ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVI (1964)

Sur la réalisation dans l'espace affine d'une connexion linéaire sans torsion donnée sur une variété différentiable

par T. HUSKOWSKI (Wrocław)

Soit V_n une variété différentiable de classe C^3 avec une connexion linéaire sans torsion. Ce travail est consacré au problème d'existence dans l'espace affine, au nombre des dimensions suffisamement grand, d'une surface, sur laquelle on peut réaliser intégralement, en certain sens, la connexion donnée sur V_n.

On peut démontrer l'existence d'une telle surface (Théorème 1) si les conditions I et II données plus loin sont satisfaites. Le même problème est examiné pour la connexion riemanienne (Théorème 2).

1. Soit $E(V_n)$ l'espace fibré principal des repères affines de V_n de groupe structural $GL(n, R)$. Considérons un recouvrement de V_n par les voisinages U_a (a parcourt un ensemble des indices) munis des systèmes de coordonnées locales et au-dessus de chaque voisinage U_a choisissons une section locale de classe C^2 de $E(V_n)$ ([1]). Pour chaque point $u \in U_a$ nous avons alors un repère R^u formé des vecteurs et un corepère dual formé des formes $\omega^i(u, du)$, où u^i [1] désignent les coordonnées locales dans U_a. La connexion lineaire sur V_n peut être définie par la donnée pour chaque U_a des matrices des formes $\omega^i_j(u, du)$ de classe C^2. Les formes ω satisfont dans l'intersection de deux voisinages à la condition classique de cohérence

$$(1) \qquad \omega^{i'} = A^{i'}_i \omega^i, \quad \omega^{i'}_{j'} = A^{i'}_i \omega^i_j A^j_{j'} + A^{i'}_j dA^j_{j'}.$$

La forme de torsion est par hypothèse nulle

$$(2) \qquad d\omega^i + \omega^i_j \wedge \omega^j = 0.$$

Nous désignerons encore la forme de courbure de la connexion par

$$(3) \qquad \Omega^i_j = d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j = R^i_{klj}\omega^k \wedge \omega^l.$$

---

(1) Dans tout le travail $i, j, k = 1, \dots, n$, $r, s, t = 1, \dots, n+N$, $\alpha, \beta, \gamma = n+1, \dots, \dots, n+N$.

Supposons maintenant deux conditions

CONDITION I. *Il existe un nombre N tel, que chaque voisinage U_a peut être plongé dans l'espace affine A_{n+N}. Autrement dit, dans chaque voisinage U_a on peut définir les formes ω_i^a, ω_a^i et ω_β^a de classe C^2 qui, avec les formes ω^i, ω_j^i satisfont aux relations*

$$(4)\qquad \begin{gathered} \omega^j \wedge \omega_j^a = 0, \quad \omega_j^a \wedge \omega_a^k = \Omega_j^k, \\ d\omega_i^a + \omega_s^a \wedge \omega_i^s = 0, \quad d\omega_a^i + \omega_s^i \wedge \omega_a^s = 0, \quad d\omega_\beta^a + \omega_s^a \wedge \omega_\beta^s = 0. \end{gathered}$$

Les équations (2), (3) et (4) se déduisent des équations de structure de l'espace A_{n+N} si l'on y pose $\omega^a = 0$.

Remarque. Si la connexion est analytique, il résulte du travail de M. G. F. Łaptiev [2] qu'il existe un recouvrement de V_n tel, que la condition I est remplie pour $N \geqslant (n^2+2n-1)/2$.

CONDITION II. *Soit $U_a \cap U_b \neq 0$. Admettons que dans chaque point $u \in U_a \cap U_b$ existe une matrice non singulière $B_\beta^a(u)$, de classe C^2 telle, que les formes ω dans U_a et les formes ω' dans U_b sont liées par les relations* (1) *et les formes $\omega_{i'}^{a'}$, $\omega_{a'}^{i'}$, $\omega_{\beta'}^{a'}$ par les relations*

$$(5)\qquad \omega_{i'}^{a'} = A_{i'}^i \omega_i^a B_a^{a'}, \quad \omega_{a'}^{i'} = B_{a'}^a \omega_a^i A_i^{i'}, \quad \omega_{a'}^{\beta'} = B_{a'}^a \omega_a^\beta B_\beta^{\beta'} + B_a^{\beta'} dB_{a'}^a.$$

Supposons que u appartient aussi au voisinage U_c. Les matrices $B_a^{a'}$, $B_a^{a''}$, $B_{a'}^{a''}$ au moyen desquelles on exprime les formes ω' par ω, ω'' par ω et ω'' par ω' doivent satisfaire à la relation

$$(6)\qquad B_a^{a''} = B_{a'}^{a''} B_a^{a'}.$$

Pour faire voir le sens géométrique de la condition II, considérons dans A_{n+N} la surface $\mathfrak{N}_a$ qui s'obtient par le plongement de U_a. Dans chaque point de $\mathfrak{N}_a$ nous avons donc un repère formé de n vecteurs I_i situés dans l'hyperplan tangent à $\mathfrak{N}_a$ et N vecteurs I_a situés dans l'hyperplan supplémentaire, qu'on peut nommer l'hyperplan normal à la surface. Les composantes du déplacement infinitésimal de ce repère sont les formes ω_s^r. Soit $S \in \mathfrak{N}_a$ l'image du point $u \in U_a \cap U_b$. Faisons dans une voisinage de S les transformations $I_{i'} = A_{i'}^i I_i$, $I_{a'} = B_{a'}^a I_a$. Les composantes du déplacement infinitésimal du nouveau repère formé des vecteurs $I_{i'}, I_{a'}$ sont les $\omega_{s'}^{r'}$.

Pour chaque voisinage U_a prenons maintenant le produit cartésien $Q_a = U_a \times A_{n+N} \times K$, où K est l'espace des matrices nonsingulières $\|v_s^r\|$ de degré $n+N$. Les coordonnées du point $P \in Q_a$ sont donc (u^i, x^r, v_s^r).

Considérons en Q_a le système des équations

$$(7)\qquad dx^r = \omega^i v_i^r, \quad dv_s^r = \omega_s^t v_t^r.$$

On peut démontrer le lemme suivant:

Lemme 1. *Le système des équations* (7) *est complètement intégrable et pour la surface integrale à n dimensions $\mathfrak{M}_a$ de ce système la projection π: $(u^i, x^r, v_s^r) \to u^i$ est un homéomorfisme.*

Démonstration. Considérons d'abord le système (7) dans l'espace $Q'_a = U_a \times A_{n+N} \times K'$, où K' est l'espace de toutes les matrices $\|v_s^r\|$ (même les singulières). Dans Q' le système (7) est complètement intégrable ce qui résulte des formules (2), (3) et (4). Ainsi par le point $P \in Q'_a$ passe la surface intégrale à n-dimension, et au dessous de chaque point (u^i) il y a un seul point de $\mathfrak{M}_a$. Il s'en suit que la projection π est un homéomorfisme, car les fonctions $x^s(u^i)$ et $v_s^r(u^i)$ sont sur $\mathfrak{M}_a$ tout au moins de classe C^1.

Notons maintenant, que lorsque $v = |v_j^i| \neq 0$ dans le point P, alors dans un point quelconque $P_1 \in Q'_a$ on a aussi $v \neq 0$. Pour le démontrer joignons P et P_1 par une chemin $u^i(t)$, $x^s(t)$, $v_s^r(t)$ de classe C^1 sur $\mathfrak{M}_a$. D'après les equations (7) nous avons $dv = v(t) \cdot \omega_r^r(t, dt) = v(t) \cdot \varphi(t) dt$ et par suite,

$$v = \exp\Big(\int_{t(P)}^{t(P_1)} \varphi(t) dt \Big) .$$

Or, dans P_1 il est aussi $v \neq 0$. Nous pouvons donc négliger les points de Q' pour lesquels $|v_s^r| = 0$; nous recevons alors l'ensemble Q et tout ce qu'on a dit ci-dessus sur $\mathfrak{M}_a$ reste valable.

Des produits Q_a nous construisons maintenant un autre espace fibré de base V_n.

Supposons que $U_a \cap U_b = 0$. Nous allons identifier les deux points $P(u^i, x^r, v_s^r) \in Q_a$ et $P'(u^{i'}, x^{r'}, v_{s'}^{r'}) \in Q_b$ qui sont au dessus d'un point $u \in U_a \cap U_b$ lorsque pour $r' = r$

$$(8) \qquad x^{r'} = x^r, \quad v_{i'}^{r'} = \frac{\partial u^k}{\partial u^{i'}} v_k^r = A_{i'}^k v_k^r , \quad v_{\alpha'}^{r'} = B_{\alpha'}^{\beta} v_{\beta}^r .$$

Désignons cette transformation par T_{ab}.

Pour trois voisinages U_a, U_b, U_c dont l'intersection est non vide il est évidemment $T_{ac} = T_{cb} T_{ba}$. Or, les produits Q_a donnent l'espace fibré — nous le designons par $E'(V_n)$ — à fibre $A_{n+N} \times K$ et à groupe de structure qui se compose des transformations T_{ab}. Dans chaque produit $Q_a \subset E'(V_n)$ le système (7) definit la famille des surfaces integrales $\mathfrak{M}_a$ à n dimensions.

Démontrons maintenant le

Lemme 2. *Avec l'identification* (8) *les points de la surface $\mathfrak{M}_a$ au dessus du produit $U_a \cap U_b$ s'identifient avec les points d'une surface $\mathfrak{M}_b$. On peut dire, que les surfaces $\mathfrak{M}_a$ et $\mathfrak{M}_b$ se confondent sur le produit $U_a \cap U_b$.*

Démonstration. Les surfaces $\mathfrak{M}_b$ dans Q_b sont des intégrales du système

$$dx^{r'} = \omega^{i'} v_{i'}^{r'}, \qquad dv_{s'}^{r'} = \omega_{s'}^{t'} v_{t'}^{r'} . \tag{9}$$

Dans $U_a \cap U_b$ les formes ω et ω' satisfont aux relations (1) et (5). Il suffit donc de montrer que $dx^{r'}$ et $dv_{s'}^{r'}$ déterminés par (9), sont égales aux différentielles $dx^{r'}$ et $dv_{s'}^{r'}$ calculées de (8) sous le condition que dx^r et dv_s^r satisfont (7). Alors $(r = r')$

$$\begin{aligned}
dx^{r'} &= \omega^{i'} v_{i'}^{r'} = A_j^{i'} \omega^j A_{i'}^k v_k^r = \omega^k v_k^r = dx^r ,\\
dv_{i'}^{r'} &= \omega_{i'}^{t'} v_{t'}^{r'} = \omega_{i'}^{k'} v_{k'}^{r'} + \omega_{i'}^{a'} v_{a'}^{r'}\\
&= (A_{i'}^h \omega_h^m A_m^{k'} + dA_i^h A_h^{k'}) A_{k'}^j v_j^r + A_{i'}^k \omega_k^\beta B_a^{a'} B_{a'}^\gamma v_\gamma^r\\
&= A_{i'}^h \omega_h^j v_j^r + dA_{i'}^j v_j^r + A_j^k \omega_k^a v_a^r = d(A_{i'}^k v_k^r) ,\\
dv_{a'}^{r'} &= \omega_{a'}^{t'} v_{t'}^{r'} = \omega_{a'}^{i'} v_{i'}^{r'} + \omega_{a'}^{\beta'} v_{\beta'}^{r'}\\
&= B_{a'}^\beta \omega_\beta^k A_k^{i'} A_{i'}^m v_m^r + dB_{a'}^\beta B_\beta^{\gamma'} B_{\gamma'}^\gamma v_\gamma^r + B_{a'}^\gamma \omega_\gamma^\beta B_\beta^{\beta'} B_{\beta'}^\delta v_\delta^r\\
&= B_{a'}^\gamma \omega_\gamma^k v_k^r + B_{a'}^\gamma \omega_\gamma^\beta v_\beta^r + dB_{a'}^\gamma v_\gamma^r = d(B_{a'}^\beta v_\beta^r) ,
\end{aligned}$$

c. q. f. d.

Revenons au système (7) qui est défini sur tout l'espace $E'(V_n)$. Considérons la surface intégrale maxima $\mathfrak{M}$ de ce système qui passe par un point $P \in E'(V_n)$ (c'est-à-dire la surface intégrale qui passe par P et qui contient chaque surface intégrale de ce système passant par P). On peut montrer facilement que $\mathfrak{M}$ est l'espace de recouvrement de la variété V_n.

Maintenant nous allons définir une projection f de la surface $\mathfrak{M}$ dans l'espace affine A_{n+N}.

Soit $\mathfrak{M}_a$ une surface contenue dans $\mathfrak{M}$. Les coordonnées d'un point $P \in \mathfrak{M}_a$ sont u^i, $x^r(u)$, $v_s^r(u)$. Dans le point P l'un au moins des jacobiens $J = \left|\dfrac{\partial x^r}{\partial u^i}\right|$ est différent de zéro (l'indice p parcourt n valeurs choisies parmi les nombres $1, \ldots, n+N$). En effet, posons $\omega^i = a_k^i du^k$ dans les équations (7) ($|a_k^i| \neq 0$). Nous obtiendrons ainsi

$$\left|\frac{\partial x^p}{\partial u^i}\right| = |a_i^j v_j^p| = |a_i^j| \cdot |v_j^p| .$$

Si $|v_s^r| \neq 0$, il sera $|v_j^p| \neq 0$ pour un au moins système de valeurs p, de même $J \neq 0$. Soit Ω un voisinage du point P dans lequel $J \neq 0$. La projection

$$f\colon\ (u^i, x^r, v_s^r) \to x^r$$

du voisinage Ω dans l'espace A_{n+N} donne une feuille de surface dans A_{n+N}. Ainsi $f(\mathfrak{M}_a) = \mathfrak{N}_a$ c'est une surface dans A définie sur U_a.

Prenons maintenant dans le point $S \in \mathfrak{N}_a$ le système des vecteurs I_s aux coordonnées $v_s^r(u)$. D'après les formules (7) les vecteurs I_t sont tangents à la surface $\mathfrak{N}_a$ et les vecteurs I_a sont situé dans l'hyperplan normal. Les formes de la connexion induite sur $\mathfrak{N}_a$ sont donc les ω_j^i.

Considérons la projection f pour toute la surface $\mathfrak{M}$. Nous obtenons ainsi dans l'espace A_{n+N} la surface $\mathfrak{N}$ sur laquelle les formes de connexion induite sont les formes de connexion ω_j^i de la variété V_n.

Nous pouvons donc énoncer le

THÉORÈME 1. *Si pour la variété differentiable V_n de classe C^3, sans torsion, les conditions* I *et* II *sont satisfaites, il existe dans l'espace affine A_{n+N} une surface $\mathfrak{N}$ définie sur V_n et telle que dans le point $S \in \mathfrak{N}$ qui correspond au point $u \in V_n$ les formes de connexion sur $\mathfrak{N}$ sont les formes de connexion de la variété V_n dans le point u. Autrement dit, l'objet de connexion dans le point S est égal au l'objet de connexion de la variété V_n dans le point u.*

Remarque. La surface $\mathfrak{N}$ est le f-image de la surface $\mathfrak{M}$ qui est un espace de recouvrement de V_n. Si la variété V_n est simplement connexe elle est homéomorphe de $\mathfrak{M}$. Si en outre la surface $\mathfrak{N}$ n'a pas des points d'autosection ou d'autocontact elle est un plongement de la variété V_n.

Ajoutons encore que la surface $\mathfrak{N}$ est déterminée jusqu'à sa position dans A_{n+N}. En effet, le système (7) etant complètement intégrable la surface $\mathfrak{M}$ est déterminée par le point $P(u_0^i, x_0^r, v_{s,0}^r)$ c'est-à-dire la surface $\mathfrak{N}$ est déterminée par le point (x_0^r) et le repère formé des vecteurs $I_s(v_{s,0}^r)$.

2. On peut appliquer les raisonnements du n° 1 à la variété riemannienne V_n à métrique ds^2 de classe C^3. Dans ce cas, les repères R^u sur V_n étant orthonormales, on a $\omega_i^j = -\omega_j^i$ et les matrices $\|A_j^i\|$ dans (1) sont orthogonales. Conditions I et II prennent alors la forme suivante:

CONDITION I'. *Il existe un nombre N tel que chaque voisinage U_a peut être plongé dans l'espace euclidien E_{n+N}. Autrement dit, dans chaque voisinage U_a on peut définir les formes $\omega_i^a = -\omega_a^i$ et $\omega_\beta^a = -\omega_a^\beta$ de classe C^2 qui avec les formes ω^i et ω_j^i satisfont aux relations* (4) (*on peut omettre la quatrième de ces equations*).

Il résulte du théorème de Schlaefli que si la métrique dans V_n est analytique la condition I' est remplie pour $N \geqslant n(n+1)/2$.

Condition II' se confond avec II. Il faut seulement ajouter que *les matrices $\|B_\beta^a\|$ sont orthogonales.*

On définit maintenant les produits $Q_a = U_a \times E_{n+N} \times K$, où K est l'espace des matrices orthogonales $\|v_s^r\|$. Toutes les constructions et les démonstrations du n° 1 restant valables, il ne faut que compléter la démonstration du lemme 1. Nous devons démontrer que si la matrice $\|v_s^r\|$

est orthogonale dans un point $P_1 \in \mathfrak{M}_a$, elle est aussi orthogonale dans un point quelconque $P_1 \in \mathfrak{M}_a$. Joignons dans ce but les points P et P_1 par une courbe $u^i(t), x^r(t), v^r_s(t)$ sur $\mathfrak{M}_a$ et considérons les fonctions $\varphi_{sr}(t) = \sum_p v^p_s(t) v^p_r(t)$. Il résulte des equations (7) que

$$\frac{d\varphi_{sr}}{dt} = \omega^u_s(t, dt)\varphi_{ur} + \omega^u_r(t, dt)\varphi_{su}. \tag{10}$$

Dans le point P, c'est-à-dire pour $t = t_0$, on a $\varphi(t_0)_{sr} = \delta_{sr}$. Les équations (10) ont les seules solutions qui prennent les valeurs δ_{sr} pour $t = t_0$, à savoir les $\varphi(t)_{sr} \equiv \delta_{sr}$. Par suite, dans le point P_1 la matrice $\|v^r_s\|$ est orthogonale.

Dans le cas envisagé la surface $\mathfrak{N} = f(\mathfrak{M})$ est à métrique $ds^2 = \sum(\omega^i)^2$ et par suite, le tenseur metrique est le même que celui de V_n. Nous obtenons ainsi

Théorème 2. *Si pour la variété riemannienne V_n de classe C^3 les conditions* I′ *et* II′ *sont satisfaites, il existe dans l'espace euclidien E_{n+N} une surface $\mathfrak{N}$, définie sur V_n et telle que dans le point $S \in \mathfrak{N}$ qui correspond au point $u \in V_n$ le tenseur métrique est égal au tenseur métrique de V_n dans u.*

On peut répéter ici la remarque du n°1.

3. Pour formuler nos considérations en langue tensorielle posons $\omega^a_i = h^a_{ij}\omega^j$, $\omega^i_a = b^i_{aj}\omega^j$, $\omega^a_\beta = c^a_{\beta j}\omega^j$ (dans le cas de la variété riemannienne $b^i_{aj} = -h^a_{ij}$). La condition I prend alors la forme suivante: il existe un nombre N tel que dans chaque voisinage U_a on peut définir les champs de N tenseurs h^a_{ij}, de N tenseurs b^i_{aj} et de N^2 vecteurs $c^a_{\beta j}$ tous de classe C^2, de telle façon qu'ils satisfassent aux équations

$$h^a_{ij} = h^a_{ji}, \qquad h^a_{jk} b^i_{am} - h^a_{jm} b^i_{ak} = R^i_{kmj},$$

$$\begin{aligned}
\nabla_m h^a_{jk} - \nabla_k h^a_{jm} &= h^\beta_{jk} c^a_{\beta m} - h_{jm} c^a_{\beta k}, \\
\nabla_m b^i_{ak} - \nabla_k b^i_{am} &= b^i_{\beta k} c^\beta_{am} - b^i_{\beta m} c^\beta_{ak}, \\
\nabla_m c^a_{\beta k} - \nabla_k c^a_{\beta m} &= c^\gamma_{\beta k} c^a_{\gamma m} - c^\gamma_{\beta m} c^a_{\gamma k} + b^i_{\beta k} h^a_{im} - b^i_{\beta m} h^a_{ik}.
\end{aligned}$$

Ce sont évidement les équations de Gauss-Codazzi-Ricci pour la surface qui est un plongement de U_a.

Les formules (5) de la condition II prennent alors la forme

$$h^{a'}_{i'j'} = B^{a'}_\beta h^\beta_{km} A^k_{i'} A^m_{j'}, \qquad b^{k'}_{aj'} = A^{k'}_i b^i_{\beta m} B^\beta_a A^m_{j'},$$

$$c^{a'}_{\beta' j'} = B^{a'}_\gamma c^\gamma_{\beta k} B^\beta_{\beta'} A^k_{j'} + B^{a'}_\gamma \frac{\partial B^\gamma_{\beta'}}{\partial u^k} A^k_{j'}.$$

En réconfortant la condition I on peut supposer que les champs des tenseurs h^a_{ij}, b^i_{aj}, $c^a_{\beta j}$ sont définis dans toute la variété V_n. La condition II est alors inutile ($B^a_\beta = \delta^a_\beta$).

Des théorèmes 1 et 2 nous obtenons des théorèmes qui peuvent être regardés comme la généralisation globale des théorèmes fondamentaux de la géométrie différentielle affine ou euclidienne, pour les surfaces à n dimensions dans l'espace à $n+N$ dimensions.

Citons comme exemple le théorème suivant ($N=1$).

Si l'on a sur la variété differentiable V_n de classe C^3 le tenseur métrique g_{ij} et le tenseur symétrique h_{ij} qui satisfont aux équations de Gauss-Codazzi, il existe dans l'espace euclidien E_{n+1} une surface à n dimensions, définie sur V_n, dont les tenseurs de la première et de deuxième forme quadratique sont exactement g_{ij} et h_{ij}.

Ce théorème généralise pour n quelconque le théorème de M. Sasaki [3].

Travaux cités

[1] A. Lichnerowicz, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Roma 1955.

[2] Г. Ф. Лаптев (G. F. Łaptiev), *О погружении пространства аффинной связности в аффинное пространство*, ДАН 41 (1943), p. 329.

[3] S. Sasaki, *A global formulation of the fundamental theorem of the theory of surfaces in three dimensional Euclidean space*, Nagoya Math. Journ. 13 (1958), pp. 69-82.

Reçu par la Rédaction le 6. 3. 1963