(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}\,l(x) - \frac{1}{\lambda^2}\,l\big((\lambda^2 I + A)^{-1}Ax\big)$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\,l\big(x - (\lambda^2 I + A)^{-1}Ax\big)$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\,l\big(x + \lambda^2(\lambda^2 I + A)^{-1}x - x\big) = l\big((\lambda^2 I + A)x\big)$$

$$= \Pi(x,l)(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau}\Phi(x,l)(\tau)\,d\tau.$$

7° On a pour tout $x \in \mathfrak{D}(A)$ et tout $l \in E^*$, $\Psi(x,l) = \Phi(x,l)$ presque partout sur R^+.

C'est une conséquence de 6° et de 1.20 de [4].

8° On a pour $x \in \mathfrak{D}(A)$, $l \in E^*$ et $t \in R^+$

$$|\Psi(x,l)(t)| \leqslant M \int_0^{t} \operatorname{coh}(\omega\tau)\,d\tau\,\|x\| \cdot \|l\|.$$

C'est une conséquence de 7° et 3°, la fonction $\Psi(x,l)$ étant continue en vertu de 5°.

9° Il existe pour tout $x \in \mathfrak{D}(A)$, $t \in R^+$ et $\varepsilon > 0$ un entier non-négatif

$p_0(x, t, \varepsilon) > t\omega$ et tel que pour tout $l \in E^*$

$$\left| \frac{(-1)^p}{p!} \left(\frac{p}{t}\right)^{p+1} \Pi^{(p)}(x, l)\left(\frac{p}{t}\right) \to \Psi(x, l)(t) \right| \leqslant \varepsilon \|l\|.$$

Soient, en effet, $S = \{l \colon l \in E^*, \|l\| \leqslant 1\}$ et $B(S)$ l'ensemble de toutes les fonctions réelles bornées sur S, muni de la norme $\|f\| = \sup_{l \in S} |f(l)|$. $B(S)$ est un espace de Banach.

Posons pour $x \in \mathfrak{D}(A)$, $t \in R^+$ et $l \in S$

$$\theta(x, t)(l) = \Psi(x, l)(t)$$

et pour $\lambda > \omega$

$$G(x, \lambda)(l) = \Pi(x, l)(\lambda).$$

D'après 5°, la fonction $\theta(x, \cdot)$ est continue sur R^+ par rapport à la topologie de $B(S)$ pour tout $x \in \mathfrak{D}(A)$ et on a d'après 8° pour tout $x \in \mathfrak{D}(A)$ et tout $t \in R^+$

$$\|\theta(x, t)\| \leqslant M\|x\| \int_0^t \operatorname{coh}(\omega\tau)\, d\tau.$$

En outre, il résulte de 6° et de 3° que

$$\int_0^\infty e^{-\lambda\tau} \theta(x, \tau)\, d\tau = G(x, \lambda)$$

pour tout $x \in \mathfrak{D}(A)$ et tout $\lambda > \omega$.

Ceci établi, en écrivant

$$G^{(p)}(x, \lambda) = \frac{d^p}{d\lambda^p} G(x, \lambda) \qquad \text{où } p = 0, 1, \ldots,$$

on conclut de 1.19 de [4] que l'on a pour tout $x \in \mathfrak{D}(A)$ et $t \in R^+$

$$\frac{(-1)^p}{p!} \left(\frac{p}{t}\right)^{p+1} G^{(p)}\left(x, \frac{n}{t}\right) \to \theta(x, t) \qquad \text{lorsque } p \to \infty,$$

ce qui entraîne 9°.

10° Soit pour $\lambda > \omega$ et $p = 0, 1, \ldots$

$$V_p(\lambda) = \frac{(-1)^p}{p!} \lambda^{p+1} \frac{d^p}{d\lambda^p} \big((\lambda^2 I + A)^{-1}\big).$$

11° On a pour tout $x \in \mathfrak{D}(A)$, $l \in E^*$ et $\lambda > \omega$

$$\frac{(-1)^p}{p!} \lambda^{p+1} \Pi^{(p)}(x, l)(\lambda) = l\big(V_p(\lambda)x\big)$$

(en effet, voir 10° et 1°).

12° Pour tout $x \in \mathfrak{D}(A)$ et $t \in R^+$, la suite $V_p(p/t)x$ où $p > t\omega$ est une suite de Cauchy.

C'est une conséquence de 11° et 9°.

13° Posons pour $x \in \mathfrak{D}(A)$ et $t \in R^+$

$$\mathscr{D}_0(t)x = \lim_{\substack{p\to\infty \\ p>t\omega}} V_p\left(\frac{p}{t}\right) x.$$

14° On a pour tout $x \in \mathfrak{D}(A)$, $l \in E^*$ et $t \in R^+$

$$l\big(\mathscr{D}_0(t)x\big) = \Psi(x, l)\,(t).$$

C'est encore une conséquence de 11° et 9°.

15° Pour tout $x \in \mathfrak{D}(A)$, la fonction $\mathscr{D}_0(\cdot)x$ est continue sur R^+ et $t^{-1}\mathscr{D}_0(t)x \to x$ avec $t \to 0_+$.

C'est une conséquence facile de 14° et 5°.

16° Posons pour $\lambda > \omega$ et $p = 0, 1, \ldots$

$$v_p(\lambda) = \frac{(-1)^p}{p!}\lambda^{p+1}\frac{d^p}{d\lambda^p}\frac{1}{\lambda^2-\omega^2}.$$

17° On a pour $t \in R^+$ et $p > t\omega$

$$v_p\left(\frac{p}{t}\right) \to \int_0^t \operatorname{coh}(\omega\tau)\,d\tau \qquad \text{lorsque } p \to \infty.$$

Cela résulte aisément de l'identité

$$\frac{1}{\lambda^2-\omega^2} = \int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\int_0^\tau \operatorname{coh}(\omega\sigma)\,d\sigma\,d\tau \qquad \text{pour } \lambda > \omega$$

et de 1.19 de [4].

18° On a pour $\lambda > \omega$ et $p = 0, 1, \ldots$

$$\|V_p(\lambda)\| \leqslant M v_p(\lambda).$$

C'est une conséquence immédiate de la condition III de 2.1.

19° On a pour tout $x \in \mathfrak{D}(A)$ et $t \in R^+$

$$\|\mathscr{D}_0(t)x\| \leqslant M\|x\|\int_0^t \operatorname{coh}(\omega\tau)\,d\tau.$$

C'est une conséquence de 13°, 17° et 18°.

20° La fonction $\mathscr{D}_0(t)$ peut être prolongée par continuité à tous les $x \in E$ en vertu de 19° et de la linéarité de $\mathscr{D}_0(t)$. Désignons par $\mathscr{D}$ la fonction prolongée.

21° En vertu de 19°, 15°, 14°, 6°, 3° et 1°, la fonction $\mathscr{D}$ satisfait aux conditions (A), (B), (D) et (E).

22° On a pour tout $\lambda > \omega$ et $\mu > \omega$ où $\lambda \neq \mu$

$$2(\lambda^2 I+A)^{-1}(\mu^2 I+A)^{-1}$$
$$= \frac{\frac{1}{\lambda}(\lambda^2 I+A)^{-1}-\frac{1}{\mu}(\mu^2 I+A)^{-1}}{\mu-\lambda} - \frac{\frac{1}{\lambda}(\lambda^2 I+A)^{-1}+\frac{1}{\mu}(\mu^2 I+A)^{-1}}{\mu+\lambda}.$$

On parvient aisément à cette identité à partir de l'équation

$$(\lambda^2 I+A)^{-1}(\mu^2 I+A)^{-1} = (\mu^2-\lambda^2)\,[(\lambda^2 I+A)^{-1}-(\mu^2 I+A)^{-1}],$$

qui n'est rien d'autre que l'équation de la résolvante de l'opérateur $-A$.

23° La fonction $\mathscr{D}$ satisfait à la condition (C).

En effet, on a d'abord pour tout $\lambda > \omega$, $\mu > \omega$ et $x \in E$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda\tau-\mu\sigma}[\mathscr{D}(\tau)\mathscr{D}(\sigma)x-\mathscr{D}(\sigma)\mathscr{D}(\tau)x]\,d\tau\,d\sigma$$
$$= (\lambda^2 I+A)^{-1}(\mu^2 I+A)^{-1}-(\mu^2 I+A)^{-1}(\lambda^2 I+A)^{-1} = 0,$$

ce qui entraîne la première des égalités (C) grâce au lemme 1.21 de [4], appliqué deux fois.

Ensuite, écrivons pour simplifier

$$\mathscr{D}_1(t) = \begin{cases} \mathscr{D}(t) & \text{pour } t>0,\\ 0 & \text{pour } t=0,\\ -\mathscr{D}(t) & \text{pour } t<0.\end{cases}$$

Quelques changements convenables de variables conduisent, compte tenu de 21°, à l'égalité suivante pour $\lambda > \omega$, $\mu > \omega$ et $x \in E$:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda\tau-\mu\sigma}\Big[2\mathscr{D}_1(\tau)\mathscr{D}_1(\sigma)x-\int_0^{\tau+\sigma}\mathscr{D}_1(\eta)x\,d\eta+\int_0^{\tau-\sigma}\mathscr{D}_1(\eta)x\,d\eta\Big]d\tau\,d\sigma$$
$$= 2(\lambda^2 I+A)^{-1}(\mu^2 I+A)^{-1}x - \frac{\frac{1}{\lambda}(\lambda^2 I+A)^{-1}x-\frac{1}{\mu}(\mu^2 I+A)^{-1}x}{\mu-\lambda} +$$
$$+\frac{\frac{1}{\lambda}(\lambda^2 I+A)^{-1}x+\frac{1}{\mu}(\mu^2 I+A)^{-1}x}{\mu+\lambda} = 0.$$

En appliquant à cette égalité le lemme 1.21 de [4] à deux reprises, on aboutit à la seconde des égalités (C), ce qui achève la démonstration.

L'existence de la fonction $\mathscr{D}$ satisfaisant aux conditions (A)-(E) résulte de 21° et 23°.

9.2. THÉORÈME. *La fonction $\mathscr{D}$ qui existe en vertu du théorème* 9.1 *satisfait en outre aux conditions suivantes:*

(F) $x \in \mathfrak{D}(A)$ *si et seulement s'il existe* $\lim\limits_{t\to 0_+} \dfrac{\mathscr{D}(t)x - tx}{t^3}$,

(G) *on a pour tout* $x \in \mathfrak{D}(A)$

$$\lim_{t\to 0_+} \frac{\mathscr{D}(t)x - tx}{t^3} = -Ax,$$

(H) *la fonction* $u(t) = \mathscr{D}(t)x$ *est pour tout* $x \in \mathfrak{D}(A)$ *deux fois continûment dérivable,*

(J) *on a* $u(0_+) = 0$ *et* $u'(0_+) = x$,

(K) *on a pour tout* $t \in R^+$

$$u''(t) + Au(t) = 0.$$

Ajouté aux épreuves. J. Kisyński dans son travail *On second order Cauchy's problem in Banach spaces* (Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences 18 (1970), p. 371-374) a étudié le problème du petit paramètre sous l'hypothèse principale de [6] par une autre méthode et il a obtenu l'estimation de l'écart qui semble la meilleure possible. Il est probable que sa méthode sera applicable aussi sous l'hypothèse du travail présent.

TRAVAUX CITÉS

[1] P. de Lucia, *Su una questione di piccolo parametro per una equazione ellittico-parabolica*, Ricerche di Matematica 12 (1963), p. 121-139.

[2] — *Su una questione di piccolo parametro per una equazione parabolica del secondo ordine in n variabili*, ibidem 17 (1968), p. 255-262.

[3] J. A. Smoller, *Singular perturbations of Cauchy's problem*, Communications on Pure and Applied Mathematics 18 (1965), p. 665-677.

[4] M. Sova, *Cosine operator functions*, Rozprawy Matematyczne 49, Warszawa 1966, p. 1-47.

[5] — *Problème de Cauchy pour équations hyperboliques opérationelles à coefficients constants non-bornés*, Annali di Pisa 22 (1968), p. 67-100.

[6] — *Equations hyperboliques avec petit paramètre dans les espaces de Banach généraux*, Colloquium Mathematicum 21 (1969), p. 303-320.

[7] M. Zlámal, *On a singular perturbation problem concerning hyperbolic equations*, University of Maryland, Lecture Series No. 45 (1964), p. 1-31.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE TCHÉCOSLOVAQUE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 7. 7. 1969;
en version modifiée le 8. 4. 1970