COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXII 1971 FASC. 2

SUR LES FONCTIONS PRESQUE AFFINES

PAR

HOÀNG TỤY (HANOÏ)

Une fonction f définie dans un ensemble convexe $D \subset R^n$ est dite *presque convexe* si pour tout couple $x, y \in D$ et tout $z = \lambda x + (1-\lambda) y$, $0 < \lambda < 1$, on a

$$f(z) \leqslant \max\{f(x), f(y)\}, \tag{1}$$

l'inégalité étant vérifiée strictement chaque fois que $f(x) \neq f(y)$. Elle est dite *presque concave* si $-f$ est presque convexe. Une fonction à la fois presque convexe et presque concave est dite *presque affine*.

Dans [1] (et aussi dans [2] sous une forme moins explicite) nous avons montré que la méthode du simplexe dans la programmation linéaire s'étend aux programmes non linéaires $\min\{f(x): x \in D\}$ où D est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés de R^n, f une fonction presque affine dans D. La classe des fonctions presque affines dans D comprend évidemment toute fonction de la forme

$$f(x) = \varphi\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right),$$

où $\varphi(\lambda)$ est une fonction monotone croissante, $g(x)$ et $h(x)$ sont des fonctions affines, $h(x) \neq 0$ dans D. Existe-t-il des fonctions presque affines qui ne sont pas de cette forme?

Le but de la présente communication est d'étudier la structure des fonctions de cette classe et de donner une réponse à cette question.

Considérons une fonction f presque affine dans un ensemble convexe donné $D \subset R^n$. D'après la définition, cela revient à dire que pour tout couple $x, y \in D$ et tout $z = \lambda x + (1-\lambda) y$, $0 < \lambda < 1$, on a les implications suivantes:

$$f(x) = f(y) \Rightarrow f(x) = f(z) = f(y), \tag{2}$$

$$f(x) < f(y) \Rightarrow f(x) < f(z) < f(y); \tag{3}$$

ou encore: sur chaque segment de droite contenu dans D, f est constante, ou strictement monotone.

Pour tout nombre réel a, les deux ensembles

$$\{x \in D: f(x) \leqslant a\}, \quad \{x \in D: f(x) > a\} \tag{4}$$

sont convexes [1]. S'ils sont tous deux non vides, ils sont donc séparés par un certain hyperplan, que nous appellerons ***hyperplan de séparation*** au niveau a.

LEMME 1. *Un hyperplan de séparation au niveau a contient tous les points $x \in D$ vérifiant $f(x) = a$.*

En effet, soit $g(x) = 0$ l'équation de l'hyperplan considéré. Prenons deux points quelconques $x_1, x_2 \in D$, tels que $f(x_1) \leqslant a, f(x_2) > a$. Si $x \in D$ vérifie $f(x) = a$, on a, en vertu de (2) et (3), $f(x') \leqslant a$ pour tout $x' = \lambda x_1 + (1-\lambda)x, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, et $f(x'') > a$ pour tout $x'' = \lambda x_2 + (1-\lambda)x, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Donc tous les x' sont d'un même côté de l'hyperplan et vérifient par ex. $g(x') \geqslant 0$, tous les x'' sont de l'autre côté et vérifient $g(x'') \leqslant 0$. Il en résulte $\lambda g(x_1) + (1-\lambda) g(x) \geqslant 0$, $\lambda g(x_2) + (1-\lambda) g(x) \leqslant 0$ et lorsque $\lambda \to 0$ on obtient $g(x) = 0$.

LEMME 2. *Si f n'est pas identique à une constante dans D, par tout point interne* (1) *a de D passe un hyperplan de séparation et un seul, qui est l'hyperplan de séparation au niveau $a = f(a)$.*

En effet, il existe par hypothèse un point $b \in D$ tel que $f(b) \neq f(a)$, et comme a est un point interne de D on peut trouver un point $c \in D$, appartenant à la droite joignant a et b et situé de l'autre côté de a par rapport à b. A cause de (2) les différences $f(a) - f(b)$ et $f(a) - f(c)$ sont de signes contraires, et les ensembles (4) où $a = f(a)$ sont non vides. Il existe par conséquent un hyperplan de séparation P au niveau a, cet hyperplan devant passer par a d'après le lemme 1. Soit P' un deuxième hyperplan de séparation passant par a, au niveau a'. Si $P \neq P'$, il existe un point $x \in P \setminus P'$ et un point $x' \in P' \setminus P$. Comme a est un point interne de D, on peut trouver deux points $y, z \in D$, appartenant à la droite joignant a et x (donc appartenant à $P \setminus P'$) et situés de part et d'autre de a; de même on peut trouver sur la droite joignant a et x' deux points $y', z' \in P' \setminus P$, situés de part et d'autre de a. Nous pouvons toujours supposer que $f(y) > a'$ et $f(y') \leqslant a$. Soit u un point quelconque intérieur au segment $[y; y']$, v un point quelconque intérieur au segment $[z; z']$. On a alors $a' < f(u) \leqslant a$, $a < f(v) \leqslant a'$, ce qui est absurde. Donc $P = P'$.

---

(1) Rappelons que, par définition, a est un point *interne* de D si quelque soit $x \in R^n$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel qu'on ait $a + \varepsilon x \in D$ pour tout ε vérifiant $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$. On sait que si a est un point interne du convexe D et b un point quelconque de D, alors tout point $x = \lambda a + (1-\lambda) b$, $0 < \lambda \leqslant 1$, est aussi un point interne de D.

LEMME 3. *Chaque hyperplan de séparation P passant par un point interne de D sépare $D\setminus P$ en deux parties non vides D^-, D^+ telles qu'on ait pour tout point interne x de D situé sur P et tout couple $y \in D^-$, $z \in D^+$,*

$$f(y) < f(x) < f(z).$$

En effet, d'après le lemme 2, P est un hyperplan de séparation au niveau $a = f(x)$ et sépare donc $D\setminus P$ en deux parties $D^- = \{y \in D\setminus P: f(y) \leqslant a\}$, $D^+ = \{z \in D\setminus P: f(z) > a\}$. Comme x est un point interne de D, il existe des points de D de part et d'autre de P, de sorte que D^- et D^+ ne sont pas vides. Pour tout $y \in D^-$ on doit avoir $f(y) < a$ car si $f(y) = a$ on aurait, d'après le lemme 1, $y \in P$.

THÉORÈME 1. *Si f est une fonction presque affine, non identique à une constante dans l'ensemble convexe $D \subset R^n$, il existe une famille d'hyperplans P_λ ($\lambda \in \Delta$, Δ étant un intervalle de la droite numérique réelle) et une fonction strictement croissante $\varphi(\lambda)$ telles que:*

1. *Les ensembles $D_\lambda = D \cap P_\lambda$ sont deux à deux disjoints et $D = \bigcup_\lambda D_\lambda$;*
2. *Chaque hyperplan P_λ sépare les deux ensembles $\bigcup_{\lambda'<\lambda} D_{\lambda'}$, et $\bigcup_{\lambda'>\lambda} D_{\lambda'}$.*
3. *On a pour tout $x \in D_\lambda$*

$$\varphi(\lambda-0) \leqslant f(x) \leqslant \varphi(\lambda+0). \tag{5}$$

Démonstration. Nous pouvons toujours supposer que l'ensemble D est n-dimensionnel, ce qui signifie que la variété linéaire V engendrée par D coïncide avec R^n. En effet, dans le cas contraire, on peut considérer l'ensemble $\bar{D} = D + E$, où E désigne le supplémentaire du sous-espace parallèle à V, et la fonction $\bar{f}$ définie dans $\bar{D}$ par $\bar{f}(x+y) = f(x)$ pour tout couple $x \in D$, $y \in E$. Il est clair que $\bar{D}$ est convexe et contient D, et que $\bar{f}$ est une fonction presque affine dans $\bar{D}$, coïncidant avec f dans D. On peut donc, éventuellement, remplacer D, f par $\bar{D}, \bar{f}$.

Désignons par $\mathring{D}$ l'ensemble des points internes de D et posons

$$\bar{a} = \sup\{f(x): x \in \mathring{D}\}, \qquad \underline{a} = \inf\{f(x): x \in \mathring{D}\}.$$

Alors $\underline{a} < f(x) < \bar{a}$ pour tout point $x \in \mathring{D}$ car, a étant un point quelconque de D tel que $f(a) \neq f(x)$, le segment $\{x + \varepsilon(a-x): |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0\}$, pour $\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit, appartient à $\mathring{D}$ et l'on a, en vertu de (3), pour deux points y', y'' de ce segment d'un part et d'autre de x: $f(y') < f(x) < f(y'')$.

Construisons dans $\mathring{D}$ une suite de points $\{\ldots, x_{-n}, \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ vérifiant $\ldots < f(x_{-n}) < \ldots < f(x_{-1}) < f(x_0) < f(x_1) < \ldots < f(x_n) < \ldots$, $f(x_n) \to \bar{a}$, $f(x_{-n}) \to \underline{a} (n \to \infty)$ et telle que l'hyperplan de séparation passant par x_i (complètement déterminé d'après le lemme 2) ne contienne aucun des x_j $(j \neq i)$. Pour cela, ayant construit x_n, on remarque, en s'appuyant sur le lemme 3, que le suprémum de $f(x)$ dans l'intersection de $\mathring{D}$ avec l'hyperplan de séparation passant par x_n est inférieur à $\bar{a}$, de sorte qu'on peut choisir à l'extérieur de cet hyperplan un point $x_{n+1} \in \mathring{D}$ vérifiant $f(x_{n+1}) > \max\{f(x_n), a_n\}$, où a_n est tel que $a_n \to \bar{a}$ $(n \to \infty)$; de même, ayant construit x_{-n}, on peut choisir x_{-n-1}. Prenons une suite croissante de nombres $\{\ldots, \lambda_{-n}, \ldots, \lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots\}$ tels que $\lambda_n \to 1$, $\lambda_{-n} \to 0$ $(n \to \infty)$ et à chaque $\lambda = \lambda_i + \theta(\lambda_{i+1} - \lambda_i)$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, associons l'hyperplan de séparation P_λ passant par $x(\lambda) = x_i + \theta(x_{i+1} - x_i) \in \mathring{D}$. Si $\bar{a} < \infty$ et que $\bar{N} = \{x \in D : f(x) \geqslant \bar{a}\} \neq \emptyset$, prenons pour P_1 l'hyperplan d'appui de D en un point interne relatif $x(1)$ de l'ensemble convexe $\bar{N}$; il est clair qu'alors $\bar{N} \subset P_1$. De même, si $\underline{a} > -\infty$ et que $\underline{N} = \{x \in D: f(x) \leqslant \underline{a}\} \neq \emptyset$, prenons pour P_0 l'hyperplan d'appui de D en un point interne relatif $x(0)$ de $\underline{N}$. On voit sans peine que les hyperplans P_λ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ ainsi construits sont deux à deux distincts. En effet, si λ, λ' appartiennent à un même intervalle $[\lambda_i, \lambda_{i+1}]$, alors $P_\lambda \neq P_{\lambda'}$, car dans le cas contraire P_λ contiendrait $x(\lambda)$ et $x(\lambda')$, donc aussi x_i et x_{i+1}, contrairement à la construction. Si $\lambda' \leqslant \lambda_i < \lambda_{i+1} \leqslant \lambda$ et que $P_\lambda = P_{\lambda'}$, alors $x_i \in P_\lambda$, sinon, d'après le lemme 3, on aurait $f(x_i) < f(x(\lambda'))$ ou $f(x_i) > f(x(\lambda))$, ce qui est impossible; de même, $x_{i+1} \in P_\lambda$, donc, en vertu du lemme 2, $P_{\lambda_i} = P_{\lambda_{i+1}}$, ce qui est aussi contraire à la construction.

Soit maintenant un point quelconque $x \in D$. Si $f(x) \geqslant \bar{a}$ ou $f(x) \leqslant \underline{a}$, alors $x \in P_1$ ou $x \in P_0$. Dans les autres cas, on a, pour un certain i, $f(x_i) \leqslant f(x) \leqslant f(x_{i+1})$, donc il existe un hyperplan de séparation au niveau $a = f(x)$; cet hyperplan coupe le segment $[x_i; x_{i+1}]$ en un point $x_i + \theta(x_{i+1} - x_i) \in \mathring{D}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 1)$ et coïncide donc avec P_λ pour $\lambda = \lambda_i + \theta(\lambda_{i+1} - \lambda_i)$, de sorte que $x \in P_\lambda$. On a alors $D = \bigcup_{0 \leqslant \lambda \leqslant 1} D_\lambda$ avec $D_\lambda = D \cap P_\lambda$.

D'autre part, si $\lambda' < \lambda < \lambda''$, alors $f(x(\lambda')) < f(x(\lambda)) < f(x(\lambda''))$. Par suite l'hyperplan P_λ (de séparation au niveau $f(x(\lambda))$ doit laisser d'un même côté tous les points $x(\lambda')$ avec $\lambda' < \lambda$ et de l'autre côté tous les points $x(\lambda'')$ avec $\lambda'' > \lambda$. Dès lors si pour un certain $\lambda' < \lambda$ l'ensemble $D_{\lambda'}$, contenait un point x situé de l'autre côté de P_λ par rapport à $x(\lambda')$, P_λ couperait le segment $[x(\lambda'); x]$ en un point différent de x, donc appartenant à $\mathring{D}$, et, en vertu du lemme 2, coïnciderait avec $P_{\lambda'}$, ce qui est impossible. Donc $D_{\lambda'}$, se trouve entièrement d'un même côté de P_λ. De même chaque $D_{\lambda''}$, avec $\lambda'' > \lambda$, se trouve entièrement de l'autre côté de P_λ.

Pour chaque $\lambda = \lambda_i + \theta(\lambda_{i+1} - \lambda_i)$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 1)$ posons $\varphi(\lambda) = f(x_i + \theta(x_{i+1} - x_i))$. La fonction $\varphi(\lambda)$ est alors définie et strictement croissante dans tout l'intervalle $0 < \lambda < 1$ car $f(x_i) < f(x_j)$ pour $i < j$ et f est strictement croissante dans chaque segment $[x_i, x_{i+1}]$.

Montrons que pour tout $x \in \mathring{D} \cap D_\lambda$ on a (5). En effet, puisque P_0 et P_1 ne contiennent pas de point interne de D, on doit avoir $0 < \lambda < 1$. Prenons alors un hyperplan $P_{\lambda'}$ avec $\lambda' < \lambda$. D'après le lemme 2, le point $x \in \mathring{D} \cap P_\lambda$ ne peut appartenir à $P_{\lambda'}$ qui est distinct de P_λ. Donc, d'après le lemme 3, $f(x) > f(x(\lambda'))$, c'est-à-dire $\varphi(\lambda') < f(x)$, et en faisant tendre λ' vers λ, on obtient $\varphi(\lambda-0) \leqslant f(x)$. De la même façon on a $f(x) \leqslant \varphi(\lambda+0)$.

Considérons maintenant un point quelconque $x \in D_\lambda$, où $\lambda > 0$. La fonction croissante $\varphi(\lambda)$ étant continue presque partout, prenons $\lambda' < \lambda$ tel que λ' soit un point de continuité pour cette fonction. Si $x \notin P_{\lambda'}$, on a comme précédemment $f(x) > f(x(\lambda'))$. Si $x \in P_{\lambda'}$, tout point y du segment $[x(\lambda'); x]$, sauf peut-être x, est un point interne de D, car $x(\lambda') \in \mathring{D}$. On a alors, d'après ce qui précède et en tenant compte de la continuité de φ au point $\lambda', f(y) = \varphi(\lambda')$. Donc, en vertu de (3), $f(x) = \varphi(\lambda')$. Ainsi dans tous les cas $\varphi(\lambda') \leqslant f(x)$, ce qui donne lorsque $\lambda' \to \lambda - 0, \varphi(\lambda-0) \leqslant f(x)$. D'une manière analogue, on a $f(x) \leqslant \varphi(\lambda+0)$, pout tout $x \in D_\lambda$ $(\lambda < 1)$. Donc la propriété 3 est démontrée. Mais alors les ensembles D_λ sont deux à deux disjoints, car si $x \in D_{\lambda_1} \cap D_{\lambda_2}$ on aurait, en supposant $\lambda_1 < \lambda_2$,

$$f(x) \leqslant \varphi(\lambda_1+0) < \varphi(\lambda_2-0) \leqslant f(x),$$

ce qui est impossible.

Le théorème est établi.

Remarques. 1. Pour toutes les valeurs de λ, sauf au plus un ensemble dénombrable, on a $\varphi(\lambda-0) = \varphi(\lambda+0) = \varphi(\lambda)$. Donc pour ces valeurs de λ on a $(\forall x \in D_\lambda) f(x) = \varphi(\lambda)$.

Pour les autres valeurs de λ, on peut évidemment appliquer de nouveau le théorème 1 à l'ensemble convexe D_λ.

2. Si f est continue, la fonction $\varphi(\lambda)$ est aussi continue, de sorte qu'on a $(\forall x \in D_\lambda) f(x) = \varphi(\lambda)$ quel que soit λ.

CAS PARTICULIER. *Si f est une fonction presque affine dans une variété linéaire D, il existe une fonction linéaire $g(x)$ et une fonction strictement croissante $\varphi(\lambda)$, telles qu'on ait*

$$(\forall x \in D)\varphi(g(x)-0) \leqslant f(x) \leqslant \varphi(g(x)+0). \tag{6}$$

En effet, par le procédé de prolongement employé au début de la démonstration du théorème précédent, on peut toujours supposer que $D = R^n$. Tous les hyperplans P_λ sont alors parallèles, et l'on peut choisir λ_i de façon que l'équation de P_{λ_i} soit $g(x) = \lambda_i$. On a par suite $g(x(\lambda)) = \lambda$ et la relation (5) devient (6).

CONSÉQUENCES. 1. *Toute fonction f presque affine et continue dans une variété linéaire D est de la forme $f(x) = \varphi(g(x))$, où $g(x)$ est une fonction linéaire et $\varphi(\lambda)$ une fonction continue strictement croissante* (Immédiat).

2. *Si une fonction f presque affine et continue dans R^n est affine et* $\not\equiv$ const *sur une droite quelconque donnée Δ elle est affine dans tout R^n.*

En effet, on a $f(x) = \varphi(g(x))$. Soient alors λ_1, λ_2, a des nombres réels quelconques. Comme $f \not\equiv$ const sur Δ, on a aussi $g \not\equiv$ const sur Δ. Par suite, il existe sur Δ des points x_1, x_2 tels que $g(x_1) = \lambda_1, g(x_2) = \lambda_2$, et l'on a

$$\begin{aligned}\varphi(a\lambda_1+(1-a)\lambda_2) &= \varphi(g(ax_1+(1-a)x_2)\\ &= f(ax_1+(1-a)x_2) = af(x_1)+(1-a)f(x_2)\\ &= a\varphi(\lambda_1)+(1-a)\varphi(\lambda_2).\end{aligned}$$

Donc $\varphi(\lambda)$, et par suite $f(x)$, est affine.

Théorème 2. *Soit f une fonction définie dans un ensemble convexe $D \subset R^n$. S'il existe une famille d'hyperplans P_λ et une fonction strictement croissante $\varphi(\lambda)$ vérifiant les conditions* 1, 2, 3 *énoncées dans le théorème* 1, *et si f est presque affine dans chaque ensemble $D_\lambda = D \cap P_\lambda$, elle est presque affine dans D.*

Démonstration. Considérons deux points quelconques $x, y \in D$ et un point z intérieur au segment $[x; y]$. Si $[x; y]$ appartient à un certain hyperplan P_λ, on a (2) et (3) par hypothèse. Dans le cas contraire, par le point z passe, d'après la condition 1, un hyperplan P_λ parfaitement défini. Soient $P_{\lambda'}, P_{\lambda''}$ les hyperplans passant par x et par y. Comme x et y sont d'un part et d'autre de P_λ, on doit avoir, d'après la condition 2, $\lambda' < \lambda < \lambda''$ (ou $\lambda' > \lambda > \lambda''$) et comme $\varphi(\lambda)$ est strictement croissante on a, d'après la condition 3, $f(x) \leqslant \varphi(\lambda'+0) < \varphi(\lambda-0) \leqslant f(z) \leqslant \varphi(\lambda+0) < \varphi(\lambda''-0) \leqslant f(y)$. Donc f est presque affine.

En s'appuyant sur le théorème précédent on construit aisément un exemple de fonction $f(x)$ presque affine dans un ensemble convexe $D \subset R^n$, pour laquelle il n'est pas possible de trouver une fonction $\varphi(\lambda)$ strictement croissante et des fonctions affines $g(x)$, $h(x)$ vérifiant $f(x) = \varphi(g(x)/h(x))$. Il suffit pour cela de prendre le parallélogramme $D \subset R^2$ de sommets $(-1, 1), (1, 2), (1, -1), (-1, -2)$ et de poser $f(x) = a$ pour tout $x = (\xi_1, \xi_2) \in D$ sur la droite P_a joignant les points $(0, a)$ et $(3, 0)$ (si $-\frac{3}{2} \leqslant a \leqslant 0$), ou joignant les points $(0, a)$ et $(-3, 0)$ (si $0 \leqslant a \leqslant \frac{3}{2}$). Si l'on avait $f(x) = \varphi(g(x)/h(x))$, les lignes de niveau $\{x \in D: f(x) = a\}$ seraient des segments de droites $\{x: g(x) - \beta h(x) = 0\}$, où β est tel que $\varphi(\beta) = a$; ces droites seraient donc concourantes ou parallèles, ce qui n'est pas le cas ici.

Les fonctions presque affines ont été considérées dans [2], sous la forme de fonctions satisfaisant à la condition (M) dont l'énoncé correct serait comme suit:

(M) Pour tout couple de points $x, y \in D$ la fonction $\varphi(\lambda) = f(\lambda x + (1-\lambda)y)$ est ou strictement monotone ou constante dans l'intervalle $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

(L'énoncé dans [2] exige seulement que $\varphi(\lambda)$ soit monotone, ce qui ne suffit pas, comme l'a remarqué Martos [3], pour certains résultats formulés dans la suite) ([2]).

Dans un autre article [1] nous avons étudié les fonctions presque convexes, dont la définition a été rappelée au début du présent travail. Une grande partie de ces résultats coïncide avec ceux obtenus indépendamment par Martos dans [3], les fonctions appelées explicitement quasi-convexes par cet auteur n'étant autres que celles appelées ici presque convexes.

Martos a aussi considéré les fonctions à la fois quasi-convexes et quasi-concaves dans D, c'est-à-dire telles qu'on ait

$$\min\{f(x), f(y)\} \leqslant f(z) \leqslant \max\{f(x), f(y)\}$$

pour tout couple $x, y \in D$ et tout $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, $0 < \lambda < 1$ (nous appellerons ces fonctions *quasi-affines* dans D).

La proposition suivante a été formulée dans [3] (théorème 2):

Si $f(x)$ est une fonction semi-continue inférieurement et quasi-affine dans un tronçon D (intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés), alors pour tout a, l'ensemble $M_a = \{x \in D : f(x) \leqslant a\}$ est un tronçon.

Cette proposition est vraie, mais il convient d'observer que la démonstration qu'en a donné l'auteur s'appuie sur l'affirmation erronée suivante: les deux ensembles

$$M_a = \{x \in D : f(x) \leqslant a\}, \qquad N_a = \{x \in D : f(x) > a\}$$

étant convexes et M_a étant fermé (en vertu de la semi-continuité inférieure de f), ils sont séparés par un hyperplan dont l'intersection avec D est contenue dans M_a.

Pour fournir un contre-exemple, prenons le cas où D est un rectangle dans R^2 de sommets $(-1, 0)$, $(1; 0)$, $(1; 1)$, $(-1, 1)$, la fonction f étant définie comme suit:

$$f(x) = \begin{cases} 1+\xi_2 & \text{si } \xi_2 > 0, \\ \xi_1 & \text{si } \xi_2 = 0,\ \xi_1 \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } \xi_2 = 0,\ \xi_1 < 0. \end{cases}$$

On vérifie sans peine que $f(x)$ est semi-continue inférieurement, et quasi-affine dans D; pourtant pour $a = 0$ l'ensemble M_a est le segment

([2]) La propriété (M_1) introduite dans [2] n'est autre que la quasi-concavité. La propriété (M_2) introduite dans le même article est celle que dans [1] nous avons appelée la pseudo-convexité: quels que soient $x, y \in D$, $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, $0 < \lambda < 1$, si $f(x) \neq f(y)$, alors $f(z) < \max\{f(x), f(y)\}$. Elle est une conséquence de (M) et entraîne bien la proposition II dans [2]. Dans l'article cité de Martos cette propriété a été interpétée (à tort) comme étant la quasi-convexité.

$[-1; 0]$ et la droite contenant ce segment est l'hyperplan unique séparant M_a et N_a.

Nous proposons la démonstration suivante pour le théorème cité.

Soit F la plus petite face de D contenant M_a; F est aussi un tronçon. Désignons par P un hyperplan ne contenant pas F et séparant les deux ensembles convexes $M_a = \{x \in F: f(x) \leqslant a\}$, $N'_a = \{x \in F: f(x) > a\}$. (On peut évidemment supposer que $M_a \neq \emptyset$, $M_a \neq F$.) Il existe au moins un point $x_0 \in M_a \setminus P$, sinon $M_a \subset P$ et P serait un hyperplan d'appui pour F, de sorte que $P \cap F$ serait une face de F (par conséquent, une face de D aussi) contenant M_a, et plus petite que F, contrairement à l'hypothèse. Prenons alors un point quelconque $x \in P \cap F$. On a

$$x_k = x_0 + \left(1 - \frac{1}{k}\right)(x - x_0) \in M_a \setminus P \quad \text{pour tout } k = 1, 2, \ldots,$$

donc $f(x_k) \leqslant a$ et par suite

$$f(x) \leqslant \varliminf_{k \to \infty} f(x_k) \leqslant a,$$

ce qui signifie $x \in M_a$. Donc $P \cap F$ est contenu dans M_a qui coïncide ainsi avec l'intersection de F avec un demi-espace et est, par conséquent, un tronçon.

Enfin, l'auteur de [3] a voulu chercher une réciproque du théorème cité. Or, ce théorème n'a pas de réciproque comme le montre l'exemple suivant: soit dans R^2 le triangle D de sommets $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$; pour chaque $x = (\xi_1, \xi_2) \in D$ posons $f(x)$ égale à la hauteur du triangle D_x, homothétique de D (par rapport à l'origine) et ayant un côté latéral passant par x; alors $f(x)$ est continue dans D et pour tout a l'ensemble $M_a = \{x \in D: f(x) \leqslant a\}$ est un triangle; pourtant $f(x)$ n'est pas quasi-concave, puisque $N_a = \{x \in D: f(x) > a\}$, $0 < a < 1$, n'est pas convexe.

Mais la démonstration proposée plus haut donne un résultat plus fort que le théorème cité, à savoir:

Si $f(x)$ est une fonction semi-continue inférieurement et quasi-affine dans un ensemble convexe fermé D, alors pour tout a l'ensemble $M_a = \{x \in D: f(x) \leqslant a\}$ est une tranche d'une face de D.

(Par *tranche* d'un ensemble nous entendons son intersection avec un demi-espace fermé).

Sous cette forme le théorème admet bien une réciproque:

Soit $f(x)$ une fonction définie dans un ensemble convexe fermé D. Si pour tout a l'ensemble $M_a = \{x \in D: f(x) \leqslant a\}$ est une tranche d'une face de D, alors $f(x)$ est semi-continue inférieurement, et quasi-affine dans D.

En effet, M_a étant fermé et convexe, $f(x)$ est semicontinue inférieurement et quasi-convexe dans D. Montrons que $N_a = \{x \in D: f(x) > a\}$ est aussi convexe. Soient $x, y \in N_a$, $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, $0 < \lambda < 1$, F la face de D dont M_a est une tranche. Si x, y appartiennent tous deux à F, évidemment $z \in F \cap N_a$, car $F \cap N_a$ est l'intersection de F avec un demi-espace ouvert. Si l'un au moins des points x, y n'appartient pas à F, alors $z \notin F$, d'après la définition d'une face. Donc dans tous les cas $z \in N_a$; N_a est bien convexe, et $f(x)$ est quasi-concave.

TRAVAUX CITÉS

[1] Hoàng Tụy, *Sur les fonctions presque convexes*, Toán Lý 2 (1967), p. 60–63 (en vietnamien avec un résumé en français).

[2] — *Sur une classe de programmes non linéaires*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des sciences mathématiques, astronomiques et physiques, 12 (1964), p. 213–215.

[3] B. Martos, *Quasi-convexity and quasi-monotonicity in nonlinear programming*, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 2 (1967), p. 265–273.

INSTITUT DE MATHEMATIQUES, HANOÏ

Reçu par la Rédaction le 8. 12. 1969