ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXIV (1977)

Schéma des différences finies pour une équation non linéaire partielle du type elliptique avec dérivées mixtes

par Marian Malec (Cracovie)

Résume. Dans la note on propose une méthode approchée de solution de l'équation elliptique

$$f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0, \quad x \in (0, \sigma)^n,$$

où

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad u = u(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right\} \quad (i, j = 1, \ldots, n)$$

avec la condition aux limites de la première espèce

$$u(x) = \varphi_i(x) \quad \text{pour } x_i = 0 \ (i = 1, \ldots, n),$$
$$u(x) = \psi_i(x) \quad \text{pour } x_i = \sigma \ (i = 1, \ldots, n).$$

La méthode approchée en question est basée sur les quotients des différences finies. On montre qu'elle est convergente et on donne une estimation de l'erreur de cette méthode.

1. Les processus d'échange de masse et de chaleur au cours desquels la concentration et la température demeurent invariables sont appelés stables ou stationnaires. On les rencontre dans de nombreux problèmes pratiques: en métallurgie, p. ex. dans la coulée continue du métal, en électrotechnique — lors du passage du courant électrique dans des conducteurs, dans les barres de combustible des réacteurs nucléaires et dans beaucoup d'autres cas. Les phénomènes mentionnés témoignent déjà de l'intérêt que présente l'examen des processus stationnaires qui ramènent dans la plupart des problèmes à la solution d'équations partielles non linéaires et multidimensionnelles du type elliptique.

Dans la présente note on propose une méthode approchée de solution de l'équation elliptique

$$f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0, \quad x \in (0, \sigma)^n \tag{1.1}$$

où

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad u = u(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right\} \quad (i, j = 1, \ldots, n)$$

avec la condition aux limites de la première espèce

$$\begin{aligned} u(x) &= \varphi_i(x) \quad \text{pour } x_i = 0 \ (i = 1, \ldots, n), \\ u(x) &= \psi_i(x) \quad \text{pour } x_i = \sigma \ (i = 1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{1.2}$$

La méthode approchée mentionnée est basée sur les quotients des différences finies. On montre qu'elle est convergente et on donne une estimation de l'erreur de cette méthode (théorème 1).

La démonstration du théorème 1 s'appuie sur les inégalités aux différences finies que j'ai présentées dans le travail de Malec [1].

2. Considérons dans l'espace euclidien à n dimensions R^n un ensemble de points nodaux ayant les coordonnées

$$x_i^{m_i} = m_i h \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

où $m_i = 0, 1, \ldots, N$ $(i = 1, \ldots, n)$, $0 < h = \sigma/N$, N est un nombre naturel.

Désignons le point nodal $(x_1^{m_1}, \ldots, x_n^{m_n})$ par x^M où $M = (m_1, \ldots, m_n)$ et soit

$$\begin{aligned} Z &= \{M\colon\ 0 \leqslant m_i \leqslant N,\ i = 1, \ldots, n\}, \\ Z_1 &= \{M\colon\ 0 \leqslant m_i \leqslant N-1,\ i = 1, \ldots, n\}, \\ Z_2 &= \{M\colon\ 1 \leqslant m_i \leqslant N,\ i = 1, \ldots, n\}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Nous introduisons aussi les notations suivantes

$$\begin{aligned} i(M) &= (m_1, \ldots, m_{i-1}, m_i+1, m_{i+1}, \ldots, m_n) \quad (M \in Z_1), \\ -i(M) &= (m_1, \ldots, m_{i-1}, m_i-1, m_{i+1}, \ldots, m_n) \quad (M \in Z_2) \\ & \qquad (i = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{2.3}$$

[1] M. Malec, *Inégalité aux différences finies du type elliptique*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math., astronom., phys. 23 (1975), p. 859–863.

On suppose qu'à chaque multi-indice $M \in Z$ correspond un nombre réel v^M et on admet que

$$
\begin{aligned}
v^{Mi} &= \frac{1}{2h}\,(v^{i(M)} - v^{-i(M)}),\\
v^{MI} &= (v^{M1}, \ldots, v^{Mn}),\\
v^{-Mij} &= \frac{1}{2h^2}\,(v^{i(M)} + v^{j(M)} + v^{-i(M)} + v^{-j(M)} - 2v^M - v^{i(-j(M))} - v^{-i(j(M))}),\\
v^{+Mij} &= \frac{1}{2h^2}\,(-v^{i(M)} - v^{j(M)} - v^{-i(M)} - v^{-j(M)} + 2v^M + v^{i(j(M))} + v^{-i(-j(M))})\\
&\qquad (i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n,\ M \in Z_1 \cap Z_2).
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

3. Théorème 1. *Supposons que:*

1° *la fonction scalaire* $f(x, u, q, w)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $q = (q_1, \ldots, q_n)$, $w = (w_{11}, \ldots, w_{1n}, \ldots, w_{n1}, \ldots, w_{nn})$ *est de classe* C^1 *dans l'ensemble*

$$D = [0, \sigma]^n \times R^{1+n+n^2} \tag{3.1}$$

et satisfait dans cet ensemble aux conditions

$$\frac{\partial f}{\partial u} \leqslant L < 0, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial q_i}\right| \leqslant \Gamma, \qquad 0 < g \leqslant \frac{\partial f}{\partial w_{ii}} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial w_{ij}}\right| \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.2}$$

où L, Γ *et* g *sont des nombres;*

2° *pour des indices fixés* i, j $(i \neq j, 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n)$ *la fonction* $\partial f/\partial w_{ij}$ *est toujours non positive ou toujours non négative dans l'ensemble* D *et*

$$\frac{\partial f}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial w_{ji}} \quad \textit{dans l'ensemble } D; \tag{3.3}$$

3° *le pas* h *est tel que*

$$\frac{g}{h} - \frac{\Gamma}{2} \geqslant 0; \tag{3.4}$$

4° *les nombres* v^M *vérifient le système d'équations aux différences finies*

$$
\begin{aligned}
&f(x^M, v^M, v^{MI}, v^{MIJ}) = 0 \quad (M \in Z_1 \cap Z_2),\\
&v^M = \varphi_i(x^M) \quad \textit{pour } m_i = 0\ (i = 1, \ldots, n,\ M \in Z),\\
&v^M = \psi_i(x^M) \quad \textit{pour } m_i = N\ (i = 1, \ldots, n,\ M \in Z),
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

où

$$v^{MIJ} = (v^{M11}, \ldots, v^{M1n}, \ldots, v^{Mn1}, \ldots, v^{Mnn}),$$

$$(3.6)\qquad v^{Mij} = \begin{cases} v^{-Mij} & \textit{lorsque } i = j \textit{ ou } \dfrac{\partial f}{\partial w_{ij}} \leqslant 0, \\ v^{+Mij} & \textit{lorsque } i \neq j \textit{ et } \dfrac{\partial f}{\partial w_{ij}} \geqslant 0 \end{cases}$$

$$(i, j = 1, \ldots, n, \ M \in Z_1 \cap Z_2)$$

(voir (2.4));

5° *la fonction scalaire* $u(x)$ *est de classe* C^2 *dans l'ensemble* $[0, \sigma]^n$ *et constitue la solution du problème différentiel* (1.1), (1.2).

Dans toutes ces hypothèses, on a

$$(3.7)\qquad |r^M| \leqslant \frac{\varepsilon(h)}{-L} \qquad (M \in Z)$$

où $r^M = u^M - v^M$ (u^M *désigne la valeur de la fonction* $u(x)$ *au point nodal* x^M) *et* $\varepsilon(h)$ *est défini par la formule* (3.9) *et la méthode des différences finies* (3.5) *est convergente, c'est-à-dire*

$$(3.8)\qquad \lim_{h \to 0} r^M = 0.$$

Démonstration. Comme (3.8) résulte de (3.7) il suffit de prouver (3.7).

On peut montrer que

$$(3.9)\qquad \begin{gathered} f(x^M, u^M, u^{MI}, u^{MIJ}) = \eta^M \quad (M \in Z_1 \cap Z_2), \\ \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0, \quad \varepsilon(h) = \max_{M \in Z} |\eta^M|, \end{gathered}$$

et

$$(3.10)\qquad \begin{aligned} u^M &= \varphi_i(x^M) \quad \text{pour } m_i = 0 \ (i = 1, \ldots, n, \ M \in Z), \\ u^M &= \psi_i(x^M) \quad \text{pour } m_i = N \ (i = 1, \ldots, n, \ M \in Z), \end{aligned}$$

où les valeurs u^{MI} et u^{MIJ} sont déterminées pour u^M de la même façon que les valeurs v^{MI} et v^{MIJ} pour v^M (voir (2.4) et (3.6)).

La formule (3.9) résulte de (1.1) car $u(x)$ est une sulution de classe C^2 de l'équation (1.1) et le premier membre de (1.1) est de classe C^1.

A partir de (3.5) et (3.10) on obtient

$$(3.11)\qquad r^M = 0 \quad \text{lorsque } m_i = 0 \quad \text{ou } m_i = N \ (i = 1, \ldots, n).$$

Il en résulte que

$$(3.12)\qquad \max_{M \in Z} r^M = r^A \geqslant 0, \quad \min_{M \in Z} r^M = r^B \leqslant 0, \quad A \in Z_1 \cap Z_2, B \in Z_1 \cap Z_2.$$

En utilisant le théorème de la moyenne on arrive aussi à partir de (3.5) et (3.9) à

$$(3.13) \qquad -\varepsilon(h) \leqslant \eta^A = f(x^A, u^A, u^{AI}, u^{AIJ}) - f(x^A, v^A, v^{AI}, v^{AIJ})$$
$$= c^A r^A + \sum_{j=1}^{n} b_j^A r^{Aj} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^A r^{Aij},$$

où

$$c^A = \frac{\partial f}{\partial u}(-), \qquad b_j^A = \frac{\partial f}{\partial q_j}(-), \qquad a_{ij}^A = \frac{\partial f}{\partial w_{ij}}(-)$$

et les dérivées sont prises en des points convenables $(-)$.

D'une façon analogue on obtient

$$(3.14) \qquad \varepsilon(h) \geqslant \eta^B = f(x^B, u^B, u^{BI}, u^{BIJ}) - f(x^B, v^B, v^{BI}, v^{BIJ})$$
$$= c^B r^B + \sum_{j=1}^{n} b_j^B r^{Bj} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^B r^{Bij}.$$

Il résulte de (3.12), (3.13), (3.14) ainsi que des théorèmes 1 et 2 dans le travail (¹) que

$$(3.15) \qquad r^A \leqslant \frac{\varepsilon(h)}{-L}, \qquad r^B \geqslant \frac{\varepsilon(h)}{L}$$

d'où

$$(3.16) \qquad |r^M| \leqslant \frac{\varepsilon(h)}{-L} \quad \text{pour } M \in Z.$$

La démonstration du théorème 1 est ainsi terminée.

Reçu par la Rédaction le 15. 11. 1973