COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXI 1970 FASC. 2

LA CONVERGENCE EN PROBABILITÉ ET LA CONVERGENCE PRESQUE SÛRE DE CERTAINES SUITES DE VARIABLES ALÉATOIRES DÉPENDANTES

PAR

DOMINIK SZYNAL (LUBLIN)

1. Introduction. La recherche des conditions pour que les lois faible et forte des grands nombres soient satisfaites est l'une des tâches fondamentales dans le domaine des problèmes-limites du calcul des probabilités. Cette tâche n'a pas été accomplie d'une façon satisfaisante — en ce qui concerne les applications pratiques — même pour les variables aléatoires indépendantes et elle comporte des difficulités particulières dans le cas des variables aléatoires dépendantes. Dans la plupart des théorèmes qui établissent des conditions en question, les hypothèses portent sur les variances ou sur les moments d'ordre supérieur des variables aléatoires considérées. Il est évident que l'existence des moments d'un ordre supérieur à l'ordre 1 est une hypothèse facilitant la démonstration des théorèmes-limites sur la convergence en probabilité et sur celle presque sûre, mais cette hypothèse est en général trop forte. Il suffit de rappeler la loi forte des grands nombres de Kolmogoroff d'après laquelle une suite $\{X_n\}$ des variables aléatoires indépendantes ayant la même répartition obéit à la loi forte des grands nombres si et seulement si l'espérance mathématique de X_n existe. De même, le critère de trois séries de Kolmogoroff ([5], p. 237) et l'inégalité de Lévy ([3], p. 138), sur lesquelles se base la démonstration de l'équivalence entre la convergence en probabilité et celle presque sûre d'une série de variables aléatoires indépendantes, ne font intervenir aucune hypothèse concernant les variances ou les espérances mathématiques de X_n.

Or, vu que les démonstrations des théorèmes sur les conditions pour les deux convergences font appel aux inégalités de Tchebycheff, de Kolmogoroff et de Lévy, il est légitime d'entrevoir la possibilité de renforcer ces théorèmes en modifiant convenablement les inégalités utilisées.

Le présent travail apporte de telles modifications pour certaines classes de variables aléatoires dépendantes. Ces modifications permettent de formuler, pour les lois faible et forte des grands nombres, des conditions moins restrictives que celles que l'on rencontre dans les théorèmes classiques. Il est surtout à noter que l'on peut renforcer les théorèmes établis dans le travail [1], où la classe des variables aléatoires dépendantes à variances également bornées a été envisagée. Grâce aux inégalités obtenues, on peut non seulement omettre l'hypothèse des variances également bornées, mais, ce qui est davantage, une hypothèse quelconque sur ces variances devient superflue. Les démonstrations de ces inégalités font appel aux résultats de mes travaux [6] et [7], de même qu'aux généralisations préalables de certains théorèmes qui y ont été établis.

2. Notations. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace de probabilité, c'est-à-dire que Ω est un ensemble abstrait d'éléments ω sur lequel un σ-corps de sous-ensembles de Ω est fixé et où P est la mesure de la probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

$\{X_n\}$ désignera une suite de variables aléatoires à valeurs réelles, $\mathrm{E}X_n$ l'espérance mathématique de X_n, $\sigma^2 X_n$ la variance de X_n, et $\mathrm{Cov}(X_j, X_k)$ la covariance entre les variables aléatoires X_j et X_k.

$\mathrm{E}_k'(X_{j+k})$ désignera l'espérance mathématique de la variable X_{j+k} lorsqu'on connait les valeurs des variables $X_1, X_2, \ldots, X_k$, c'est-à-dire

$$\mathrm{E}_k'(X_{j+k}) = \mathrm{E}(X_{j+k} | X_k = x_{i_k}, X_{k-1} = x_{i_{k-1}}, \ldots, X_1 = x_{i_1});$$

et $\sup|\mathrm{E}_k'(X_{j+k}) - \mathrm{E}X_{j+k}|$, pour j fixe, désignera la borne supérieure de $|\mathrm{E}_k'(X_{j+k}) - \mathrm{E}X_{j+k}|$ lorsque les valeurs que prennent les variables $X_1, X_2, \ldots, X_k$ varient dans l'ensemble des valeurs admises.

$I[A]$ désignera l'indicateur de l'événement A, c'est-à-dire une variable aléatoire telle que

$$I[A](\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in A, \\ 0 \text{ si } \omega \notin A. \end{cases}$$

Soient $U_j = X_j I[|X_j| < \varepsilon]$ et $V_j = X_j I[|X_j| \geqslant \varepsilon]$, c'est-à-dire

$$U_j(\omega) = \begin{cases} X_j(\omega) & \text{si } |X_j(\omega)| < \varepsilon, \\ 0 & \text{si } |X_j(\omega)| \geqslant \varepsilon \end{cases}$$

et

$$V_j(\omega) = \begin{cases} X_j(\omega) & \text{si } |X_j(\omega)| < \varepsilon, \\ 0 & \text{si } |X_j(\omega)| \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$

On aura donc $U_j + V_j = X_j$. Posons $X_j^0 = X_j - \mathrm{E}X_j$, $Y_j = X_j^0 I \times [|X_j^0| < \varepsilon]$, $Z_j = X_j^0 I[|X^0| \geqslant \varepsilon]$, d'où $Y_j + Z_j = X_j^0$.

Posons enfin

$$S_k = \sum_{j=1}^{k} X_j, \quad S_k^{\cdot} = \sum_{j=1}^{k} U_j, \quad S_k^{\cdot\cdot} = \sum_{j=1}^{k} V_j,$$

$$S_k^0 = \sum_{j=1}^{k} X_j^0, \quad S_k^* = \sum_{j=1}^{k} Y_j \quad \text{et} \quad S_k^{**} = \sum_{j=1}^{k} Z_j.$$

3. Inégalités utilisées dans l'étude de la convergence en probabilité des séries et des suites aléatoires. Les inégalités qui vont être établies sont du type de celles de Tchebycheff et interviennent dans les démonstrations de certaines lois-limites faibles du calcul des probabilités. Les théorèmes concerneront la convergence en probabilité des séries de variables aléatoires dépendantes et la loi faible des grands nombres dans le cas de certaines classes de ces variables.

LEMME 1. *X_k où $k = 1, 2, \ldots, n$ étant des variables quelconques, on a pour tout $\varepsilon > 0$*

$$\text{(I)} \qquad P[|S_n - \mathrm{E}S_n^{\cdot}| \geqslant 2\varepsilon] \leqslant 2\left[\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\frac{X_k^2}{\varepsilon^2 + X_k^2} + \varepsilon^{-2} \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} \mathrm{Cov}(U_j, U_k)\right]$$

et, en supposant l'existence de l'espérance mathématique $\mathrm{E}X_j$,

$$\text{(II)} \qquad P[|S_n^0 - \mathrm{E}S_n^*| \geqslant 2\varepsilon] \leqslant 2\left[\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\frac{X_k^{02}}{\varepsilon^2 + X_k^{02}} + \varepsilon^{-2} \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} \mathrm{Cov}(Y_j, Y_k)\right].$$

Démonstration. On a en vertu d'une inégalité élémentaire

$$\text{(1)} \qquad P[|S_n - \mathrm{E}S_n^{\cdot}| \geqslant 2\varepsilon] \leqslant P[|S_n^{\cdot} - \mathrm{E}S_n^{\cdot}| \geqslant \varepsilon] + P[|S_n^{\cdot\cdot}| \geqslant \varepsilon],$$

ce qui entraîne en vertu de l'inégalité de Tchebycheff

$$\text{(2)} \qquad P[|S_n^{\cdot} - \mathrm{E}S_n^{\cdot}| \geqslant \varepsilon] \leqslant \sigma^2 S_n^{\cdot}/\varepsilon^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sigma^2 U_k/\varepsilon^2 + 2\varepsilon^{-2} \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} \mathrm{Cov}(U_j, U_k)$$

$$\leqslant 2\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\frac{X_k^2}{\varepsilon^2 + X_k^2} I[|X_k| < \varepsilon] + 2\varepsilon^{-2} \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} \mathrm{Cov}(U_j, U_k).$$

On a (voir [6])

$$P[|S_n^{\cdot\cdot}| \geqslant \varepsilon] \leqslant P[\max_{k \leqslant n} |S_k^{\cdot\cdot}| \geqslant \varepsilon] \leqslant 2 \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\frac{X_k^2}{\varepsilon^2 + X_k^2} I[|X_k| \geqslant \varepsilon].$$

En effet,

$$[|S_k^{\cdot\cdot}| \geqslant \varepsilon] \subset \big[[|S_{k-1}^{\cdot\cdot}| \geqslant \varepsilon] \cup [V_k \neq 0]\big],$$

puisque

$$\big[[|X+Y| \geqslant \varepsilon] \cap [Y = 0]\big] \subset [|X| \geqslant \varepsilon] \quad \text{et}$$

$$\big[[|X+Y| \geqslant \varepsilon] \cap [Y \neq 0]\big] \subset [Y \neq 0];$$

par conséquent,

$$B_k^{\cdot\cdot} \subset A_{k-1}^{\cdot\cdot} \cap \big[[|S_{k-1}^{\cdot\cdot}| \geqslant \varepsilon] \cup [V_k \neq 0]\big] = A_{k-1}^{\cdot\cdot} \cap [V_k \neq 0] \subset [V_k \neq 0],$$

où

$$A_k^{\cdot\cdot} = \bigcap_{j=1}^{k} [|S_j^{\cdot\cdot}| < \varepsilon] \quad \text{et} \quad B_k^{\cdot\cdot} = A_{j-1}^{\cdot\cdot} \cap [V_k \neq 0] \subset [V_k \neq 0],$$

d'où

$$\begin{aligned}(3) \quad P[\max_{k\leqslant n} |S_k^{\cdot\cdot}| \geqslant \varepsilon] &= P[\bigcup_{k=1}^{n} |S_k^{\cdot\cdot}| \geqslant \varepsilon] \\ &= \sum_{k=1}^{n} PB_k^{\cdot\cdot} \leqslant \sum_{k=1}^{n} P[|X_k| \geqslant \varepsilon] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E} I[|X_k| \geqslant \varepsilon] \leqslant 2 \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E} \frac{X_k^2}{\varepsilon^2 + X_k^2} I[|X_k| \geqslant \varepsilon].\end{aligned}$$

En ajoutant (2) à (3), il vient l'inégalité (I). La démonstration de l'inégalité (II) est analogue.

Les cas particuliers suivants des inégalités (I) et (II) peuvent être utilisés dans des applications pratiques:

A. Si les variables aléatoires X_k où $k = 1, 2, \ldots, n$ sont symétriques par rapport à l'origine ou telles que $\mathrm{E}\, U_k = 0$ pour $k = 1, \ldots, n$, l'inégalité (I) prend la forme

$$\text{(A)} \qquad P[|S_n| \geqslant 2\varepsilon] \leqslant 2\left[\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E} \frac{X^2}{\varepsilon^2 + X_k^2} + \varepsilon^{-2} \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} \mathrm{E}\, U_j U_k\right]$$

et si ces variables sont symétriques par rapport à l'espérance mathématique $\mathrm{E}X_k$ ou si $\mathrm{E}Y_k = 0$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$, l'inégalité (II) devient

$$\text{(A')} \qquad P[|S_n^0| \geqslant 2\varepsilon] \leqslant 2\left[\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E} \frac{X_k^{02}}{\varepsilon^2 + X_k^{02}} + \varepsilon^{-2} \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} \mathrm{E}\, Y_j Y_k\right].$$

B. Si les variables aléatoires X_k où $k = 1, 2, \ldots, n$ sont telles que $\mathrm{Cov}(U_j, U_k) \leqslant 0$ ou bien telles que $\mathrm{Cov}(Y_j, Y_k) \leqslant 0$, on a respectivement

$$\text{(B)} \qquad P[|S_n - \mathrm{E}S_n^{\cdot}| \geqslant 2\varepsilon] \leqslant 2 \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E} \frac{X^2}{\varepsilon^2 + X_k^2},$$

$$\text{(B')} \qquad P[|S_n^0 - \mathrm{E}S_n^{*}| \geqslant 2\varepsilon] \leqslant 2 \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E} \frac{X_k^{02}}{\varepsilon^2 + X_k^{02}}.$$

C. Si les variables aléatoires X_k où $k = 1, 2, \ldots, n$ sont telles que $\mathrm{E}\, U_k = 0$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$ et les U_k sont orthogonales deux à deux ou bien telles que $\mathrm{E}\, Y_k = 0$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$ et Y_k sont orthogonales deux à deux, on a respectivement

$$\text{(C)} \qquad P[|S_n| \geqslant 2\varepsilon] \leqslant 2 \sum_{k=0}^{n} \mathrm{E} \frac{X_k^2}{\varepsilon^2 + X_k^2},$$

$$\text{(C')} \qquad P[|S_n^0| \geqslant 2\varepsilon] \leqslant 2 \sum_{k=0}^{n} \mathrm{E} \frac{X_k^{02}}{\varepsilon^2 + X_k^{02}}.$$

Remarque. Les inégalités (C) et (C′) donnent dans le cas considéré une estimation meilleure que l'inégalité classique de Tchebycheff.

THÉORÈME 1. *$\{X_n\}$ étant une suite de variables aléatoires telles que* $\mathrm{Cov}(U_j, U_k) \leqslant 0$ *ou bien telles que* $\mathrm{Cov}(Y_j, Y_k) \leqslant 0$ *dans le cas de l'existence de l'espérance mathématique* $\mathrm{E}X_j$, *la convergence de la série* $\sum \mathrm{E}\, X_n^2/(1+X_n^2)$ *ou bien de la série* $\sum \mathrm{E}\, X_n^{02}/(1+X_n^{02})$ *est une condition suffisante pour la convergence en probabilité de la série* $\sum (X_n - \mathrm{E}\, U_n)$ *ou de la série* $\sum (X_n^0 - \mathrm{E}\, Y_n)$ *respectivement.*

Démonstration. La démonstration de ce théorème résulte aussitôt de l'inégalité (B) écrite sous la forme

$$\lim_{\substack{k\to\infty\\ n\to\infty}} P[|(S_{n+k} - \mathrm{E}\, S_{n+k}^{\cdot}) - (S_k - \mathrm{E}\, S_k^{\cdot})| \geqslant 2\varepsilon] \leqslant 2 \lim_{\substack{k\to\infty\\ n\to\infty}} \sum_{i=k+1}^{n+k} \mathrm{E} \frac{X_i^2}{\varepsilon^2 + X_i^2} = 0$$

et de l'inégalité (B′) écrite sous la forme analogue.

Remarque. Dans le cas de variables aléatoires indépendantes et symétriques par rapport à l'origine, on a $\mathrm{Cov}(U_j, U_k) = 0$ et $\sum \mathrm{E}\, U_n = 0$, tandis que dans le cas de variables aléatoires indépendantes et symétriques par rapport à l'espérance mathématique, on a $\mathrm{Cov}(Y_j, Y_k) = 0$ et $\sum \mathrm{E}\, Y_n = 0$. En conséquence, la convergence de la série $\sum \mathrm{E}\, X_n^2/(1+X_n^2)$ et celle de la série $\sum \mathrm{E}\, X_n^{02}/(1+X_n^{02})$ sont des conditions suffisantes pour la convergence en probabilité des séries $\sum X_n$ et $\sum X_n^0$ respectivement.

Dans les démonstrations des théorèmes concernant la loi faible des grands nombres ou les généralisations de cette loi, il est commode de se servir des inégalités (I), (II), (A), (A′), (B), (B′), (C) et (C′) écrites pour les moyennes arithmétiques S_n/n ou pour les moyennes généralisées S_n/b_n où $0 < b_n \uparrow \infty$. On n'a qu'à définir alors les variables aléatoires U_k, V_k, Y_k et Z_k comme suit:

$$U_k = X_k I[|X_k| < b_n \varepsilon], \qquad V_k = X_k I[|X_k| \geqslant b_n \varepsilon],$$

$$Y_k = X_k^0 I[|X_k^0| < b_n \varepsilon] \quad \text{et} \quad Z_k = X_k^0 I[|X_k^0| \geqslant b_n \varepsilon].$$

Un raisonnement analogue à celui de la démonstration du lemme 1, X_k où $k = 1, 2, \ldots, n$ étant des variables aléatoires quelconques, on a pour tout $\varepsilon > 0$ et $0 < b_n \uparrow \infty$

$$(\mathrm{I}') \qquad P\left[\frac{|S_n - \mathrm{E}\,S_n^{\cdot}|}{b_n} \geqslant 2\varepsilon\right] \leqslant 2\left[\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\,\frac{X_k^2}{b_n^2\varepsilon^2 + X_k^2} + \right.$$
$$\left. + (b_n\varepsilon)^{-2} \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} \mathrm{Cov}(U_j, U_k)\right]$$

et, en supposant l'existence de l'espérance mathématique $\mathrm{E}X_j$,

$$(\mathrm{II}') \qquad P\left[\frac{|S_n^0 - \mathrm{E}\,S_n^*|}{b_n} \geqslant 2\varepsilon\right] \leqslant 2\left[\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\,\frac{X_k^{02}}{b_n^2\varepsilon^2 + X_k^{02}} + \right.$$
$$\left. + (b_n\varepsilon)^{-2} \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} \mathrm{Cov}(Y_j, Y_k)\right].$$

Les inégalités (A), (A′), (B), (B′), (C) et (C′) peuvent être transformées pareillement. En utilisant ces inégalités, les théorèmes-limites classiques se laissent renforcer, de même que les théorèmes établis dans le travail [1]. Les fragments des démonstrations semblables à ceux de [1] seront omis ici.

THÉORÈME 2. *Si une suite de variables aléatoires $\{X_n\}$ où $n = 1, 2, \ldots$ satisfait aux conditions*

(a) $\sigma^2 U_k \leqslant L^2$ *pour* $k = 1, 2, \ldots,$ L *étant une constante positive,*

(b) $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}[X_k^2/(n^2 + X_k^2)] \to 0$ *lorsque* $n \to \infty$,

(c) *il existe pour tout $\eta > 0$ un entier positif m tel que pour tout $n > m$ et $k = 1, 2, \ldots$*

$$\left|\frac{1}{n-m+1} \sum_{j=m}^{n} \mathrm{Cov}(U_k, U_{k+j})\right| < \eta/2,$$

on a

$$(4) \qquad (S_n - \mathrm{E}\,S_n^{\cdot})/n \xrightarrow{\mathrm{p}} 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty$$

où p *désigne la convergence en probabilité.*

Démonstration. Les conditions (a) et (c) entraînent pour tout $\delta > 0$ l'existence d'un tel N que

$$\frac{1}{n^2}\left|\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} \mathrm{Cov}(U_j, U_k)\right| < \delta/2 \qquad \text{pour } n > N.$$

La condition (b) équivaut évidemment à

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\,\frac{X_k^2}{n^2\varepsilon^2+X_k^2} < \delta/2 \qquad \text{pour } n > N.$$

En utilisant maintenant l'inégalité (I') avec $b_n = n$, on a

$$P\left[\left|\frac{S_n - \mathrm{E}S_n^{\cdot}}{n}\right| \geqslant 2\varepsilon\right] < \delta \qquad \text{pour tout } \delta > 0 \text{ et } n > N,$$

ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 1. *Si une suite de variables aléatoires* $\{X_n\}$ *est telle que* $\varrho_{jk}(U_j, U_k) \leqslant 0$ *ou* $\varrho_{jk}(U_j, U_k) \to 0$ *uniformément avec* $|k-j| \to \infty$ (ϱ_{jk} *étant le coefficient de corrélation entre les variables aléatoires* X_j *et* X_k), *alors la condition* (b) *suffit pour que l'on ait la convergence* (4).

COROLLAIRE 2. *Si une suite de variables aléatoires* $\{X_n\}$ *est telle que* $\mathrm{E}X_n^2 \leqslant L^2$ *pour tout n et satisfait à la condition* (c), *alors*

$$(S_n - \mathrm{E}S_n)/n \xrightarrow{\mathrm{p}} 0 \text{ avec } n \to \infty, \tag{5}$$

c'est-à-dire que la suite $\{X_n\}$ *obéit à la loi faible des grands nombres.*

Démonstration. En vertu de l'hypothèse $\mathrm{E}X_n^2 \leqslant L^2$, les conditions (a) et (b) du théorème 2 sont satisfaites, ce qui implique (4). Remarquons que

$$|\mathrm{E}V_k| = |\mathrm{E}X_k I[|X_k| \geqslant n\varepsilon]| \leqslant \frac{\mathrm{E}X_k^2 I[|X_k| \geqslant n\varepsilon]}{n\varepsilon}$$

$$\leqslant \frac{\mathrm{E}X_k^2}{n\varepsilon} \leqslant \frac{L^2}{n\varepsilon} \to 0 \qquad \text{lorsque } n \to \infty;$$

on a donc a fortiori $\mathrm{E}S_n^{\cdot\cdot}/n \to 0$, ce qui entraîne (5) en vertu de (4).

THÉORÈME 3. *Si une suite de variables aléatoires* $\{X_n\}$ *satisfait aux conditions* (a), (b) *et*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \sup_k |\mathrm{Cov}(U_k, U_{j+k})| = 0, \tag{6}$$

on a la convergence (4).

Ce théorème résulte aussitôt de ce que (6) et (a) entraînent l'égalité

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} \mathrm{Cov}(U_j, U_k) = 0,$$

donc également (4) en vertu de (b).

THÉORÈME 4. *Si une suite de variables aléatoires* $\{X_n\}$ *satisfait aux conditions* (a), (b) *et*

$$(7)\qquad \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sup|\mathrm{E}'_j(U_{j+1})-\mathrm{E}\,U_{j+1}|\to 0 \quad \textit{avec } n\to\infty,$$

on a (4).

Démonstration. On a en vertu du lemme A établi dans [4]

$$(8)\qquad |\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\mathrm{Cov}(U_j,U_k)|\leqslant\sum_{j=1}^{n}\mathrm{E}\,|S'_{j-1}-\mathrm{E}\,S'_{j-1}|\sup|\mathrm{E}'_j(U_{j+1})-\mathrm{E}\,U_{j+1}|$$
$$\leqslant\max_{j<n}\mathrm{E}\,|S'_{j-1}-\mathrm{E}\,S'_{j-1}|\sum_{j=1}^{n}\sup|\mathrm{E}'_j(U_{j+1})-\mathrm{E}\,U_{j+1}|.$$

Le quotient $\max_{j<n}\mathrm{E}\,|S'_{j-1}-\mathrm{E}\,S'_{j-1}|/n$ étant borné en vertu de (a), la condition (7) entraîne l'égalité

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\mathrm{Cov}(U_j,U_k)=0.$$

Il en résulte (4) en vertu de (a) et (b).

Remarques. Le corollaire 1 renforce les théorèmes connus (voir problèmes 6 et 7 dans [2], p. 207), tandis que le corollaire 2 renforce le théorème analogue de [1]. Les théorèmes 2, 3 et 4 donnent des conditions de stabilité de S_n/n sans l'hypothèse sur les moments des variables aléatoires; ils renforcent donc les théorèmes correspondants de [1] qui ne donnent des conditions pour que la loi faible des grands nombres soit satisfaite que dans le cas des variances également bornées. Ajoutons que (comme il a été fait dans le corollaire 2) si $\mathrm{E}\,X_n^2\leqslant L^2$, les conditions des théorèmes 2, 3 et 4 deviennent des conditions pour que la suite $\{X_n\}$ obéisse à la loi faible des grands nombres.

4. Loi faible des grands nombres. L'espérance mathématique $\mathrm{E}\,X_n$ figurant dans la définition de la loi faible des grands nombres, c'est l'inégalité (II′) qui est plus commode pour énoncer les théorèmes concernant cette loi. Les théorèmes qui vont être envisagés sont en principe des reliquats de ceux qui précèdent; leurs démonstrations peuvent donc être omises. Leurs énoncés ne sont formulés ici que pour indiquer la différence entre eux et certains énoncés classiques connus de la littérature.

THÉORÈME 2′. *Si une suite de variables aléatoires* $\{X_n\}$ *où* $n=1,2,\ldots,$ *est telle qu'il existe l'espérance mathématique* $\mathrm{E}\,X_n$ *et satisfait aux conditions*

(a′) $\sigma^2 Y_k\leqslant L^2$ *pour* $k=1,2,\ldots$ *où* L *est une constane positive,* (b') $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}[X_k^{02}/(n^2+X_k^{02})] \to 0$ *avec* $n \to \infty$,

(c') *il existe pour tout* $\eta > 0$ *un entier positif* m *tel que*

$$\left|\frac{1}{n-m+1}\sum_{j=m}^{n}\mathrm{Cov}(Y_k, Y_{k+j})\right| < \eta/2 \quad \textit{pour tout } n > m \textit{ et } k = 1, 2, \ldots,$$

(d) $\mathrm{E}S_n^*/n \to 0$ *avec* $n \to \infty$,

on a $S_n^0/n \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$ *lorsque* $n \to \infty$.

THÉORÈME 3'. *Sous les conditions* (a'), (b') *et* (d) *du théorème* 2', *la condition*

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sup|\mathrm{Cov}(Y_k, Y_{j+k})| \to 0 \qquad \textit{avec } n \to \infty,$$

est suffisante pour que la suite $\{X_n\}$ *obéisse à la loi faible des grands nombres.*

THÉORÈME 4'. *Sous les conditions* (a'), (b') *et* (d) *du théorème* 2', *la condition*

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sup|\mathrm{E}_j'(U_{j+1}) - \mathrm{E}\,U_{j+1}| \to 0 \qquad \textit{avec } n \to \infty$$

est suffisante pour que la suite $\{X_n\}$ *obéisse à la loi faible des grands nombres.*

COROLLAIRE 3. *Si une suite de variables aléatoires indépendantes* $\{X_n\}$ *avec les espérances mathématiques finies* $\mathrm{E}X_n$ *satisfait aux conditions* (b') *et* (d), *elle obéit à la loi faible des grands nombres.*

Remarques. Le théorème de Tchebycheff affirme qu'une suite de variables aléatoires indépendantes $\{X_n\}$ obéit à la loi faible des grands nombres si

$$\sum_{k=1}^{n}\sigma^2 X_k/n^2 \to 0.$$

Le corollaire précédent est un renforcement naturel de ce résultat classique. Il suffit de remarquer que la condition

$$\sum_{k=1}^{n}\sigma^2 X_k/n^2 \to 0$$

implique les conditions (b') et (d). En effet,

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}\left[\frac{X_k^{02}}{n^2+X_k^{02}}\right] \leqslant \sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}\,\frac{X_k^{02}}{n^2} = \sum_{k=1}^{n}\sigma^2 X_k/n^2 \to 0 \qquad \text{lorsque } n \to \infty,$$

$$\left|\mathrm{E}\,\frac{S_n^*}{n}\right| = \frac{1}{n}\,|\mathrm{E}\,S_n^{**}| \leqslant \sum_{k=1}^{n}|\mathrm{E}Z_k|/n \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma^2 X_k}{n^2\,\varepsilon} \to 0 \qquad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Remarquons que, de même, dans le cas de variables à variances également bornées (le cas considéré dans le travail [1]), les conditions (a′) et (b′) sont satisfaites et la convergence $\mathrm{E}S_n^{**}/n \to 0$ résulte de l'inégalité

$$\left|\mathrm{E}\frac{S_n^*}{n}\right| = \frac{1}{n}|\mathrm{E}S_n^{**}| \leqslant \sum_{k=1}^{n}|\mathrm{E}Z_k|/n$$
$$\leqslant \frac{1}{n^2\varepsilon}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}|Z_k|^2 \leqslant \frac{L^2}{n\varepsilon} \to 0 \quad \text{pour } n\to\infty.$$

5. Inégalités utilisées dans l'étude de la convergence presque sûre des séries aléatoires. Les variables aléatoires U_k, V_k, Y_k et Z_k qui vont être envisagées à présent ont été définies dans 2.

LEMME 2. *Si les variables aléatoires X_k où $k = 1, 2, \ldots, n$ sont telles qu'il existe pour tout $\delta > 0$ un entier positif N pour lequel on a*

$$\sum_{j=1}^{n}\sup|\mathrm{E}_k'(U_{j+k}) - \mathrm{E}U_{j+k}| < \delta \tag{9}$$

ou (en supposant l'existence de l'espérance mathématique $\mathrm{E}X_j$)

$$\sum_{j=1}^{n}\sup|\mathrm{E}_k'(Y_{j+k}) - \mathrm{E}Y_{j+k}| < \delta \tag{10}$$

pour $n > N$ et pour tout $k = 1, 2, \ldots$, alors on a pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n > N$

$$\text{(III)}\qquad P[\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k - \mathrm{E}S_k^{\cdot}| \geqslant 2\varepsilon]$$
$$\leqslant 2M\left[\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}\frac{X_k^2}{\varepsilon^2+X_k^2} + \varepsilon^{-2}\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\mathrm{Cov}(U_j, U_k)\right],$$

$$\text{(IV)}\qquad P[\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k^0 - \mathrm{E}S_k^*| \geqslant 2\varepsilon]$$
$$\leqslant 2M\left[\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}\frac{X_k^{02}}{\varepsilon^2+X_k^{02}} + \varepsilon^{-2}\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\mathrm{Cov}(Y_j, Y_k)\right]$$

respectivement ($M > 1$ étant une constante).

Démonstration. Il suffit d'établir (III); la démonstration de (IV) est analogue.

Le „lemme généralisé de Kolmogoroff" (voir [1] et [4]) étant applicable aux variables aléatoires U_k, on a

$$P[\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k^{\cdot} - \mathrm{E}S_k^{\cdot}| \geqslant \varepsilon] \leqslant M\sigma^2 S_n^{\cdot}/\varepsilon^2.$$

Mais

$$\sigma^2 S_n^{\cdot}/\varepsilon^2 = \varepsilon^{-2}\sum_{k=1}^{n}\sigma^2 U_k + 2\varepsilon^{-2}\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\mathrm{Cov}(U_j, U_k)$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\varepsilon^{-2}\mathrm{E}\,U_k^2 + 2\varepsilon^{-2}\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\mathrm{Cov}(U_j, U_k)$$

$$\leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}\,\frac{X_k^2}{\varepsilon^2+X_k^2}\,I[|X_k|<\varepsilon] + 2\varepsilon^{-2}\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\mathrm{Cov}(U_j, U_k).$$

Ainsi

$$P[\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k^{\cdot}-\mathrm{E}S_k^{\cdot}|\geqslant\varepsilon]$$

$$\leqslant 2M\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}\,\frac{X_k^2}{\varepsilon^2+X_k^2}\,I[|X_k|<\varepsilon] + 2M\varepsilon^{-2}\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\mathrm{Cov}(U_j, U_k).$$

Or

$$P[\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k^{\cdot\cdot}|\geqslant\varepsilon]\leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}\,\frac{X_k^2}{\varepsilon^2+X_k^2}\,I[|X_k|\geqslant\varepsilon]$$

(voir [6]), d'où

$$P[\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k-\mathrm{E}S_k^{\cdot}|\geqslant 2\varepsilon]\leqslant P[\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k^{\cdot}-\mathrm{E}S_k^{\cdot}|\geqslant\varepsilon]+P[\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k^{\cdot\cdot}|\geqslant\varepsilon]$$

$$\leqslant 2M\left[\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}\,\frac{X_k^2}{\varepsilon^2+X_k^2}+\varepsilon^{-2}\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\mathrm{Cov}(U_j, U_k)\right],$$

ce qui achève la démonstration.

Les cas particuliers suivants sont à noter:

D. Lorsque les variables aléatoires X_k où $k=1,2,\ldots,n$ satisfont à la condition (9) du lemme 2 et que X_k sont symétriques par rapport à l'origine ou $\mathrm{E}\,U_k=0$ pour $k=1,2,\ldots,n$, on a

$$\text{(D)}\qquad P[\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|\geqslant 2\varepsilon]\leqslant 2M\left[\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}\,\frac{X_k^2}{\varepsilon^2+X_k^2}+\varepsilon^{-2}\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\mathrm{E}\,U_jU_k\right];$$

et, en supposant l'existence de l'espérance mathématique $\mathrm{E}X_j$,

$$\text{(D')}\qquad P[\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k^0|\geqslant 2\varepsilon]\leqslant 2M\left[\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}\,\frac{X_k^{02}}{\varepsilon^2+X_k^{02}}+\varepsilon^{-2}\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\mathrm{E}\,Y_jY_k\right]$$

lorsque X_k satisfont à la condition (10) et sont symétriques par rapport à l'espérance mathématique ou $\mathrm{E}\,Y_k=0$ pour $k=1,2,\ldots,n$.

E. Sous la condition (9) ou (10) du lemme 2, on a

$$\text{(E)}\qquad P[\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k-\mathrm{E}S_k^{\cdot}|\geqslant 2\varepsilon]\leqslant 2M\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}\frac{X_k^2}{\varepsilon^2+X_k^2},$$

$$\text{(E')}\qquad P[\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k^0-\mathrm{E}S_k^*|\geqslant 2\varepsilon]\leqslant 2M\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}\frac{X_k^{02}}{\varepsilon^2+X_k^{02}},$$

si $\mathrm{Cov}(U_j, U_k)\leqslant 0$ ou $\mathrm{Cov}(Y_j, Y_k)\leqslant 0$ respectivement.

F. Lorsque les X_k où $k=1,2,\ldots,n$ satisfont à la condition (9) du lemme 2 et $\mathrm{E}U_k=0$ pour $k=1,2,\ldots,n$, les U_k étant orthogonales deux à deux, ou bien que elles satisfont à la condition (10) et $\mathrm{E}Y_k=0$, les Y_k étant orthogonales deux à deux, on a respectivement

$$\text{(F)}\qquad P[\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|\geqslant 2\varepsilon]\leqslant 2M\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}\frac{X_k^2}{\varepsilon^2+X_k^2},$$

$$\text{(F')}\qquad P[\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k^0|\geqslant 2\varepsilon]\leqslant 2M\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}\frac{X_k^{02}}{\varepsilon^2+X_k^{02}}.$$

Remarque. Dans le cas de variables aléatoires indépendantes, l'inégalité (F') donne, sous les conditions F, mais sans aucune hypothèse relative à la variance, une borne plus avantageuse que celle donnée par l'inégalité classique de Kolmogoroff ([5], p. 235).

THÉORÈME 5. *Lorsqu'une suite de variables aléatoires $\{X_n\}$ est telle que les différences $U_n-\mathrm{E}U_k$ sont orthogonales deux à deux et que l'on a les inégalités*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{E}\left[\frac{X_n^2}{1+X_n^2}\right]<\infty,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\sup|\mathrm{E}_n'(U_{n+1})-\mathrm{E}U_{n+1}|<\infty,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{E}U_n<\infty,$$

alors la série $\{X_n\}$ converge presque sûrement.

Démonstration. La convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sup|\mathrm{E}_n'(U_{n+1})-\mathrm{E}U_{n+1}|$$

entraîne la convergence uniforme

$$\sum_{j=m}^{n+m}\sup|\mathrm{E}_k'(U_{j+k})-\mathrm{E}U_{j+k}|\to 0$$

suivant $k=1,2,\ldots$ avec $m\to\infty$ et $n\to\infty$. Reste à appliquer l'inégalité (III).

THÉORÈME 5'. *Lorsqu'une suite de variables aléatoires $\{X_n\}$ est telle que les différences $Y_n-\mathrm{E}Y_n$ sont orthogonales deux à deux et que l'on a les inégalités*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{E}\left[\frac{X_n^{02}}{1+X_n^{02}}\right]<\infty,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\sup|\mathrm{E}_n'(Y_{n+1})-\mathrm{E}Y_{n+1}|<\infty,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{E}Y_n<\infty,$$

alors la série $\sum X_n^0$ converge presque sûrement.

La démonstration résulte de l'inégalité (IV) par un raisonnement analogue à celui qui précède.

Remarque. Le théorème 5′ renforce et généralise le théorème de Kolmogoroff (voir [5], p. 236) en vertu duquel une condition suffisante pour la convergence presque sûre de la série $\sum X_n^0$ est, dans le cas de variables aléatoires indépendantes, la convergence de la série $\sum \sigma^2 X_n$. En effet, l'hypothèse de l'indépendance des variables aléatoires et la convergence de la série $\sum \sigma^2 X_n$ entraînent les hypothèses du théorème 5′ (mais pas réciproquement).

Théorème 6. *Si une suite de variables aléatoires $\{X_n\}$ satisfait aux inégalités*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\left[\frac{X_n^2}{1+X_n^2}\right] < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \sup |\mathrm{E}_n'(U_{n+1}) - \mathrm{E}\, U_{n+1}| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\, U_n < \infty,$$

la série $\sum X_n$ converge presque sûrement.

Démonstration. En vertu de (8) et vu que $\mathrm{E}|S_{j-1}^{\cdot}| < \varepsilon(j-1)$, l'inégalité (III) peut être écrite sous la forme

$$P[\max_{k \leqslant n} |S_k - \mathrm{E}\, S_k^{\cdot}| \geqslant 2\varepsilon]$$

$$\leqslant 2M\left\{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\, \frac{X_k^2}{\varepsilon^2+X_k^2} + 2\varepsilon^{-1} \sum_{k=1}^{n} k \sup |\mathrm{E}_k'(U_{k+1}) - \mathrm{E}\, U_{k+1}|\right\}.$$

Le membre droit en étant, en vertu des hypothèses, une série convergente, la convergence de la série $\sum X_n$ est presque sûre.

Le théorème analogue peut être formulé dans le cas de l'existence de l'espérance mathématique.

6. Stabilité presque sûre de S_n/n, S_n^0/n, S_n^0/n^a et S_n/n^a. Dans le but d'établir des conditions pour que

$$(S_n - \mathrm{E}\, S_n^{\cdot})/n \xrightarrow{\text{p.s.}} 0, \quad (S_n^0 - \mathrm{E}\, S_n^*)/n \xrightarrow{\text{p.s.}} 0 \quad \text{et} \quad S_n^0/n \xrightarrow{\text{p.s.}} 0,$$

l'abréviation p.s. désignant la convergence presque sûre, ou des conditions pour la convergence presque sûre des moyennes généralisées, posons

$$U_k = X_k I[|X_k| < n^a \varepsilon], \qquad V_k = X_k I[|X_k| \geqslant n^a \varepsilon],$$
$$Y_k = X_k^0 I[|X_k^0| < n^a \varepsilon] \quad \text{et} \quad Z_k = X_k^0 I[|X_k^0| \geqslant n^a \varepsilon].$$

Lemme 2′. *Si les variables aléatoires X_k où $k = 1, 2, \ldots, n$ sont telles qu'il existe un a tel que $0 < a \leqslant 1$ et que l'on puisse associer à tout $\delta > 0$ un entier positif N tel que l'on ait pour tout $n > N$ et pour tout $k = 1, 2, \ldots$*

$$\sum_{j=1}^{n} \sup |\mathrm{E}_k'(U_{j+k}) - \mathrm{E}\, U_{j+k}| < n^a \delta$$

ou, en supposant l'existence de l'espérance mathématique $\mathrm{E}X_j$,

$$\sum_{j=1}^{n} \sup |\mathrm{E}'_k(Y_{j+k}) - \mathrm{E}\, Y_{j+k}| < n^a \delta,$$

alors on a pour tout $\varepsilon > 0$, *pour tout* $n > N$ *et pour tout* $k = 1, 2, \ldots$

$$\text{(III}'\text{)} \quad P[\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k - \mathrm{E}\, S'_k| \geqslant 2n^a \varepsilon]$$

$$\leqslant 2M \left[\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\, \frac{X_k^2}{n^{2a}\varepsilon^2 + X_k^2} + n^{-2a}\varepsilon^{-2} \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} \mathrm{Cov}(U_j, U_k) \right],$$

$$\text{(IV}'\text{)} \quad P[\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k^0 - \mathrm{E}\, S_k^*| \geqslant 2n^a \varepsilon]$$

$$\leqslant 2M \left[\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\, \frac{X_k^{02}}{n^{2a}\varepsilon^2 + X_k^{02}} + n^{-2a}\varepsilon^{-2} \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} \mathrm{Cov}(Y_j, Y_k) \right]$$

respectivement ($M > 1$ *étant une constante*).

Le lemme 2′ permet de renforcer les resultats du travail [1] qui concernent la loi forte des grands nombres.

THÉORÈME 7. *Si une suite de variables aléatoires* $\{X_n\}$ *est telle que l'espérance mathématique finie* $\mathrm{E}X_n$ *existe et satisfait aux conditions*

$$\text{(e)} \qquad \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}[X_k^{02}/(n^{2a} + X_k^{02})] = O(n^{1-2a}),$$

$$\text{(f)} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \sup |\mathrm{E}'_j(Y_{j+k}) - \mathrm{E}\, Y_{j+k}| < \infty \quad \textit{et} \quad \sigma^2 Y_j \leqslant L^2,$$

$$\text{(g)} \qquad \mathrm{E}\, S_n^*/n^a \to 0,$$

on a pour tout $a > \frac{1}{2}$

$$S_n^0/n^a \xrightarrow{\text{p.s.}} 0 \quad \textit{lorsque } n \to \infty.$$

Démonstration. Les hypothèses (e) et (f) entraînent en vertu de l'inégalité (IV′) l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$P[\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k^0 - \mathrm{E}\, S_k^*| \geqslant 2\varepsilon n^a] \leqslant c n^{1-2a},$$

ce qui permet de démontrer (voir [1], démonstration du théorème 4) que

$$(S_n^0 - \mathrm{E}\, S_n^*)/n^a \xrightarrow{\text{p.s.}} 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Vu que $\mathrm{E}\, S_n^*/n^a \to 0$, on a donc la convergence presque sûre qu'il s'agissait de démontrer.

L'inégalité (III′) permet aussi de formuler le théorème analogue suivant sans l'hypothèse de l'existence de l'espérance mathématique finie.

THÉORÈME 7'. *Si une suite de variables aléatoires* $\{X_n\}$ *satisfait aux conditions*

$$\text{(e')} \qquad \sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}\,[X_k^2/(n^{2a}+X_k^2)] = O(n^{1-2a}),$$

$$\text{(f')} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \sup|\mathrm{E}_j'(U_{j+1})-\mathrm{E}\,U_{j+1}| < \infty \quad \textit{et} \quad \sigma^2 U_j \leqslant L^2,$$

$$\text{(g')} \qquad \mathrm{E}\,S_n^{\cdot}/n^a \to 0,$$

on a pour tout $a > \frac{1}{2}$

$$S_n/n^a \overset{\text{p.s.}}{\to} 0 \quad \textit{lorsque } n \to \infty.$$

Remarque. Pour les variables aléatoires dépendantes ayant des variances également bornées ($\sigma^2 X_n \leqslant L^2$) (et qui ont été envisagées dans le travail [1]), les conditions (e) et (g) sont satisfaites; or la condition (f) exige la convergence de la série qui y est définie pour les variables aléatoires tronquées, tandis que dans le travail [1] cette condition a été supposée satisfaite pour les variables aléatoires entières.

THÉORÈME 8. *Si une suite de variables aléatoires* $\{X_n\}$ *satisfait pour tout* $\delta > 0, k = 1, 2, \ldots,$ *et* $n > N$ *aux conditions*

$$\text{(h)} \qquad \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}[X_k^{02}/(n^2+X_k^{02})] = O(n^{a-1}) \quad \textit{où } 0 < a < 1,$$

$$\text{(i)} \qquad n^{-a} \sum_{j=1}^{n} \sup|\mathrm{E}_k'(Y_{j+k})-\mathrm{E}\,Y_{j+k}| < \delta \quad \textit{et} \quad \sigma^2 Y_j \leqslant L^2,$$

$$\text{(j)} \qquad \mathrm{E}\,S_n^*/n \to 0 \quad \textit{où } Y_k = X_k^0 I[|X_k^0| < n\varepsilon_1]$$

où ε_1 *est une constante arbitraire, alors* $S_n/n \overset{\text{p.s.}}{\to} 0$, *c'est-à-dire que la suite* $\{X_n\}$ *obéit à la loi forte des grands nombres.*

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 6 en remarquant que l'on a dans le cas considéré

$$P[\max_{k\leqslant n}|S_k^0-\mathrm{E}\,S_k^*| \geqslant 2n\varepsilon_1] \leqslant cn^{a-1}$$

pour tout $\varepsilon_1 > 0, C > 0$ étant une constante, et en appliquant le raisonnement employé dans la démonstration du théorème 5 de [1].

On peut formuler un théorème analogue sans aucune hypothèse relative aux espérances mathématiques.

THÉORÈME 8′. *Si une suite de variables aléatoires $\{X_n\}$ satisfait pour tout $\delta > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, et $n > N$ aux conditions*

$$\text{(h}'\text{)}\qquad \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}[X_k^2/(n^2+X_k^2)] = O(n^{a-1}) \quad \textit{où } 0 < a < 1,$$

$$\text{(i}'\text{)}\qquad n^{-a}\sum_{j=1}^{n} \sup|\mathrm{E}_k'(U_{j+k}) - \mathrm{E}\,U_{j+k}| < \delta \quad \textit{et } \sigma^2 U_j \leqslant L^2,$$

$$\text{(j}'\text{)}\qquad \mathrm{E}\,S_n^{\cdot}/n \to 0 \quad \textit{où } S_n^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} U_k,\ U_k = X_k I[|X_k| < n\varepsilon_1],$$

alors $S_n/n \xrightarrow{\text{p.s.}} 0$ *lorsque* $n \to \infty$.

Remarque. Pour certaines classes particulières de variables aléatoires, l'inégalité (IV′) permet de formuler des conditions plus avantageuses pour que la suite $\{X_n\}$ obéisse à la loi forte des grands nombres.

THÉORÈME 9. *Si une suite de variables aléatoires indépendantes $\{X_n\}$ est telle que $\sum \mathrm{E}[X_k^{02}/(k^2+X_k^{02})] < \infty$, on a la convergence*

$$\frac{S_n^0 - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\,X_k^0 I[|X_k^0| < k\varepsilon]}{n} \xrightarrow{\text{p.s.}} 0 \quad \textit{lorsque } n \to \infty.$$

COROLLAIRE 4. *Sous les conditions du théorème 9, la convergence*

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\,X_k^0 I[|X_k^0| < k\varepsilon]/n \to 0$$

est une condition suffisante pour que la loi forte des grands nombres soit satisfaite.

La démonstration du théorème 9 et celle du corollaire 4 résulte de l'inégalité (E′) et du lemme de Kronecker, en remplaçant dans cette inégalité X_k par X_k/k.

Remarques. Le corollaire 4 renforce le théorème de Kolmogoroff (voir [3], p. 238) en vertu duquel la convergence de la série $\sum \sigma^2 X_k/k^2$ est une condition suffisante pour la loi forte des grands nombres. Cela résulte des relations

$$\mathrm{E}\frac{X_k^{02}}{k^2+X_k^{02}} \leqslant \mathrm{E}\,X_k^{02}/k^2 = \sigma^2 X_k/k^2,$$

$$\sum_{k=1}^{n} |\mathrm{E}\,X_k^0 I[|X_k^0| < k\varepsilon]| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}|X_k^0| I[|X_k^0| \geqslant k\varepsilon]$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \sigma^2 X_k/k\varepsilon \to 0 \quad \text{avec } n \to \infty$$

lorsque $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma^2 X_k/k^2 < \infty$.

7. Remarques finales. Comme il a été signalé dans les remarques relatives aux théorèmes et aux corollaires, les résultats du travail présent comportent entre autres les cas connus des lois faible et forte des grands nombres. Cependant, l'attention peut être attirée parfois non seulement par la convergence en probabilité ou presque sûre de S_n^0/n, mais aussi par la rapidité de cette convergence. Or les inégalités établies dans ce travail étant, dans les cas considérés, plus précises que les inégalités classiques correspondantes, elles fournissent en même temps des renseignements plus exacts aussi sur la rapidité des convergences considérées. Plus encore, ces inégalités peuvent être utiles dans l'étude de la concordance et de la concordance presque sûre des estimateurs envisagés dans le travail [8] quand on n'admet aucune hypothèse sur les variances des variables aléatoires.

Les thèses de tous les théorèmes donnant des conditions pour que $(S_n - \mathrm{E}S_n^{\cdot})/n \xrightarrow{\mathrm{p}} 0$ ou $(S_n - \mathrm{E}S_n^{\cdot})/n \xrightarrow{\mathrm{p.s.}} 0$ et pour que $(S_n^0 - \mathrm{E}S_n^*)/n \xrightarrow{\mathrm{p}} 0$ ou $(S_n^0 - \mathrm{E}S_n^*) \xrightarrow{\mathrm{p.s.}} 0$ avec $n \to \infty$ peuvent être remplacées, sans en modifier les hypothèses, en thèses

$$S_n/n - \mu(S_n^{\cdot}/n) \xrightarrow{\mathrm{p}} 0, \qquad S_n/n - \mu(S_n^{\cdot}/n) \xrightarrow{\mathrm{p.s.}} 0,$$

$$S_n^0/n - \mu(S_n^*/n) \xrightarrow{\mathrm{p}} 0 \quad \text{ou } S_n^0/n - \mu(S_n^*/n) \xrightarrow{\mathrm{p.s.}} 0 \text{ avec } n \to \infty,$$

$\mu(X)$ désignant la médiane de X.

Cela résulte de l'inégalité $|\mu(X) - \mathrm{E}(X)| < \sqrt{2\sigma^2 X}$ en y remplaçant X par $S_n^{\cdot}/n$ ou S_n^*/n. Par exemple,

$$\left|\mu\left(\frac{S_n^*}{n}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{S_n^*}{n}\right)\right| \leqslant \sqrt{2\sigma^2 \frac{S_n^*}{n}}$$

$$\leqslant 2\left\{M\left[\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\, \frac{X_k^{02}}{n^2\varepsilon^2 + X_k^{02}} + n^{-2}\varepsilon^{-2} \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} \mathrm{Cov}(Y_j, Y_k)\right]\right\}^{1/2} \to 0.$$

TRAVAUX CITÉS

[1] I. Koźniewska, *Sur les lois des grands nombres pour les variables aléatoires dépendantes à variances également bornées*, Colloquium Mathematicum 10 (1963), p. 289-304.

[2] W. Feller, *An introduction to probability theory and its application, I*, New York 1957.

[3] P. Lévy, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Paris 1937.

[4] M. Loève, *Etude asymptotique des sommes de variables aléatoires liées*, Journal de mathématiques pures et appliquées 24 (1945), p. 249-318.

[5] — *Probability theory* (II edition), New York 1960.

[6] D. Szynal, *Certaines inégalités concernant les sommes et la convergence presque sûre des séries aléatoires*, Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences 263 (1966), série A, p. 923-926.
[7] — *Certaines inégalités du type de P. Lévy et leurs applications*, ibidem 264 (1967), p. 955-958.
[8] A. Wald, *Note on the consistency of the maximum likelihood estimate*, Annals of Mathematical Statistics 20 (1949), p. 595-601.

Reçu par la Rédaction le 29. 2. 1968