COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XX 1969 FASC. 1

PROBLÈMES

P 452, R2. As J. Mycielski has informed us, R. Solovay proved that if a function $\mu : 2^N \to R$ has the Baire property, then it cannot be a (finitely additive) measure in N, non-trivial and vanishing on one-point sets. This implies an affirmative answer to problems (C) and (C′) from the paper (1), and, consequently, according to the author's remark, an affirmative answer to the second question in P 452 (which was already known (2)).

XII.1, p. 36 et XV. 1, p. 151.

(1) C. Ryll-Nardzewski, *Concerning almost periodic extensions of functions*, Colloquium Mathematicum 12 (1964), p. 235-237.

(2) S. Hartman and C. Ryll-Nardzewski, *Almost periodic extensions of functions III*, ibidem 16 (1967), p. 223-224.

P 587, R 1. M. Fox and G. S. Kimeldorf have informed us that they solved the problem.

XVII.1, p. 146. Letter of November 11, 1967.

P 594, R 2. La solution signalée dans R 1 se trouve déjà publiée (3).

XVII.2, p. 193 et XIX.2, p. 333.

(3) D. Rotenberg, *Sur les suites des distances*, ce fascicule, p. 67-68.

JAN MYCIELSKI (WROCŁAW)

P 646 - P 650. Formulés dans la communication *Some new ideals of sets on the real line.*

Ce fascicule, p. 75 et 76.

PATRICIA TULLEY (NEW BRUNSWICK, N. J.)

P 651 - P 653. Formulés dans la communication *On acyclic kernels and barycentric homomorphisms.*

Ce fascicule, p. 107.

W. ŻELAZKO (WARSZAWA)

P 654. Formulé dans la communication *Concerning non-commutative Banach algebras of type* ES.

Ce fascicule, p. 126.

М. СКОРНЯКОВ (МОСКВА)

P 655. Дать описание всех радикалов (не обязательно наследственных) в категории абелевых групп.

Новая Шотландская Книга, Пробл. 804, 8. I. 1968.

P 656. Для каких коммутативных колец справедлива теорема о разложении всякого конечно-порожденного модуля в прямую сумму циклических? В частности, является ли этаким условием требование, чтобы всякий конечно-порожденный идеал был главным?

Новая Шотландская Книга, Пробл. 804, 8. I. 968.

Б. ЛЕВИТАН (МОСКВА)

P 657. Известно, что уравнение

$$\Delta u+\{\lambda-q(x)\}u = 0, \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\in R^n$, $q(x)$—действительная локально-интегрируемая функция и λ — недействительное число, либо совсем не имеет нетривиальных решений принадлежащих к $L_2(R^n)$, либо число таких решений (линейно-независимых) бесконечно.

Спрашивается, существуют ли такие $q(x)$, для которых число линейно-незавиисимых решений уравнения (1) конечно? То, что это число одинаково для всех комплексных λ, следует из общих теорем теории симметрических операторов.

Новая Шотландская Книга, Пробл. 806, 11. III. 1968.

P 658. Пусть $Q(x)$, $0\leqslant x\leqslant \pi$, будет симметрическая непрерывная квадратная матрица-функция в R^n и $h, H_1, \ldots, H_{2n}$ — симметрические постоянные квадратные матрицы в R^n. Рассмотрим $2n$ самосопряженных задач

$$y''+\{\lambda-Q(x)\}y = 0,$$
$$y'(0)-hy(0) = 0,$$
$$y'(\pi)+H_j y(\pi) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}.$$

Спектры этих задач обозначим через $\{\lambda_k^{(j)}\}$, $k = 1, 2, \ldots, j = 1, 2, \ldots, 2n$.

Спрашивается, можно ли выбрать матрицы H_j так, чтобы $2n$ спектров $\{\lambda_k^{(j)}\}$ однозначно определили матрицу-функцию $Q(x)$?

В скалярном случае ($n = 1$) достаточно взять $H_1 \neq H_2$ (4).

Новая Шотландская Книга, Пробл. 807, 11. III. 1968.

(4) G. Berg, *Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte*, Acta Mathematica 78 (1946), p. 1-96.

W. NARKIEWICZ (WROCŁAW)

P 659. A sequence $a_1, a_2, \ldots$ is said to be *justly distributed* with respect to a natural number N provided that

(1) if $0 \leqslant j \leqslant N-1$, then

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} N\{n \leqslant x\colon a_n \equiv j \pmod N\} = \frac{1}{N},$$

(2) if $0 \leqslant j_1 \neq j_2 \leqslant N-1$, then there exist infinitely many natural numbers $x_1, x_2, \ldots$ such that

$$N\{n \leqslant x_k\colon a_n \equiv j_1 \pmod N\} > N\{n \leqslant x_k\colon a_n \equiv j_2 \pmod N\}$$

for $k = 1, 2, \ldots$

A. Sarközy and B. Volkmann have both constructed (independently) sequences justly distributed with respect to all $N = 2, 3, \ldots$ (oral communication).

Does there exist a sequence $a_1, a_2, \ldots$ justly distributed with respect to all $N = 2, 3, \ldots$ and which satisfies the multiplicativity condition $a_m \cdot a_n = a_{nm}$ for $(m, n) = 1$?

New Scottish Book, Probl. 808, 3. IV. 1968.

P 660. The same question as in P 659 but condition (1) has to be replaced by

(1′) if $(j_1, N) = (j_2, N) = 1$, then

$$\lim_{x\to\infty} \frac{N\{n \leqslant x\colon\ a_n \equiv j_1 (\mathrm{mod}\ N)\}}{N\{n \leqslant x\colon\ a_n \equiv j_2 (\mathrm{mod}\ N)\}} = 1,$$

and in condition (2) it should now be assumed that $(j_1, N) = (j_2, N) = 1$; moreover, the set $\{n\colon (a_n, N) = 1\}$ is supposed to be infinite for each $N = 2, 3, \ldots$

New Scottish Book, Probl. 809, 3. IV. 1968.

P 661. Does there exist a Dedekind ring R which satisfies the following two conditions:

1° the quotient $R/\mathfrak{p}$ is finite for every non-zero prime ideal $\mathfrak{p} \subset R$,

2° there are infinitely many prime ideals $\mathfrak{p}$ such that the quotients $R/\mathfrak{p}$ are all isomorphic?

New Scottish Book, Probl. 810, 3. IV. 1968.

MIRON NICULESCU (BUCAREST)

P 662. Soit $f\colon C(K; R) \to C(K; R)$ une application linéaire et continue de l'espace des fonctions continues réelles, définies sur le compact K, dans cet espace même.

Etudier celles de ces applications qui transforment une fonction croissante en une fonction croissante. Un cas particulier d'une telle application a été étudié [5].

Nouveau Livre Ecossais, Prob. 814, 5. IV. 1968.

[5] Miron Niculescu et Ciprian Foiaș, *Sur les moyennes généralisées successives d'une fonction*, Mathematica 4 (27) (1962), p. 107-121.

P 663. Le théorème bien connu de Liouville (ou sa forme plus forte due à E. Picard) permet tout de suite d'écrire la forme de la solution d'une certaine équation aux dérivées partielles, initialement l'équation de Laplace, dès qu'on impose à cette solution une limitation unilatérale ou bilatérale, par une constante. Si c'est une constante multipliée par une certaine puissance positive (plus grande que 2) de la distance à un point fixe, alors on sait que la solution u est nécessairement un polynôme.

J'ai montré que la propriété de Liouville-Picard reste vraie pour une classe assez riche d'équations linéaires aux coefficients constants.

Le problème est, maintenant, le suivant: Peut-on affaiblir encore la limitation supposée, de manière à obtenir d'autres solutions?

Une réponse positive est donnée dans un petit article (6), où j'ai montré que toute solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial u}{\partial t} - cu = 0, \qquad c > 0,$$

telle que, pour $t < 0$, on ait $u < Me^{-ct}$, est nécessairement de la forme $u = ke^{-ct}$ $(k < M)$.

Nous sommes donc sortis, dans ce cas-ci, du domaine des polynômes. Que se passe-t-il pour les autres équations usuelles?

Nouveau Livre Ecossais, Prob. 815, 5. IV. 1968.

(6) Miron Niculescu, *Note sur l'équation de la chaleur*, Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de la République Socialiste de Roumanie 10 (58) (1966), p. 31-33.

K. URBANIK (WROCŁAW)

P 664. Let $X_1, X_2, \ldots$ be a sequence of independent random variables with a common distribution F. Denote by $\mathscr{X}$ the linear space generated by $X_1, X_2, \ldots$ and closed with respect to convergence in probability. Give a characterization of those distributions F for which 0 is the only constant random variable in $\mathscr{X}$.

New Scottish Book, Probl. 816, 7. IV. 1968.