ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXIII (1977)

Schéma de différences finies pour un système d'équations non linéaires partielles elliptiques aux dérivées mixtes et avec des conditions aux limites du type de Dirichlet

par MARIAN MALEC (Cracovie)

Résumé. Dans la note on propose une méthode approchée de solution d'un système d'équations elliptiques

$$f_l\left(x, u, \frac{\partial u_l}{\partial x}, \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2}\right) = 0, \quad l = 1, \ldots, p, x \in (0, \sigma)^n$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $u = (u_1(x), \ldots, u_p(x))$, $\partial u_l/\partial x = \{\partial u_l/\partial x_i\}$, $\partial^2 u_l/\partial x^2 = \partial^2 u_l/\partial x_i \partial x_j$ $(l = 1, \ldots, p,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n)$ avec la condition aux limites de première espèce

$$u_l(x) = \varphi_{li}(x) \quad \text{pour } x_i = 0, \quad u_l(x) = \psi_{li}(x) \quad \text{pour } x_i = \sigma$$
$$(l = 1, \ldots, p,\ i = 1, \ldots, n).$$

La méthode approchée mentionnée est basée sur les quotients aux différences finies. On montre qu'elle est convergente et on donne une estimation de l'erreur de cette méthode.

1. Dans la présente étude on considère un schéma de différences finies pour un système d'équations différentielles partielles du type elliptique de la forme

$$f_l\left(x, u, \frac{\partial u_l}{\partial x}, \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2}\right) = 0, \quad l = 1, \ldots, p \tag{1.1}$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n) \in (0, \sigma)^n$, $u = (u_1(x), \ldots, u_p(x))$, $\partial u_l/\partial x = \{\partial u_l/\partial x_i\}$, $\partial^2 u_l/\partial x^2 = \{\partial^2 u_l/\partial x_i \partial x_j\}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ avec une condition aux limites du type de Dirichlet

$$\begin{aligned} u_l(x) &= \varphi_{li}(x) \quad \text{pour } x_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \\ u_l(x) &= \psi_{li}(x) \quad \text{pour } x_i = \sigma \quad (i = 1, \ldots, n) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad (l = 1, \ldots, p) \end{aligned} \tag{1.2}$$

On obtient le schéma mentionné en remplaçant dans le système (1.1) les dérivées du premier ordre par les quotients aux différences finies centraux et les dérivées du second ordre par les quotients aux différences finies de la forme

$$\frac{1}{2h^2}\left(u_l^{i(M)} + u_l^{j(M)} + u_l^{-i(M)} + u_l^{-j(M)} - 2u_l^M - u_l^{i(-j(M))} - u_l^{-i(j(M))}\right) \tag{1.3}$$

ou

$$\frac{1}{2h^2}\left(-u_l^{i(M)} - u_l^{j(M)} - u_l^{-i(M)} - u_l^{-j(M)} + 2u_l^M + u_l^{i(j(M))} + u_l^{-i(-j(M))}\right) \tag{1.4}$$

(voir fig. 1) selon le signe de la dérivée de la fonction f_l par rapport à $\partial^2 u_l/\sigma x_i \partial x_j$.

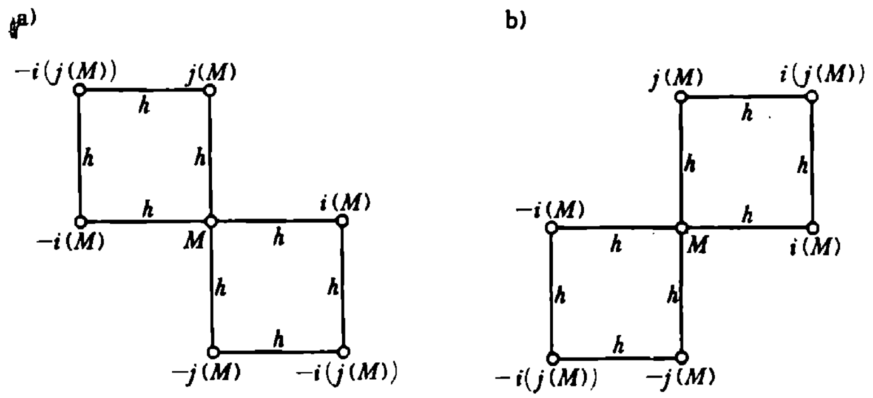

Fig. 1. Points nodaux entrant dans la formule a) (1.3), b) (1.4). Le plan de la figure est parallèle au plan Ox_ix_j et passe par le point nodal généré par la suite des indices M

On montre que le schéma aux différences finies pour le système (1.1) avec la condition aux limites (1.2) est convergent sous certaines conditions et on donne une estimation de l'erreur de la méthode des différences finies (théorème 1).

La démonstration du théorème 1 s'appuie sur les inégalités aux différences finies que j'ai présentées dans un travail de Malec ([1]).

2. Considérons dans l'espace euclidien à n dimensions R^n un ensemble de points nodaux dont les coordonnées sont

$$x_i^{m_i} = m_i h \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

où $m_i = 0, 1, \ldots, N$ $(i = 1, \ldots, n)$, $0 < h = \sigma/N$, N est un nombre naturel.

([1]) M. Malec, *Système d'inégalités aux différences finies du type elliptique*, ce fascicule, p. 235–239.

Désignons le point nodal $(x_1^{m_1}, \ldots, x_n^{m_n})$ par x^M où $M = (m_1, \ldots, m_n)$ et soit

$$
\begin{aligned}
Z &= \{M\colon\ 0 \leqslant m_i \leqslant N,\ i = 1, \ldots, n\},\\
Z_1 &= \{M\colon\ 0 \leqslant m_i \leqslant N-1,\ i = 1, \ldots, n\},\\
Z_2 &= \{M\colon\ 1 \leqslant m_i \leqslant N,\ i = 1, \ldots, n\}.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Nous introduisons aussi les notations suivantes

$$
\begin{aligned}
i(M) &= (m_1, \ldots, m_{i-1}, m_i+1, m_{i+1}, \ldots, m_n) \quad (M \in Z_1),\\
-i(M) &= (m_1, \ldots, m_{i-1}, m_i-1, m_{i+1}, \ldots, m_n) \quad (M \in Z_2)
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

$$(i = 1, \ldots, n).$$

On suppose qu'à chaque multi-indice $M \in Z$ correspond un système de nombres réels

$$v_1^M, \ldots, v_p^M \tag{2.4}$$

et on admet que

$$v_l^{Mi} = \frac{1}{2h}\left(v_l^{i(M)} - v_l^{-i(M)}\right),$$

$$v_l^{MI} = \left(v_l^{M1}, \ldots, v_l^{Mn}\right),$$

$$v_l^{-Mij} = \frac{1}{2h^2}\left(v_l^{i(M)} + v_l^{j(M)} + v_l^{-i(M)} + v_l^{-j(M)} - 2v_l^M - v_l^{i(-j(M))} - v_l^{-i(j(M))}\right), \tag{2.5}$$

$$v_l^{+Mij} = \frac{1}{2h^2}\left(-v_l^{i(M)} - v_l^{j(M)} - v_l^{-i(M)} - v_l^{-j(M)} + 2v_l^M + v_l^{i(j(M))} + v_l^{-i(-j(M))}\right)$$

$$(l = 1, \ldots, p,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n,\ M \in Z_1 \cap Z_2).$$

3. THÉORÈME 1. *Supposons que*

1) *les fonctions scalaires* $f_l(x, u, q, w)$, $l = 1, \ldots, p$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $u = (u_1, \ldots, u_p)$, $q = (q_1, \ldots, q_n)$, $w = (w_{11}, \ldots, w_{1n}, \ldots, w_{n1}, \ldots, w_{nn})$ *sont de classe* C^1 *dans l'ensemble*

$$D = [0, \sigma]^n \times R^{p+n+n^2} \tag{3.1}$$

et satisfont dans cet ensemble aux conditions

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial f_l}{\partial u_l} \leqslant L < 0, \quad 0 \leqslant \frac{\partial f_l}{\partial u_\mu} \leqslant K \quad \text{pour } \mu \neq l, \quad \left|\frac{\partial f_l}{\partial q_i}\right| \leqslant \Gamma,\\
0 < g \leqslant \frac{\partial f_l}{\partial w_{ii}} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left|\frac{\partial f_l}{\partial w_{ij}}\right|
\end{gathered}
\tag{3.2}
$$

$$(l = 1, \ldots, p,\ \mu = 1, \ldots, p,\ i = 1, \ldots, n)$$

où L, K, Γ *et* g *sont des nombres,*

2) *pour les indices fixés* l, i, j $(1 \leqslant l \leqslant p,\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ *la fonction* $\partial f_1/\partial w_{ij}$ *est toujours non négative ou toujours non positive dans l'ensemble* D *et*

$$\frac{\partial f_l}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial f_l}{\partial w_{ji}} \quad \textit{dans } D, \tag{3.3}$$

3) *les inégalités suivantes*

$$\frac{g}{h} - \frac{\Gamma}{2} \geqslant 0, \quad L + K(p-1) < 0 \tag{3.4}$$

sont satisfaites,

4) *les fonctions scalaires* $u_l(x)$ $(l = 1, \ldots, p)$ *sont de classe* C^2 *dans l'ensemble* $[0, \sigma]^n$ *et le système de fonctions* $u_1(x), \ldots, u_p(x)$ *est la solution du problème différentiel* (1.1), (1.2),

5) *les nombres* (2.4) *satisfont au système d'équations aux différences finies*

$$\begin{aligned} &f_l(x^M, v^M, v_l^{MI}\, v_l^{MIJ}) = 0 \quad (M \in Z_1 \cap Z_2), \\ &v_l^M = \varphi_{li}(x^M) \quad \textit{pour } m_i = 0 \quad (M \in Z_1), \\ &v_l^M = \psi_{li}(x^M) \quad \textit{pour } m_i = N \quad (M \in Z_2) \\ &\qquad\qquad (l = 1, \ldots, p,\ i = 1, \ldots, n), \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} v^M &= (v_1^M, \ldots, v_p^M), \\ v_l^{MIJ} &= (v_l^{M11}, \ldots, v_l^{M1n}, \ldots, v_l^{Mn1}, \ldots, v_l^{Mnn}), \\ v_l^{Mij} &= \begin{cases} v_l^{-Mij} & \textit{lorsque } i = j \textit{ ou } \dfrac{\partial f_l}{\partial w_{ij}} \leqslant 0, \\[2ex] v_l^{+Mij} & \textit{lorsque } i \neq j \textit{ et } \dfrac{\partial f_l}{\partial w_{ij}} \geqslant 0 \end{cases} \\ &(l = 1, \ldots, p,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n,\ M \in Z_1 \cap Z_2) \end{aligned} \tag{3.6}$$

voir (2.5)).

Dans toutes ces hypothèses l'inégalité

$$|r_l^M| \leqslant \frac{-\varepsilon(h)}{L + K(p-1)} \tag{3.7}$$

a lieu pour $M \in Z$ *et* $l = 1, \ldots, p$, *où* $r_l^M = u_l^M - v_l^M$ (u_l^M *désigne la valeur de la fonction* $u_l(x)$ *au point nodal* x^M) *et* $\varepsilon(h)$ *est défini par la formule* (3.9), *et la méthode des différences finies* (3.5) *est convergente, c'est-à-dire*

$$\lim_{h \to 0} r_l^M = 0 \quad (l = 1, \ldots, p). \tag{3.8}$$

Démonstration. Comme (3.8) résulte de (3.7), il suffit de prouver (3.7).

On peut montrer que

$$f_l(x^M, u^M, u_l^{MI}, u_l^{MIJ}) = \eta_l^M \quad (M \in Z_1 \cap Z_2),$$

(3.9) $$\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0, \quad \varepsilon(h) = \max_{1\leqslant l\leqslant p}[\max_{M\in Z_1\cap Z_2} |\eta_l^M|] \quad (l = 1, \ldots, p)$$

et

(3.10) $$\begin{aligned} u_l^M &= \varphi_{li}(x^M) \quad \text{pour } m_i = 0 \quad (M \in Z_1), \\ u_l^M &= \psi_{li}(x^M) \quad \text{pour } m_i = N \quad (M \in Z_2) \end{aligned}$$

$$(l = 1, \ldots, p, \ i = 1, \ldots, n)$$

où les valeurs u^M, u_l^{MI} et u_l^{MIJ} sont déterminées pour u_l^M de la même façon que les valeurs v^M, v_l^{MI} et v_l^{MIJ} pour v_l^M (voir (3.6) et (2.5)).

La formule (3.9) résulte de (1.1) car $u_l(x)$ $(l = 1, \ldots, p)$ sont de classe C^2 et satisfont au système (1.1) dont les seconds membres sont de classe C^1.

A partir de (3.5) et (3.10) on obtient

(3.11) $$r_l^M = 0 \quad \text{lorsque } m_i = 0 \text{ ou } m_i = \sigma$$

$$(l = 1, \ldots, p, \ i = 1, \ldots, n, \ M \in Z).$$

Il résulte de la dernière égalité que

(3.12) $$\begin{gathered} \max_{M\in Z} r_l^M = r_l^{A(l)}, \quad \min_{M\in Z} r_l^M = r_l^{B(l)}, \\ A(l) \in Z_1 \cap Z_2, \quad B(l) \in Z_1 \cap Z_2, \quad l = 1, \ldots, p. \end{gathered}$$

Tenant compte de (3.9) et (3.5) et utilisant le théorème de la moyenne nous obtenons

(3.13) $$-\varepsilon(h) \leqslant \eta_l^{A(l)} = f_l(x^{A(l)}, u^{A(l)}, u_l^{A(l)I}, u_l^{A(l)IJ}) -$$

$$-f_l(x^{A(l)}, v^{A(l)}, v_l^{A(l)I}, v_l^{A(l)IJ}) = \sum_{\mu=1}^{p} c_{l\mu}^{A(l)} r_\mu^{A(l)} + \sum_{j=1}^{n} b_{lj}^{A(l)} r_l^{A(l)j} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{lij}^{A(l)} r_l^{A(l)ij}$$

où $c_{l\mu}^{A(l)} = \dfrac{\partial f_l}{\partial u_\mu}(-)$, $b_{lj}^{A(l)} = \dfrac{\partial f_l}{\partial q_j}(-)$, $a_{lij}^{A(l)} = \dfrac{\partial f_l}{\partial w_{ij}}(-)$ et les dérivées sont prises à des points convenables $(-)$.

D'une façon analogue on obtient

(3.14) $$\varepsilon(h) \geqslant \eta_l^{B(l)} = f_l(x^{B(l)}, u^{B(l)}, u_l^{B(l)I}, u_l^{B(l)IJ}) -$$

$$-f_l(x^{B(l)}, v^{B(l)}, v_l^{B(l)I}, v_l^{B(l)IJ}) = \sum_{\mu=1}^{p} c_{l\mu}^{B(l)} r_\mu^{B(l)} + \sum_{j=1}^{n} b_{lj}^{B(l)} r_l^{B(l)j} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{lij}^{B(l)} r_l^{B(l)ij}.$$

Maintenant il est facile de vérifier que toutes les hypothèses du théorème 1 et du théorème 2 dans le travail cité de Malec sont satisfaites.

Donc, les inégalités

$$r_l^{A(l)} \leqslant \frac{-\varepsilon(h)}{L+K(p-1)}, \quad r_l^{B(l)} \geqslant \frac{\varepsilon(h)}{L+K(p-1)} \tag{3.15}$$

sont valables pour $l = 1, \ldots, p$.

D'où il résulte que

$$|r_l^M| \leqslant \frac{-\varepsilon(h)}{L+K(p-1)} \quad \text{pour } l = 1, \ldots, p \text{ et } M \epsilon Z. \tag{3.16}$$

La démonstration du théorème 1 est ainsi achevée.

Reçu par la Rédaction le 9. 4. 1974