COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XLIII 1980 FASC. 2

ÜBER WELLENFRONTMENGEN VON DISTRIBUTIONEN UND SINGULÄRE TRÄGER VON FALTUNGEN

VON

OLAF VON GRUDZINSKI UND SÖNKE HANSEN (KIEL)

1. Einleitung. Mit $\mathscr{E}'$ bezeichnen wir die Menge der Schwartz-Distributionen mit kompaktem Träger in $\boldsymbol{R}^n$; mit $\operatorname{sing\,supp} f$ den singulären Träger einer Distribution $f \in \mathscr{E}'$. Von Hörmander stammen zwei Begriffe, die den $\operatorname{sing\,supp} f$ bzw. seine konvexe Hülle $\operatorname{ch}\operatorname{sing\,supp} f$ verfeinern: die Wellenfrontmenge $\mathrm{WF}(f)$ von f aus [8] und die f assoziierte Menge $\mathscr{H}(f)$ aus „Supports and singular supports of convolutions" (in der Folge mit [7] bezeichnet). $\mathrm{WF}(f)$ ist eine Teilmenge von $\boldsymbol{R}^n \times \dot{\boldsymbol{R}}^n$ ($\dot{\boldsymbol{R}}^n := \boldsymbol{R}^n \setminus \{0\}$) mit der Eigenschaft:

(1) $\operatorname{sing\,supp} f =$ Projektion von $\mathrm{WF}(f)$ auf die erste Komponente

([8], Theorem 2.5.3). $\mathscr{H}(f)$ ist eine Menge von Stützfunktionen konvexer kompakter Teilmengen von $\boldsymbol{R}^n$, aus der sich die Stützfunktion $h_{\mathrm{ss}(f)}$ von $\operatorname{sing\,supp} f$ vermöge

$$h_{\mathrm{ss}(f)} = \sup\{h;\ h \in \mathscr{H}(f)\} \tag{2}$$

ergibt ([7], Lemma 5.2). Für den singulären Träger der Faltung $f*g$ zweier Distributionen $f, g \in \mathscr{E}'$ läßt sich mit Hilfe beider Begriffe die Inklusion

$$\operatorname{sing\,supp} f*g \subset \operatorname{sing\,supp} f + \operatorname{sing\,supp} g$$

präzisieren. Während man für die Wellenfrontmenge von $f*g$ lediglich die Inklusion

$$\mathrm{WF}(f*g) \subset \{(x+y, \eta);\ (x, \eta) \in \mathrm{WF}(f),\ (y, \eta) \in \mathrm{WF}(g)\}, \quad f, g \in \mathscr{E}', \tag{3}$$

hat (als Spezialfall von [5], Proposition 1.3.4; ein kurzer direkter Beweis findet sich in [1]), läßt sich $\mathscr{H}(f*g)$ aus $\mathscr{H}(f)$ und $\mathscr{H}(g)$ mit Hilfe einer ebenfalls in [7] eingeführten Teilmenge $\mathscr{H}(f, g)$ von $\mathscr{H}(f) \times \mathscr{H}(g)$ vollständig berechnen ([7], Theorem 5.1):

$$\mathscr{H}(f*g) = \{h_1 + h_2;\ (h_1, h_2) \in \mathscr{H}(f, g)\}, \quad f, g \in \mathscr{E}'. \tag{4}$$

Wir sagen: *f ist Singularitäten-erhaltend* (*f propagates singularities*) (1), wenn f für jedes $g \in \mathscr{E}'$ die folgende Gleichung erfüllt:

$$\text{ch sing supp} f * g = \text{ch sing supp} f + \text{ch sing supp}\, g. \tag{5}$$

Bengel erhielt in [1] eine notwendige Bedingung an $\mathrm{WF}(f)$ dafür, daß f Singularitäten erhält:

SATZ 1. *Wenn eine Distribution $f \in \mathscr{E}'$ Singularitäten-erhaltend ist, stimmen die Fasern von* $\mathrm{WF}(f)$ *über den Extremalpunkten von* ch sing supp f *mit $\dot{\boldsymbol{R}}^n$ überein.*

Die $\mathscr{H}(f)$-Theorie liefert dagegen eine Charakterisierung der Singularitäten-erhaltenden f, wie das folgende Theorem zeigt, das zwar nicht explizit in [7] erscheint, sich aber unmittelbar aus den dortigen Resultaten ergibt und dort auch implizit verwendet worden ist:

SATZ 2. *Für jedes $f \in \mathscr{E}'$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *f ist Singularitäten-erhaltend.*

(ii) *f erfüllt* (5) *für jede stetige Funktion $g \in \mathscr{E}'$ mit* sing supp $g = \{0\}$.

(iii) *$\mathscr{H}(f)$ ist einelementig, besteht also nur aus $h_{ss(f)}$.*

Zum Beweis. Die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (iii) ergibt sich sofort mit [7], Theorem 5.3; die Implikation (iii) $\Rightarrow$ (i) ist eine Kombination von Theorem 5.1 und den Lemmata 5.2 und 5.1 aus [7].

In § 3 der vorliegenden Arbeit leiten wir eine Beziehung zwischen $\mathrm{WF}(f)$ und $\mathscr{H}(f)$ her (Satz 6). Es handelt sich um eine Beschreibung der konvexen Hüllen der Mengen

$$\mathrm{ss}(f; \eta) := \{x \in \boldsymbol{R}^n;\ (x, \eta) \in \mathrm{WF}(f)\}, \qquad \eta \in S^{n-1}, \tag{6}$$

durch bestimmte Teilmengen von $\mathscr{H}(f)$. Die Aussage von Satz 1, den Bengel in [1] ohne Zuhilfenahme der $\mathscr{H}(f)$-Theorie beweist (vgl. Bemerkung 4 unten), kann man mit dieser Beziehung als Korollar von Satz 2 ablesen. Darüber hinaus bekommt man die folgende Verallgemeinerung von Satz 1:

Jedes Singularitäten-erhaltende f erhält auch die Fasern der Wellenfrontmengen über den Extremalpunkten der konvexen Hülle der singulären Träger (Satz 7).

In § 4 konstruieren wir Beispiele, aus denen hervorgeht, daß die in § 3 erhaltene Beziehung in einem bestimmten Sinne nicht verbessert werden kann.

In § 2 gehen wir auf die Frage ein, wieweit man an $\mathrm{WF}(f)$ allein ablesen kann, wann f Singularitäten-erhaltend ist. Bereits Bengel zeigte in [1], daß die Umkehrung von Satz 1 falsch ist, indem er die Existenz einer Distribution f mit $\mathrm{WF}(f) = \{0\} \times \dot{\boldsymbol{R}}^n$ bewies, die nicht invertierbar

(1) Für die $f \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$, die ja trivialerweise (5) stets erfüllen, ist diese Bezeichnung natürlich nicht allzu wörtlich zu nehmen.

ist, i.e. deren Fouriertransformierte $\hat{f}$ nicht langsam fallend ist. Die nichtinvertierbaren f werden in der $\mathscr{H}(f)$-Theorie nämlich durch die Bedingung

(7) $\quad -\infty$, die Stützfunktion der leeren Menge, gehört zu $\mathscr{H}(f)$

charakterisiert ([7], Lemma 5.4), sind also – wenn ihr singulärer Träger nichtleer ist – nach Satz 2 nicht Singularitäten-erhaltend. Wir beweisen hier die Existenz nicht-invertierbarer Distributionen mit beliebig vorgegebener Wellenfrontmenge (Satz 4) und erhalten damit insbesondere Gegenbeispiele für die Umkehrung von Satz 1, bei denen der singuläre Träger beliebig vorgegeben ist. Demnach genügt die Kenntnis von $\mathrm{WF}(f)$ allein nicht, wenn man verifizieren will, daß f Singularitäten erhält. Dies ist unerfreulich, weil die Berechnung von $\mathscr{H}(f)$ im allgemeinen erheblich größere Schwierigkeiten bereiten dürfte als die von $\mathrm{WF}(f)$.

Grundlegend für den Existenzsatz von § 2 wie auch für die Resultate der §§ 3 und 4 ist ein Theorem aus [7] (s. Satz 3 unten), demzufolge nichtinvertierbare Distributionen mit 0 als einziger Singularität existieren, deren Wellenfrontfaser ein eindimensionaler Halbstrahl ist.

Mit der Abkürzung (6) kann man die Inklusion (3) in der Form

$$\mathrm{ss}(f*g;\eta) \subset \mathrm{ss}(f;\eta)+\mathrm{ss}(g;\eta), \qquad \eta \in S^{n-1}, \tag{8}$$

schreiben. Wir sagen: *f ist für ein fixiertes $\eta \in S^{n-1}$ η-Singularitäten-erhaltend* (*f propagates η-singularities*), wenn für jedes $g \in \mathscr{E}'$ gilt

$$\mathrm{ch}\,\mathrm{ss}(f*g;\eta) = \mathrm{ch}\,\mathrm{ss}(f;\eta)+\mathrm{ch}\,\mathrm{ss}(g;\eta). \tag{9}$$

Analog zu Satz 2 werden in § 5 die η-Singularitäten-erhaltenden $f \in \mathscr{E}'$ mit den Mitteln der §§ 3 und 4 durch eine Bedingung an $\mathscr{H}(f)$ charakterisiert (Satz 9); eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung an $\mathrm{WF}(f)$, die mit der von Satz 1 vergleichbar ist, erhält man ebenfalls (Satz 10).

In § 6 demonstrieren wir die erhaltenen Zusammenhänge kurz am Beispiel der charakteristischen Funktion $\chi_{K(0,1)}$ der Einheitskugel und klären, in welchem Ausmaß $\chi_{K(0,1)}$ Singularitäten erhält (Satz 13). Berenstein und Dostal bewiesen in [3] mit den Mitteln der $\mathscr{H}(f)$-Theorie, daß $\chi_{K(0,1)}$ nicht Singularitäten-erhaltend ist; Bengel erhielt dasselbe Resultat in [1] durch Bestimmung von $\mathrm{WF}(\chi_{K(0,1)})$ mit Hilfe von Satz 1. Die Frage nach dem Zusammenhang zwischen beiden Beweismethoden war einer der Ausgangspunkte für die vorliegende Arbeit.

Abschließend konstruieren wir in § 7 einfache Beispiele $f, g \in \mathscr{E}'$, so daß zwar $f*g$, aber nicht f und g Singularitäten-erhaltend sind. Weil derartige Beispiele unseres Wissens bisher in der Literatur nicht vorkommen und sich unmittelbar mit den Resultaten von § 3 ergeben, führen wir sie mit auf.

2. Distributionen mit vorgegebener Wellenfrontmenge. Der Begriff der Wellenfrontmenge $\mathrm{WF}(f)$ einer Distribution f ist von Hörmander in [8], § 2.5, eingeführt worden. Wir gehen hier nach dem Vorbild von Duistermaat [5], § 1.3, von einer Definition aus, die nach [8], Proposition 2.5.5, zu Hörmanders ursprünglicher Definition äquivalent ist: $\boldsymbol{R}^n \times \dot{\boldsymbol{R}}^n \setminus \mathrm{WF}(f)$ ist die Menge der (x, η), für die es ein $\varphi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ mit $\varphi(x) \neq 0$ und eine Umgebung V von η in $\dot{\boldsymbol{R}}^n$ gibt, so daß für jedes $N \geqslant 0$ eine Konstante t_N existiert mit

$$(10) \qquad |(\varphi f)\hat{\ }(t\theta)| \leqslant t^{-N}, \qquad t \geqslant t_N,\ \theta \in V.$$

Die Menge $\{\eta;\, (x, \eta) \in \mathrm{WF}(f)\}$ heißt *Faser von* $\mathrm{WF}(f)$ *über* x. Offenbar ist $\mathrm{WF}(f)$ abgeschlossen in $\boldsymbol{R}^n \times \dot{\boldsymbol{R}}^n$ und konisch, d.h. $(x, \eta) \in \mathrm{WF}(f)$ genau dann, wenn $(x, t\eta) \in \mathrm{WF}(f)$ für jedes $t > 0$. Wie aus [8], Proposition 2.5.5, folgt (oder wie man mit der Methode des Beweises von [5], Proposition 1.3.2, direkt zeigen kann), gehört ein Punkt $(x, \eta) \in \boldsymbol{R}^n \times \dot{\boldsymbol{R}}^n$ genau dann zum Komplement von $\mathrm{WF}(f)$, wenn es Umgebungen U von x und V von η gibt, so daß für jedes $\varphi \in C_0^\infty(U)$ die Ungleichungen der Form (10) gelten.

Bemerkung 1. *Falls f reellwertig ist, hat $\Gamma := \mathrm{WF}(f)$ die folgende Symmetrie-Eigenschaft:*

$$(11) \qquad \textit{Für } (x, \eta) \in \boldsymbol{R}^n \times \dot{\boldsymbol{R}}^n \textit{ gilt: } (x, \eta) \in \Gamma \textit{ genau dann, wenn } (x, -\eta) \in \Gamma.$$

Dies folgt unmittelbar aus der Definition von $\mathrm{WF}(f)$, weil für reellwertige f und beliebige $\varphi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ gilt $\overline{(\varphi f)\hat{\ }(\eta)} = (\bar{\varphi} f)\hat{\ }(-\eta)$, $\eta \in \boldsymbol{R}^n$.

Der Beweis des folgenden Lemma ist evident.

Lemma 1. *Für beliebige $f, g \in \mathcal{E}'$ gilt*

$$\mathrm{WF}(f) \setminus \mathrm{WF}(g) \subset \mathrm{WF}(f+g).$$

Falls insbesondere f und g disjunkte Wellenfrontmengen haben, gilt

$$\mathrm{WF}(f+g) = \mathrm{WF}(f) \cup \mathrm{WF}(g).$$

Der Beweis des angekündigten Satzes über die Existenz nicht-invertierbarer Distributionen mit beliebig vorgegebener Wellenfrontmenge beruht auf der folgenden leichten Verbesserung von Theorem 5.2 aus [7]:

Satz 3. *Seien (ξ_j) eine Folge in $\boldsymbol{R}^n$ mit $|\xi_j| \to \infty$ und E eine Teilmenge von $\boldsymbol{R}^n$, so daß $d(\xi_j, E)/\log|\xi_j| \to \infty$ für $j \to \infty$ ($d(\xi, E)$ bedeutet den Abstand von ξ und E). Sei Ω eine offene Teilmenge von $\boldsymbol{R}^n$ mit $0 \in \bar{\Omega}$. Dann gibt es für jedes $k \in \boldsymbol{N}$ eine Funktion $f \in C_0^k(\bar{\Omega})$ mit* sing supp $f = \{0\}$, *so daß*

$$(12) \qquad p_{N,m}(f) := \sup\{|\hat{f}(\zeta)|\,|\xi|^N;\ \xi \in E,\ \zeta \in \boldsymbol{C}^n,\ |\zeta - \xi| \leqslant m\log|\xi|\} < \infty,$$
$$m, N \geqslant 0,$$

und

$$(13) \qquad \frac{\log|\hat{f}(\xi_j)|}{\log|\xi_j|} \text{ konvergiert nicht gegen } -\infty \text{ für } j \to \infty.$$

Zum Beweis. Der Beweis von [7], Theorem 5.2, ist folgendermaßen zu modifizieren: (5.8) ist durch

$$(5.8)' \qquad |\xi_j|^{k+1}\hat{f}(\xi_j) \text{ konvergiert nicht gegen } 0$$

zu ersetzen; daraus folgt ebenfalls (13). Die Rolle von $\mathscr{F}$ übernimmt der Unterraum $\mathscr{F}' := \mathscr{F} \cap C_0^k(\overline{\omega}_1 \cap \overline{\Omega})$, der — versehen mit den Halbnormen von $\mathscr{F}$ und zusätzlich mit der Halbnorm $f \mapsto \max\{\sup|D^\alpha f|;\ |\alpha| \leqslant k\}$ — ein Fréchet-Raum ist. Die Annahme, daß kein $f \in \mathscr{F}'$ existiert, das (5.8)′ erfüllt, führt mit Hörmanders Argumenten zu einer (5.10)′ verschärfenden Ungleichung der Form

$$(5.10)'' \qquad \sup_\nu |\xi_\nu|^{k+1}|\hat{f}(\xi_\nu)| \leqslant C\big(\max_{|\alpha|\leqslant k}\sup|D^\alpha f| + p_{N,m}(f)\big), \qquad f \in C_0^\infty(\omega_\delta \cap \Omega).$$

Um aus (5.10)″ einen Widerspruch zu erhalten, fixiert man $x \in \omega_1$ und $\delta' > 0$ mit der Eigenschaft

$$(14) \qquad x + \omega_{\delta'} \subset \omega_\delta \cap \Omega$$

(wegen $0 \in \overline{\Omega}$ ist dies möglich), wählt ψ sogar mit $\operatorname{supp}\psi \subset \omega_{\delta'}$ und nimmt anstelle von Hörmanders Folge (f_j) die durch $f_j' := \tau_x f_j$ definierte Folge (f_j'), die wegen (14) in $\mathscr{F}'$ liegt. Weil aus

$$|\hat{f}_j'(\zeta)| \leqslant \exp(|x|\,|\mathrm{Im}\,\zeta|)\,|\hat{f}_j(\zeta)| \leqslant |\xi|^m|\hat{f}_j(\zeta)| \qquad \text{für } |\zeta - \xi| \leqslant m\log|\xi|$$

die Ungleichung $p_{N,m}(f_j') \leqslant p_{N+m,m}(f_j)$ folgt, konvergiert auch $p_{N,m}(f_j')$ gegen 0 für $j \to \infty$. Mit der binomischen Formel folgt für $\alpha \in Z_+^n$ mit $|\alpha| \leqslant k$:

$$\sup|D^\alpha f_j'| = \sup|D^\alpha f_j| \leqslant \int_{R^n} |\xi^\alpha \hat{f}_j(\xi)|\,d\xi \leqslant \int_{R^n}\left|(\xi+\xi_j)^\alpha\hat{\psi}\left(\frac{\xi}{k_j}\right)\right|d\xi$$

$$\leqslant \mathrm{const}\,|\xi_j|^k k_j^{k+n}\int_{R^n}|\xi|^k\hat{\psi}(\xi)\,d\xi = |\xi_j|^k o(|\xi_j|) \qquad \text{für } j \to \infty.$$

Weil auch $|\hat{f}_j'(\xi_j)| = 1$, liefert das Einsetzen von (f_j') in (5.10)″ den gesuchten Widerspruch.

Sei nun $\eta \in S^{n-1}$ beliebig vorgegeben. Durch geeignete Wahl von (ξ_j) und E werden wir mit Satz 3 nicht-invertierbare Distributionen $f \in \mathscr{E}'$ mit $\mathrm{WF}(f) = \{(0, t\eta);\ t > 0\}$ gewinnen. Wir setzen

$$\xi_j := \left(j + \frac{1}{2}\right)^2\eta, \qquad j \in N,$$

und

$$E := \{t\theta;\ t > 0,\ \theta \in S^{n-1},\ |\theta - \eta| \geqslant 2t^{-1/2}\} \cup \{k^2\theta;\ \theta \in S^{n-1},\ k \in \boldsymbol{N}\}.$$

Dann gilt

$$d(\xi_j, E) \geqslant \frac{1}{2}|\xi_j|^{1/2}, \qquad j \in \boldsymbol{N}. \tag{15}$$

Beweis von (15). Wenn $\xi = t\theta$, $|\theta - \eta| \geqslant 2t^{-1/2}$, folgt im Falle $t \leqslant \frac{1}{2}|\xi_j|$

$$|\xi_j - \xi| \geqslant \frac{1}{2}|\xi_j|;$$

mit der Ungleichung

$$\left|\frac{u}{|u|} - \frac{w}{|w|}\right| \leqslant \frac{2}{|w|}|u - w|, \qquad u, w \in \boldsymbol{C}^n, \tag{16}$$

ergibt sich im Falle $t \geqslant \frac{1}{2}|\xi_j|$

$$|\xi - \xi_j| \geqslant \frac{t}{2}|\theta - \eta| \geqslant t^{1/2} \geqslant \frac{1}{2}|\xi_j|^{1/2}.$$

Wenn $\xi = k^2\theta$, folgt

$$|\xi - \xi_j| \geqslant \left|k^2\eta - \left(j + \frac{1}{2}\right)^2\eta\right| = \left|k - j - \frac{1}{2}\right|\left|k + j + \frac{1}{2}\right|$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\left(j + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}|\xi_j|^{1/2}.$$

Damit erfüllen (ξ_j) und E die Voraussetzungen von Satz 3, und für jedes Ω mit $0 \in \overline{\Omega}$ gibt es eine stetige Funktion $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{C}$ mit $\operatorname{supp} f \subset \overline{\Omega}$ und $\operatorname{sing\,supp} f = \{0\}$, die außerdem (12) erfüllt. Falls nun η_0 zu $S^{n-1} \setminus \{\eta\}$ gehört und V eine kompakte Umgebung von η_0 in $S^{n-1} \setminus \{\eta\}$ ist, gilt $\min\{|\theta - \eta|;\ \theta \in V\} > 0$, und nach Definition von E gibt es eine Konstante t_V, so daß

$$tV \subset E \quad \text{für } t \geqslant t_V. \tag{17}$$

Daraus folgt $|\hat{f}(t\theta)| \leqslant p_{N,0}(f)t^{-N}$ für $t \geqslant t_V$, $\theta \in V$, $N \geqslant 0$. Angesichts von (12) und von $\operatorname{sing\,supp} f \subset \{0\}$ bedeutet dies:

$$\operatorname{WF}(f) \subset \{(0, t\eta);\ t > 0\}. \tag{18}$$

Weil $\operatorname{WF}(f) \neq \emptyset$ und weil die rechte Seite eine kleinstmögliche nichtleere Wellenfrontmenge ist, gilt in (18) das Gleichheitszeichen. Nach Wahl von E ist außerdem für jedes $m \geqslant 0$

$$\pi_m(f) := \sup\{|\hat{f}(y)|\,|\xi|^m;\ y, \xi \in \boldsymbol{R}^n,\ |\xi| = k^2,\ k \in \boldsymbol{N},$$
$$|y - \xi| \leqslant m \log|\xi|\} \tag{19}$$

endlich. Weil für jedes $x \in \boldsymbol{R}^n$ die Funktion $\tau_x f$ ebenfalls (19) erfüllt und weil $\mathrm{WF}(\tau_x f) = \{(x, t\eta);\ t > 0\}$, ist damit das folgende Existenztheorem in dem Spezialfall, daß Γ aus einem einzigen Halbstrahl besteht, bereits bewiesen. Den allgemeinen Fall werden wir mit einem funktionalanalytischen Argument („condensation of singularities") auf den bereits bewiesenen reduzieren.

Satz 4. *Sei Γ eine beliebige abgeschlossene konische Teilmenge von $\boldsymbol{R}^n \times \dot{\boldsymbol{R}}^n$, und sei $k \in \boldsymbol{N}$. Dann gibt es eine beschränkte, absolutintegrierbare, k-mal stetig differenzierbare Funktion $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{C}$, so daß* $\mathrm{WF}(f) = \Gamma$ *und* $\pi_m(f)$ (s. (19)) *für jedes $m \geqslant 0$ endlich ist. Falls Ω eine offene Teilmenge von $\boldsymbol{R}^n$ ist, so daß die Projektion von Γ auf die erste Komponente in $\overline{\Omega}$ enthalten ist, kann f so gewählt werden, daß zusätzlich* $\operatorname{supp} f \subset \overline{\Omega}$.

Beweis. Wir definieren $C_\Gamma^k(\Omega)$ als die Menge der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{C}$ mit $\operatorname{supp} f \subset \overline{\Omega}$ und $\mathrm{WF}(f) \subset \Gamma$, so daß

$$\|f\| := \sup\{|D^\alpha f(x)|\,(1+|x|)^{n+1};\ \alpha \in \boldsymbol{Z}_+^n,\ |\alpha| \leqslant k,\ x \in \boldsymbol{R}^n\}$$

und $\pi_m(f)$ für jedes $m \geqslant 0$ endlich sind. Um $C_\Gamma^k(\Omega)$ zu einem Fréchet-Raum zu machen, wollen wir den Halbnormen $\|\cdot\|$ und π_m, $m \in \boldsymbol{N}$, abzählbar viele Halbnormen hinzufügen, die gewährleisten, daß bei Grenzübergängen die Wellenfrontmengen in Γ bleiben. Zu diesem Zweck wählen wir eine abzählbare offene Überdeckung (W_i) von $\boldsymbol{R}^n \times S^{n-1} \setminus \Gamma$ aus, so daß $\overline{W}_i \subset \boldsymbol{R}^n \times S^{n-1} \setminus \Gamma$ und W_i von der Form $W_i = U_i \times V_i$ mit offenen Kugeln U_i, V_i ist, $i \in \boldsymbol{N}$. Für jedes $i \in \boldsymbol{N}$ fixieren wir ein $\varphi_i \in C_0^\infty(\overline{U}_i)$ mit $\varphi_i \neq 0$ auf U_i. Mit diesen Daten definieren wir

$$\|f\|_{i,l} := \sup\{|(\varphi_i f)\hat{\ }(t\theta)|\,t^l;\ t \geqslant 1,\ \theta \in \overline{V}_i\}, \qquad i, l \in \boldsymbol{N}.$$

Weil für jede beschränkte Funktion $\varphi \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ gilt

$$\|(\varphi f)\hat{\ }\|_{L_\infty} \leqslant \|\varphi f\|_{L_1} \leqslant \|\varphi(1+|\cdot|)^{-n-1}\|_{L_1}\|f\|, \qquad f \in C_\Gamma^k(\Omega),$$

ist $C_\Gamma^k(\Omega)$, versehen mit dem System der Halbnormen $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_{i,l}$, π_m, $i, l, m \in \boldsymbol{N}$, ein Fréchet-Raum, dessen Topologie von der speziellen Wahl der Daten (W_i) und (φ_i) unabhängig ist.

Weil $\tilde{\Gamma} := \Gamma \cap \boldsymbol{R}^n \times S^{n-1}$ die von $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n$ induzierte Topologie trägt, gibt es abzählbar viele offene nichtleere Teilmengen X_i von $\tilde{\Gamma}$, so daß jede nichtleere offene Teilmenge von Γ eines der X_i umfaßt. Durch

$$\Gamma_i := \Gamma \setminus \{(x, t\eta);\ (x, \eta) \in X_i,\ t > 0\}, \qquad i \in \boldsymbol{N},$$

werden abzählbar viele (sowohl in Γ als auch in $\boldsymbol{R}^n \times \dot{\boldsymbol{R}}^n$) abgeschlossene konische Teilmengen von Γ definiert, die alle von Γ verschieden sind und die Eigenschaft haben, daß jede abgeschlossene konische Teilmenge von $\boldsymbol{R}^n \times \dot{\boldsymbol{R}}^n$, die echt in Γ enthalten ist, schon in einem der Γ_i liegt.

Wir nehmen nun an, die Aussage des Theorems sei falsch, d.h.: für jedes $f \in C^k_\Gamma(\Omega)$ sei die abgeschlossene konische Teilmenge $\mathrm{WF}(f)$ von $\boldsymbol{R}^n \times \dot{\boldsymbol{R}}^n$ echt in Γ, also in einem der Γ_i enthalten; das bedeutet

$$C^k_\Gamma(\Omega) \subset \bigcup_{i \in \boldsymbol{N}} C^k_{\Gamma_i}(\Omega).$$

Weil alle beteiligten Räume Fréchet-Räume und nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen stetig in $C^k_\Gamma(\Omega)$ eingebettet sind, folgt mit einem Satz von Grothendieck ([6], p. 16, Théorème A), daß $C^k_\Gamma(\Omega)$ schon in einem $C^k_{\Gamma_i}(\Omega)$ liegt, d.h.: für ein i gilt

$$C^k_\Gamma(\Omega) = C^k_{\Gamma_i}(\Omega).$$

Diese Gleichung ist aber falsch, denn zu jedem Punkt $(x, \eta) \in \Gamma \setminus \Gamma_i$ gibt es eine Funktion $f \in C^k_\Gamma(\Omega)$ mit $\mathrm{WF}(f) = \{(x, t\eta);\ t > 0\} \not\subset \Gamma_i$, wie wir im Anschluß an Satz 3 gezeigt haben. Dieser Widerspruch beendet den Beweis.

Bemerkung 2. *Die Funktion f in Satz 4 kann genau dann reellwertig gewählt werden, wenn Γ der Symmetrie-Bedingung* (11) *genügt.*

Beweis. Die eine Richtung ist wegen Bemerkung 1 klar. Zum Beweis der Umkehrung ist der Beweis von Satz 4 geeignet zu modifizieren. Die Menge E vor (15) ist durch $E \cap (-E)$ zu ersetzen, dann gelten die Ungleichungen (12) auch für $\mathrm{Re} f$ und $\mathrm{Im} f$, und weil zumindest eine dieser Funktionen in 0 singulär sein muß, kann das vor der Formulierung von Satz 4 konstruierte f reellwertig angenommen werden; im weiteren Beweis von Satz 4 ist dann lediglich noch $C^k_\Gamma(\Omega)$ als aus reellwertigen Funktionen bestehend zu definieren.

Wir erinnern daran, daß die Fouriertransformierte $\hat{f}$ einer Distribution $f \in \mathscr{E}'$ *langsam fallend* heißt, wenn mit Konstanten m, N gilt

$$\sup\{|\hat{f}(x+y)|;\ |y| \leqslant m \log(1+|x|)\} \geqslant \mathrm{const}(1+|x|)^{-N}, \qquad x \in \boldsymbol{R}^n.$$

Bemerkung 3. Falls die Funktion f aus Satz 4 kompakten Träger hat, resultiert aus der Endlichkeit der $\pi_m(f)$, $m \in \boldsymbol{N}$: $\hat{f}$ ist nicht langsam fallend, d.h. f ist nicht invertierbar. Wenn $\Gamma \neq \emptyset$, ist f daher (s. Einleitung) nicht Singularitäten-erhaltend.

Im Spezialfall $\Gamma = \{0\} \times \dot{\boldsymbol{R}}^n$ liefert Satz 4 die Aussage von Satz 4.2 aus [1] über die Existenz nicht-invertierbarer Distributionen f mit $\mathrm{WF}(f) = \{0\} \times \dot{\boldsymbol{R}}^n$.

Weil die invertierbaren Distributionen $f \in \mathscr{E}'$, die außerdem die Eigenschaft

(20) $$\mathrm{ch\,sing\,supp} f = \mathrm{ch\,supp} f$$

haben, in der Theorie der Faltungsgleichungen von besonderem Interesse sind (nach Berenstein und Dostal [2] gilt für solche f: $f*\colon \mathscr{D}'(\Omega + \mathrm{ch\,supp} f) \to \mathscr{D}'(\Omega)$ ist genau dann für jede konvexe offene Teilmenge Ω von $\boldsymbol{R}^n$

surjektiv, wenn f Singularitäten-erhaltend ist), geben wir ein Gegenbeispiel für die Umkehrung von Satz 1 an, das invertierbar ist und (20) erfüllt.

Beispiel. Wir setzen $\Gamma := S^{n-1} \times \dot{\boldsymbol{R}}^n$ und $\Omega := K(0, 1)$. Mit Satz 4 wählen wir eine stetige Funktion f mit $\mathrm{WF}(f) = \Gamma$ und $\operatorname{supp} f \subset \bar{K}(0, 1)$, die nicht invertierbar und daher auch nicht Singularitäten-erhaltend ist. Nach einem Satz von Dostal [4] gilt: Falls der singuläre Träger einer Distribution $g \in \mathscr{E}'$ ganz im Innern von $\operatorname{ch} \operatorname{sing} \operatorname{supp} f$ liegt, ist $f + g$ genau dann Singularitäten-erhaltend, wenn dies auf f zutrifft. Folglich ist auch $f + \delta$ (wo δ eine Dirac-Distribution bedeutet) nicht Singularitäten-erhaltend, ist aber nach [7], Corollary 5.4, invertierbar, weil δ dies ist. Offenbar hat $f + \delta$ die Eigenschaft (20); und mit Lemma 1 folgt

$$\mathrm{WF}(f + \delta) = (S^{n-1} \cup \{0\}) \times \dot{\boldsymbol{R}}^n.$$

Bemerkung 4. Man kann übrigens die durch Satz 3 gegebenen Distributionen g mit $\mathrm{WF}(g) = \{(0, t\eta);\ t > 0\}$ ($\eta \in S^{n-1}$ fest vorgegeben) ebenfalls dazu verwenden, den Satz 1 so wie Bengel in [1] (ohne $\mathscr{H}(f)$-Theorie) zu beweisen: Nach (3) liegt $\operatorname{sing} \operatorname{supp} f * g$ in $\mathrm{ss}(f; \eta)$; und weil jeder Extremalpunkt x von $\operatorname{ch} \operatorname{sing} \operatorname{supp} f$ zu $\operatorname{sing} \operatorname{supp} f * g$ gehört, wenn f Singularitäten-erhaltend ist, gehört (x, η) für jeden solchen Extremalpunkt x und beliebiges $\eta \in S^{n-1}$ zu $\mathrm{WF}(f)$.

3. Eine Beziehung zwischen $\mathscr{H}(f)$ und $\mathrm{WF}(f)$. Wir beginnen mit einer kurzen Wiederholung der Definition von $\mathscr{H}(f)$ aus [7].

Jeder beschränkten Menge $B \subset \boldsymbol{R}^n$ ist ihre durch $h_B(\xi) := \sup\{\langle \xi, b \rangle;\ b \in B\}$ definierte Stützfunktion $h_B : \boldsymbol{R}^n \to [-\infty, +\infty)$ zugeordnet ($h_\emptyset :\equiv -\infty$). h_B ist stetig, sublinear und positiv homogen, und es gilt

$$\overline{\operatorname{ch} B} = \{x \in \boldsymbol{R}^n;\ \langle x, \xi \rangle \leqslant h_B(\xi),\ \xi \in \boldsymbol{R}^n\}.$$

Jede sublineare positiv homogene Funktion h ist die Stützfunktion h_B einer (eindeutigen) konvexen kompakten Menge B. Die so beschriebene Zuordnung $B \mapsto h_B$ hat die Eigenschaften

(21) $\quad A \subset B$ genau dann, wenn $h_A \leqslant h_B$,

$$h_{A \cup B} = \max\{h_A, h_B\}, \tag{22}$$

sowie $h_{A+B} = h_A + h_B$.

Jeder plurisubharmonischen Funktion v auf $\boldsymbol{C}^n$, die einer Abschätzung der Form

$$v(z) \leqslant \mathrm{const}(1 + |\mathrm{Im}\, z|), \qquad z \in \boldsymbol{C}^n, \tag{23}$$

genügt, assoziiert Hörmander eine Stützfunktion $h = h_v$:

$$h_v(y) := \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \sup\{v(x + ity);\ x \in \boldsymbol{R}^n\}, \qquad y \in \boldsymbol{R}^n.$$

Falls zu einer vorgegebenen Distribution $f \in \mathscr{E}'$ für eine Folge (ξ_j) in $\boldsymbol{R}^n$ mit $|\xi_j| \to \infty$ und eine plurisubharmonische Funktion $v\colon \boldsymbol{C}^n \to [-\infty, +\infty)$ gilt $v_f(\cdot;\ \xi_j) \to v$ für $j \to \infty$, d.h.

$$\int_{\boldsymbol{C}^n} v_f(z;\ \xi_j)\varphi(z)\,dz \to \int_{\boldsymbol{C}^n} v(z)\varphi(z)\,dz$$

für jede stetige Funktion $\varphi\colon \boldsymbol{C}^n \to \boldsymbol{R}_+$ mit kompaktem Träger, wobei

$$v_f(z;\ \xi) := \frac{\log|\hat{f}(\xi + z\log|\xi|)|}{\log|\xi|}, \quad z \in \boldsymbol{C}^n,\ \xi \in \dot{\boldsymbol{R}}^n,$$

dann erfüllt v eine Ungleichung der Form (23), und v besitzt daher eine assoziierte Stützfunktion h_v. In diesem Fall sagen wir: v bzw. h_v wird durch f und die Folge (ξ_j) definiert. Von einer Ausnahme abgesehen, werden wir von der expliziten Form dieser Zuordnung keinen direkten Gebrauch machen, sondern nur die Darstellung der h_v aus Theorem 5.3 in [7] (s. auch Satz 5 unten) verwenden.

Für beliebige $f_1, \ldots, f_k \in \mathscr{E}'$ ist $\mathscr{H}(f_1, \ldots, f_k)$ als die Menge der k-Tupel $(h_1, \ldots, h_k)$ definiert, für die eine Folge (ξ_j) in $\boldsymbol{R}^n$ mit $\xi_j \to \infty$ existiert, so daß für jedes l $(1 \leqslant l \leqslant k)$ h_l eine durch f_l und (ξ_j) definierte Stützfunktion ist. Nach [7], Lemma 5.1, gibt es zu jeder Folge (ξ_j) mit $\xi_j \to \infty$ eine Teilfolge, die ein solches Tupel $(h_1, \ldots, h_k)$ definiert.

Beim Vergleich der Definition der Menge $\mathscr{H}(f, g)$ (aus der man ja mit (2) und (4) ch singsupp$f*g$ erhält) mit der Inklusion (3), der WF$(f*g)$ genügt, fällt auf, daß die Folgen (ξ_j) und die Faserpunkte η in einer Hinsicht formal identische Rollen haben: Damit (h_1, h_2) zu $\mathscr{H}(f, g)$ gehört, müssen beide Stützfunktionen durch eine gemeinsame Folge (ξ_j) definiert sein; aus Singularitäten x von f und y von g entsteht im Punkte $x+y$ allenfalls dann eine Singularität von $f*g$, wenn ein gemeinsamer Faserpunkt η existiert, so daß (x, η) zu WF(f) und (y, η) zu WF(g) gehören. Diese Beobachtung legt nahe, daß man nicht alle Eigenschaften der die einzelne Stützfunktion definierenden Folge (ξ_j) vergessen darf, wenn man Wellenfrontfaserpunkte mit Hilfe der Stützfunktionen aus $\mathscr{H}(f)$ auffinden will.

Definition. Für $f_1, \ldots, f_k \in \mathscr{E}'$ und $\eta \in S^{n-1}$ sei $\mathscr{H}(f_1, \ldots, f_k; \eta)$ die Menge der k-Tupel $(h_1, \ldots, h_k) \in \mathscr{H}(f_1, \ldots, f_k)$, die durch eine Folge (ξ_j) mit

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\xi_j}{|\xi_j|} = \eta \tag{24}$$

definiert werden.

Weil zu jeder Folge (ξ_j) in $\dot{\boldsymbol{R}}^n$ ein $\eta \in S^{n-1}$ existiert, so daß (24) für eine Teilfolge von (ξ_j) gilt, folgt

$$\mathscr{H}(f_1, \ldots, f_k) = \bigcup_{\eta \in S^{n-1}} \mathscr{H}(f_1, \ldots, f_k; \eta). \tag{25}$$

Der folgende Darstellungssatz für die Stützfunktionen aus $\mathscr{H}(f;\eta)$ ist eine Verschärfung von Theorem 5.3 aus [7], die man unmittelbar aus Hörmanders Beweis gewinnt.

SATZ 5. *Seien* $f_1, \ldots, f_k \in \mathscr{E}'$, $\eta \in S^{n-1}$ *und* $(h_1, \ldots, h_k) \in \mathscr{H}(f_1, \ldots, f_k; \eta)$. *Dann gibt es eine stetige Funktion* $g: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{C}$ *mit kompaktem Träger und mit*

$$\mathrm{WF}(g) = \{(0, t\eta);\ t > 0\}, \tag{26}$$

so daß für jedes l, $1 \leqslant l \leqslant k$, *gilt*

$$h_l = h_{\mathrm{ss}(f_l * g)}. \tag{27}$$

Zum Beweis. Sei (ξ_j) eine Folge, die h_l für $1 \leqslant l \leqslant k$ definiert und die (24) erfüllt. Dann hat – wie man leicht mit Hilfe der Ungleichung (16) einsieht – die im Beweis von [7], Lemma 5.5, (5.14), definierte Menge E die Eigenschaft, daß für jede kompakte Teilmenge V von $S^{n-1} \setminus \{\eta\}$ eine Konstante t_V existiert, so daß (17) gültig ist. Dasselbe trifft dann auch auf die im Beweis von [7], Theorem 5.3, vorkommende Menge E zu, so daß die dort mit [7], Theorem 5.2, gewählte Funktion f als Wellenfrontmenge den Halbstrahl $\{(0, t\eta);\ t > 0\}$ hat (vgl. den Beweis von (18)).

Bemerkung 5. Nach Satz 3 kann die Funktion g in Satz 5 aus $C_0^\nu(U)$ gewählt werden, wobei U eine beliebige Nullumgebung ist und $\nu \in \boldsymbol{N}$.

Mit (3) erhält man sofort die

FOLGERUNG. *Seien* $f \in \mathscr{E}'$ *und* $\eta \in S^{n-1}$. *Dann ist jedes* $h \in \mathscr{H}(f;\eta)$ *die Stützfunktion einer Teilmenge von* $\mathrm{ss}(f;\eta)$.

Damit gilt für jede Teilmenge V *von* S^{n-1}

$$\sup\{h;\ h \in \mathscr{H}(f;\eta),\ \eta \in V\} \leqslant h_A, \tag{28}$$

wobei $A = \{x;\ (x,\eta) \in \mathrm{WF}(f)$ *für ein* $\eta \in V\}$.

Im allgemeinen ist die inverse Ungleichung nicht gültig (s. § 4); falls jedoch V offen in S^{n-1} ist, steht in (28) das Gleichheitszeichen:

SATZ 6. *Seien* $f \in \mathscr{E}'$ *und* V *offen in* S^{n-1}. *Dann gilt*

$$\sup\{h;\ h \in \mathscr{H}(f;\eta),\ \eta \in V\} = h_A. \tag{29}$$

Beweis. Sei $\eta \in V$, und sei K eine kompakte Umgebung von η, die ganz in V liegt. Zuerst zerlegen wir die Dirac-Distribution δ in eine Summe

$$\delta = v + w, \tag{30a}$$

wobei v und w Distributionen aus $\mathscr{E}'$ sind mit

$$\mathrm{WF}(v) \subset \{(0, t\theta);\ \theta \in V,\ t > 0\} \tag{30b}$$

und

(30c) $$\mathrm{WF}(w) \subset \{(0, t\theta);\ \theta \in S^{n-1} \setminus \mathring{K}, t > 0\}.$$

Es genügt, die Zerlegung (30) mit Distributionen $v, w \in \mathscr{D}'$ herzuleiten, denn mit v und w erfüllen auch φv und φw die Bedingungen (30), wenn $\varphi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ mit $\varphi(0) = 1$. Sei nun L eine kompakte Umgebung von K, die ebenfalls in V liegt, und sei a eine C^∞-Funktion auf $\boldsymbol{R}^n$, die in einer Umgebung von $S^{n-1}\setminus L$ verschwindet, die auf K identisch 1 ist und für die $a(t\theta) = a(\theta)$, $\theta \in S^{n-1}$, $t \geqslant \frac{1}{2}$, gilt. Wie man leicht mit Hilfe der Kettenregel ausrechnet, gehört die Funktion $\tilde{a}: \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$, $(x, \theta) \mapsto a(\theta)$, zum Symbolraum $S_1^0(\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n)$ (s. [8], Definition 1.1.1). Die durch $\hat{v} := a$ definierte temperierte Distribution v ist per definitionem ein oszillierendes Integral mit Symbol $\tilde{a}$ und der (nicht-ausgearteten) Phasenfunktion $(x, \theta) \mapsto \langle x, \theta\rangle$ (s. [8], § 1.2). Mit [5], Theorem 2.2.2, folgt

$$\mathrm{WF}(v) \subset \{(0, t\theta);\ \theta \in L, t > 0\}.$$

Weil $w := \delta - v$ ein oszillierendes Integral mit derselben Phasenfunktion und Symbol $1-\tilde{a}$ ist, erhält man (30c) ebenso.

Zum Beweis des Satzes geben wir $x \in \boldsymbol{R}^n$ so vor, daß $(x, \eta) \in \mathrm{WF}(f)$. Nach (30c) und (3) gehört (x, η) nicht zu $\mathrm{WF}(f*w)$; folglich ist (x, η) wegen $f*v = f - f*w$ nach Lemma 1 aus $\mathrm{WF}(f*v)$; d.h. $x \in \operatorname{sing\,supp} f*v$. Weil, nach (30b) und der Folgerung von Satz 5, $\mathscr{H}(v; \theta) = \{-\infty\}$ für $\theta \in S^{n-1}\setminus V$ gilt und weil $\mathscr{H}(v) \subset \{0, -\infty\}$, folgt mit (2) und (4):

$$\langle x, \cdot\rangle \leqslant h_{\mathrm{ss}(f*v)} \leqslant \sup\{h;\ h \in \mathscr{H}(f; \theta),\ \theta \in V\}.$$

Variieren von x und η führt zur Behauptung.

Weil $\mathrm{WF}(f)$ abgeschlossen ist, erhält man aus Satz 6 die

FOLGERUNG 1. *Für $f \in \mathscr{E}'$ und $\eta \in S^{n-1}$ gilt*

(31) $$h_{\mathrm{ss}(f;\eta)} = \inf_{\varepsilon>0} \sup\{h;\ h \in \mathscr{H}(f; \theta),\ |\theta - \eta| < \varepsilon\}.$$

Damit kann man insbesondere die Fasern von $\mathrm{WF}(f)$ über den Extremalpunkten von $\operatorname{ch\,sing\,supp} f$ bestimmen:

FOLGERUNG 2. *Sei x ein Extremalpunkt von* $\operatorname{ch\,sing\,supp} f$. *Dann gehört (x, η) genau dann zu* $\mathrm{WF}(f)$, *wenn*

$$\sup\{h;\ h \in \mathscr{H}(f; \theta),\ |\theta - \eta| < \varepsilon\} \geqslant \langle x, \cdot\rangle \quad \textit{für jedes } \varepsilon > 0.$$

Mit dieser Folgerung erhält man den Satz 1 als Korollar von Satz 2. Allgemeiner gilt der

SATZ 7. *Sei f Singularitäten-erhaltend. Dann gilt für beliebige $g \in \mathscr{E}'$ und für jeden Extremalpunkt y von* $\operatorname{ch\,sing\,supp} g$:

Die Faser von $\mathrm{WF}(f*g)$ *über einem Extremalpunkt z von* $\operatorname{ch\,sing\,supp} f*g$ *der Form $z = x + y$, $x \in \operatorname{ch\,sing\,supp} f$, stimmt mit der Faser von* $\mathrm{WF}(g)$ *über y überein.*

Angesichts von $\mathrm{WF}(\delta) = \{0\} \times \dot{\boldsymbol{R}}^n$ ist Satz 1 der Spezialfall $g = \delta$ von Satz 7.

Beweis. Falls $z = x + y$ mit $x \in \operatorname{ch} \operatorname{sing} \operatorname{supp} f$ ein Extremalpunkt von $\operatorname{ch} \operatorname{sing} \operatorname{supp} f * g$ ist, ist wegen der Gültigkeit von (5) x ein Extremalpunkt von $\operatorname{ch} \operatorname{sing} \operatorname{supp} f$; und die Darstellung von z als Summe eines Punktes aus $\operatorname{ch} \operatorname{sing} \operatorname{supp} f$ und eines aus $\operatorname{ch} \operatorname{sing} \operatorname{supp} g$ ist eindeutig; ferner gehört x zu $\operatorname{sing} \operatorname{supp} f$. Deshalb folgt mit (3) sofort

$$\{\eta;\ (z, \eta) \in \mathrm{WF}(f * g)\} \subset \{\eta;\ (y, \eta) \in \mathrm{WF}(g)\}. \tag{32}$$

Zum Beweis der inversen Inklusion geben wir ein η mit $(y, \eta) \in \mathrm{WF}(g)$ vor. Mit Folgerung 2 von Satz 6 und wegen $\langle x, \cdot \rangle \leqslant h_{\mathrm{ss}(f)}$ folgt

$$\sup \{h_{\mathrm{ss}(f)} + h;\ h \in \mathscr{H}(g;\ \theta),\ |\theta - \eta| < \varepsilon\} \geqslant \langle z, \cdot \rangle, \qquad \varepsilon > 0.$$

Weil $\mathscr{H}(f)$ nur $h_{\mathrm{ss}(f)}$ enthält, ergibt sich mit (4) und erneut mit Folgerung 2 von Satz 6: $(z, \eta) \in \mathrm{WF}(f * g)$.

Als eine weitere Folgerung von Satz 5 gewinnt man die folgende Verschärfung von [7], Theorem 5.4; wir formulieren sie in einer Form, in die die Aussage von [7], Lemma 5.1, nicht miteinbezogen ist:

Satz 8. *Seien* $f_1, \ldots, f_k \in \mathscr{E}'$ *und* $\eta \in S^{n-1}$. *Sei* $f := f_1 + \ldots + f_k$. *Falls die Mengen* $\mathrm{ss}(f_l;\ \eta)$, $1 \leqslant l \leqslant k$, *paarweise disjunkt sind, gilt für jedes* $(h, h_1, \ldots, h_k) \in \mathscr{H}(f, f_1, \ldots, f_k;\ \eta)$

$$h = \max_{1 \leqslant l \leqslant k} h_l. \tag{33}$$

Bemerkung 6. Die Voraussetzung ist für beliebige η genau dann erfüllt, wenn die $\mathrm{WF}(f_l)$, $1 \leqslant l \leqslant k$, paarweise disjunkt sind. Nach Satz 8 sind daher die Aussagen von [7], Corollary 5.4, unter dieser allgemeineren Voraussetzung wahr.

Beweis von Satz 8. Mit Satz 5 wählen wir ein $g \in \mathscr{E}'$ mit (26), so daß

$$h = h_{\mathrm{ss}(f * g)} \quad \text{und} \quad h_l = h_{\mathrm{ss}(f_l * g)}, \qquad 1 \leqslant l \leqslant k. \tag{34}$$

Weil die $\operatorname{sing} \operatorname{supp} f_l * g$, die ja nach (3) und (26) in $\mathrm{ss}(f_l;\ \eta)$ liegen, deshalb nach Voraussetzung paarweise disjunkt sind, gilt

$$\operatorname{sing} \operatorname{supp} f * g = \bigcup_{l=1}^{n} \operatorname{sing} \operatorname{supp} f_l * g.$$

Mit (22) resultiert daraus

$$h_{\mathrm{ss}(f * g)} = \max_{1 \leqslant l \leqslant k} h_{\mathrm{ss}(f_l * g)}.$$

Angesichts von (34) ist dies die zu zeigende Gleichung.

4. Ein Gegenbeispiel. In diesem Paragraphen konstruieren wir zu vorgegebenem $\eta \in S^{n-1}$ eine Distribution $f \in \mathscr{E}'$, so daß

(35) $$\mathrm{ss}(f; \eta) = \{0\},$$

aber

(36) $$\mathscr{H}(f; \eta) = \{-\infty\}.$$

Dieses Beispiel zeigt: Für einpunktige Mengen V ist in (28) das Gleichheitszeichen im allgemeinen nicht gültig. In dieser Hinsicht ist die Darstellungsformel (31) für $h_{\mathrm{ss}(f;\eta)}$ die bestmögliche. Daß solche Beispiele existieren, beruht im wesentlichen darauf, daß $\mathrm{WF}(f)$ — ebenso wie $\mathrm{sing\,supp} f$ — als *abgeschlossene* Menge definiert ist. Zum Vergleich beachte man, daß es Funktionen f gibt, bei denen zwar zu jedem $\nu \in \boldsymbol{N}$ eine Nullumgebung existiert, auf der f ν-mal stetig differenzierbar ist (insbesondere ist f also in 0 unendlich oft differenzierbar), die aber trotzdem den Nullpunkt als Singularität haben (eben als Limes von Punkten, in denen f nicht unendlich oft differenzierbar ist).

Der Konstruktion liegt die folgende teilweise Verallgemeinerung von Satz 8 auf unendliche Summen von Distributionen zugrunde.

Lemma 2. *Für jedes $\nu \in \boldsymbol{N}$ sei f_ν eine Funktion aus $C_0^\nu(K)$ (K eine fest vorgegebene kompakte Teilmenge von $\boldsymbol{R}^n$), so daß*

(37) $$\sup_{|\alpha| \leqslant \nu} \|D^\alpha f_\nu\|_{L_\infty} \leqslant 2^{-\nu}.$$

Sei

$$f := \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu.$$

Sei $\eta \in S^{n-1}$ so vorgegeben, daß die $\mathrm{ss}(f_\nu; \eta)$ paarweise disjunkt sind und außerdem allenfalls für endlich viele Indizes $\nu = \nu_1, \ldots, \nu_k$ nichtleer sind. Dann ist für jedes $(h, h_1, \ldots, h_k) \in \mathscr{H}(f, f_{\nu_1}, \ldots, f_{\nu_k}; \eta)$ die Gleichung (33) *erfüllt.*

Beweis. Mit Satz 5 wählen wir eine stetige Funktion $g \in \mathscr{E}'$ mit (26), so daß $h = h_{\mathrm{ss}(f*g)}$ und $h_l = h_{\mathrm{ss}(f_{\nu_l}*g)}$ für $1 \leqslant l \leqslant k$. Für jedes $m \in \boldsymbol{N}$ ist nach (37) die Funktion $\sum_{\nu=m}^{\infty} f_\nu$ m-mal stetig differenzierbar; weil g stetig ist, ist daher auch $\left(\sum_{\nu=m}^{\infty} f_\nu\right) * g$ eine C^m-Funktion. Weil $\mathrm{ss}(f_\nu; \eta) = \emptyset$ für $\nu \neq \nu_l$, $1 \leqslant l \leqslant k$, ist nach (3) und (26) die Funktion $f_\nu * g$ für diese Indizes unendlich oft differenzierbar. Also ist $\left(\sum_{\nu \neq \nu_l} f_\nu\right) * g$ für jedes $m \in \boldsymbol{N}$ eine C^m-Funktion, d.h. ihr singulärer Träger ist leer. Weil die $\mathrm{sing\,supp} f_{\nu_l} * g$ nach (3) und (26) in $\mathrm{ss}(f_{\nu_l}; \eta)$ liegen und daher nach Voraussetzung paarweise disjunkt sind, folgt

$$\mathrm{sing\,supp} f * g = \bigcup_{l=1}^{k} \mathrm{sing\,supp} f_{\nu_l} * g.$$

Daraus ergibt sich wie im Beweis von Satz 8 die Behauptung.

Beispiel. Sei (η_ν) eine Folge von paarweise verschiedenen Elementen aus S^{n-1}, die in S^{n-1} dicht liegen. Mit Satz 4 wählen wir zu jedem ν ein $f_\nu \in C_0^\infty(K(0,1))$ aus mit

$$\mathrm{WF}(f_\nu) = \{(0, t\eta_\nu);\ t > 0\}, \tag{38}$$

so daß (37) erfüllt ist. Sei $f := \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$. Nach Lemma 2 gilt

$$\mathscr{H}(f;\eta) = \begin{cases} \{-\infty\}, & \text{falls } \eta \neq \eta_\nu \text{ für jedes } \nu \in \boldsymbol{N}, \\ \mathscr{H}(f_\nu;\eta_\nu), & \text{falls } \eta = \eta_\nu. \end{cases} \tag{39}$$

Mit Folgerung 1 von Satz 6 und mit (38) folgt $\mathrm{WF}(f) = \{0\} \times \dot{\boldsymbol{R}}^n$.

Damit ist das gesuchte Beispiel gefunden, denn (35) ist erfüllt und, wenn alle η_ν von η verschieden sind, gilt nach (39) auch (36). Man beachte, daß es auch ein Gegenbeispiel für die Umkehrung von Satz 1 ist und angesichts von (39) drastisch zeigt, wie weit die notwendige Bedingung von Satz 1 davon entfernt ist, auch hinreichend zu sein.

Mit einer Modifikation des Beweisverfahrens von Lemma 2 kann man den Satz 4 konstruktiv beweisen; auf diese Weise erhält man zusätzlich eine genaue Kenntnis von $\mathscr{H}(f;\eta)$ nach dem Muster von (39).

5. Distributionen, die η-Singularitäten-erhaltend sind. In dem folgenden Satz werden die η-Singularitäten-erhaltenden Distributionen (Definition s. Einleitung) in einer Weise charakterisiert, die der Charakterisierung der Singularitäten-erhaltenden Distributionen in Satz 2 entspricht.

SATZ 9. *Für beliebige $f \in \mathscr{E}'$ und $\eta \in S^{n-1}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *f ist η-Singularitäten-erhaltend.*

(ii) *f erfüllt* (9) *für jede stetige Funktion $g \in \mathscr{E}'$ mit* $\operatorname{sing\,supp} g = \{0\}$.

(iii) *Für beliebige Folgen $(\eta_\nu) \subset S^{n-1}$ mit $\eta_\nu \to \eta$ und beliebige $h_\nu \in \mathscr{H}(f;\eta_\nu)$ gilt*

$$\lim_{\nu\to\infty} h_\nu = h_{\mathrm{ss}(f;\eta)}. \tag{40}$$

FOLGERUNG 1. *Falls f η-Singularitäten-erhaltend ist, gilt*

$$\mathscr{H}(f;\eta) = \{h_{\mathrm{ss}(f;\eta)}\}. \tag{41}$$

Beweis von Satz 9. (iii) $\Rightarrow$ (i) ergibt sich sofort mit (4), indem man (31) auf $\mathrm{ss}(g;\eta)$ und $\mathrm{ss}(f * g;\eta)$ anwendet; man beachte auch (8).

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Seien (η_ν) und h_ν vorgegeben; o.B.d.A. können wir annehmen, daß entweder (A) alle η_ν mit η übereinstimmen oder (B) die η_ν paarweise und von η verschieden sind (sonst Übergang zu Teilfolgen). Zur Erledigung des Falles (A) ist (41) zu verifizieren: Nach Satz 5 ist

$h \in \mathscr{H}(f; \eta)$ von der Form $h = h_{ss(f*g)}$ für ein $g \in \mathscr{E}'$ mit (26). Weil wegen $\operatorname{sing supp} f*g = ss(f*g; \eta)$ und $ss(g; \eta) = \{0\}$ nach (ii)

$$\operatorname{ch} \operatorname{sing} \operatorname{supp} f*g = \operatorname{ch} ss(f; \eta)$$

gilt, steht die Behauptung da.

Im Fall (B) übernimmt das folgende Lemma die Rolle, die der Satz 5 in (A) spielt:

LEMMA 3. *Sei (η_ν) eine Folge paarweise verschiedener Elemente aus S^{n-1}; kein Häufungspunkt von (η_ν) stimme mit einem der η_ν überein. Sei $f \in \mathscr{E}'$, und für jedes ν sei $h_\nu \in \mathscr{H}(f; \eta_\nu)$. Dann gibt es eine stetige Funktion $g \in \mathscr{E}'$ mit*

$$\mathrm{WF}(g) = \overline{\bigcup_{\nu \in N} \{(0, t\eta_\nu);\ t > 0\}} \tag{42}$$

und

$$\mathscr{H}(g; \theta) = \{-\infty\} \quad \text{für } \theta \neq \eta_\nu, \tag{43}$$

so daß für jedes $\nu \in N$

$$h_\nu = h_{ss(f*g; \eta_\nu)}. \tag{44}$$

Zum Beweis von (40) im Falle (B) wählen wir nun g nach Lemma 3. Wegen (43) erhält man mit (4): $\mathscr{H}(f*g; \theta) = \{-\infty\}$ für $\theta \neq \eta_\nu$. Deshalb ergibt sich mit (44) und der Folgerung von Satz 5 (angewendet auf $f*g$)

$$\sup\{h;\ h \in \mathscr{H}(f*g; \theta),\ |\theta - \eta| < \varepsilon\} = \sup\{h_\nu;\ |\eta_\nu - \eta| < \varepsilon\}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Mit Folgerung 1 von Satz 6 folgt daraus

$$h_{ss(f*g;\eta)} = \limsup_{\nu \to \infty} h_\nu.$$

Nach (42) ist $\operatorname{sing supp} g = ss(g; \eta) = \{0\}$. Mit (ii) erhält man daher $\operatorname{ch} ss(f*g; \eta) = \operatorname{ch} ss(f; \eta)$. Der Übergang von limsup zu lim ist klar, weil (h_ν) beliebig war.

Beweis von Lemma 3. Mit Satz 5 und Bemerkung 5 wählen wir für jedes ν ein $f_\nu \in C_0^\infty(K(0, 1))$ mit (38), so daß

$$h_\nu = h_{ss(f*f_\nu)}. \tag{45}$$

O.B.d.A. sei (37) erfüllt. Wir setzen

$$g := \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu.$$

(42) und (43) folgen sofort mit Lemma 2 und mit Folgerung 2 von Satz 6. Angesichts von (45) ist zum Beweis von (44) zu zeigen:

$$\operatorname{ch} \operatorname{sing} \operatorname{supp} f*f_\nu = \operatorname{ch} ss(f*g; \eta_\nu). \tag{46}$$

Nach der Voraussetzung über die Häufungspunkte von (η_ν) gilt für alle von η_ν verschiedenen θ aus einer genügend kleinen Umgebung von η_ν nach (43) und (4): $\mathscr{H}(f*g;\theta) = \{-\infty\}$. Mit Folgerung 1 von Satz 6 folgt

(47) $$h_{\mathrm{ss}(f*g;\eta_\nu)} = \sup\{h;\, h \in \mathscr{H}(f*g;\eta_\nu)\}.$$

Weil nach Lemma 2, für $(h', h'') \in \mathscr{H}(g, f_\nu;\eta_\nu)$, $h' = h''$ gilt, folgt mit (4)

$$\mathscr{H}(f*g;\eta_\nu) = \mathscr{H}(f*f_\nu;\eta_\nu),$$

und in der rechten Seite von (47) darf man g durch f_ν ersetzen. Mit Folgerung 1 von Satz 6 erhält man dann (46), denn wegen (38) gilt

$$\operatorname{sing\,supp} f*f_\nu = \mathrm{ss}(f*f_\nu;\eta_\nu).$$

Mit den Sätzen 2 und 7 ergibt sich aus Satz 9 die

FOLGERUNG 2. *Jedes Singularitäten-erhaltende $f \in \mathscr{E}'$ ist für jedes $\eta \in S^{n-1}$ η-Singularitäten-erhaltend; in der Formel* (9) *kann* $\mathrm{ch\,ss}(f;\eta)$ *durch* $\mathrm{ch\,sing\,supp}\, f$ *ersetzt werden.*

Die Umkehrung ist falsch: Für $n > 1$ ist die charakteristische Funktion der Einheitskugel ein Gegenbeispiel (s. § 6), für $n = 1$ jedes $v \in \mathscr{E}'$, das die Bedingung (48) erfüllt (s. § 7).

Für die η-Singularitäten-erhaltenden $f \in \mathscr{E}'$ hat man eine notwendige Bedingung an $\mathrm{WF}(f)$, die als eine abgeschwächte lokale Version der Bedingung angesehen werden kann, der nach Satz 1 die Wellenfrontmengen Singularitäten-erhaltender f genügen:

SATZ 10. *Seien $f \in \mathscr{E}'$ und $\eta \in S^{n-1}$. Falls f η-Singularitäten-erhaltend ist, gilt für jede Umgebung U eines Extremalpunktes x von* $\mathrm{ch\,ss}(f;\eta)$: *die Vereinigung der Fasern von* $\mathrm{WF}(f)$ *über den Punkten von U umfaßt eine volle Umgebung von η in S^{n-1}.*

Beweis. Wir zeigen die Kontraposition. Die Verneinung der Bedingung lautet:

Für einen Extremalpunkt x von $\mathrm{ch\,ss}(f;\eta)$ gibt es eine offene Umgebung U von x und eine Folge (η_ν) mit $\eta_\nu \to \eta$, so daß $\bar{U} \times \{\eta_\nu\} \cap \mathrm{WF}(f) = \emptyset$ für jedes $\nu \in N$.

Weil $\operatorname{sing\,supp} f$ kompakt und weil $\mathrm{WF}(f)$ abgeschlossen ist, gibt es dann für jedes $\varepsilon > 0$ ein $m \in N$, so daß $\mathrm{ss}(f;\eta_\nu)$ für jedes $\nu \geqslant m$ ganz in der ε-Umgebung von $\mathrm{ss}(f;\eta) \setminus U$ liegt. Wählt man ε klein genug, gehört x als Extremalpunkt von $\mathrm{ch\,ss}(f;\eta)$ nicht zu der abgeschlossenen ε-Umgebung von $\mathrm{ch}\big(\mathrm{ss}(f;\eta)\setminus U\big)$; und weil $\mathrm{ss}(f;\eta_\nu)$ für jedes $\nu \geqslant m$ in dieser Menge liegt, gehört x insbesondere nicht zur abgeschlossenen konvexen Hülle von $\bigcup_{\nu \geqslant m} \mathrm{ss}(f;\eta_\nu)$. Nach (21) gibt es daher ein $\xi \in S^{n-1}$ und ein $\varepsilon > 0$, so daß

$$h_{\mathrm{ss}(f;\eta_\nu)}(\xi) \leqslant \langle x, \xi\rangle - \varepsilon, \qquad \nu \geqslant m.$$

Mit der Folgerung von Satz 5 folgt daraus für jede Folge von Stützfunktionen $h_\nu \in \mathscr{H}(f;\eta_\nu)$:

$$\limsup_{\nu\to\infty} h_\nu(\xi) < h_{ss(f;\eta)}(\xi).$$

Also ist die Bedingung (iii) von Satz 9 verletzt, und nach Satz 9 ist f nicht η-Singularitäten-erhaltend.

Daß die Bedingung von Satz 10 nur notwendig, aber nicht hinreichend ist, zeigt das Beispiel aus § 4: es genügt der Bedingung von Satz 10, jedoch ist die Bedingung (iii) von Satz 9 angesichts von (39) für kein η erfüllt.

Im Falle $n = 1$ ist die Bedingung (41) auch hinreichend dafür, daß f η-Singularitäten-erhaltend ist. Wir wissen nicht, ob dies für $n > 1$ zutrifft. **(P 1186)**

6. Die charakteristische Funktion der Einheitskugel. Am Beispiel der charakteristischen Funktion $\chi_{K(0,1)}$ der Einheitskugel werden die in den §§ 3 und 5 etablierten Beziehungen zwischen WF(f) und $\mathscr{H}(f)$ in besonders einfacher Weise sichtbar.

Sei $H := \{x \in \boldsymbol{R}^n;\, x_n > 0\}$. Mit dem Paley-Wiener-Theorem für die $\psi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^{n-1})$ folgt unmittelbar aus der Definition:

$$\mathrm{WF}(\chi_H) = \boldsymbol{R}^{n-1} \times \{0\} \times \{0\} \times \dot{\boldsymbol{R}}.$$

Weil Wellenfrontmengen sich unter Koordinatentransformationen wie Teilmengen des Kotangential-Bündels transformieren (s. z.B. [5], Proposition 1.3.2) und weil dies auf die Menge der Normalenvektoren von Untermannigfaltigkeiten des $\boldsymbol{R}^n$ ebenfalls zutrifft, gilt der folgende Satz aus [1], § 2, Example 1:

Satz 11. $\mathrm{WF}(\chi_{K(0,1)}) = \{(x, tx);\, x \in S^{n-1},\, t \neq 0\}$.

Zur Berechnung von $\mathscr{H}(\chi_{K(0,1)})$, die wir mit Hilfe der Symmetrie-Eigenschaften von $\chi_{K(0,1)}$ durchführen wollen, benötigen wir die

Bemerkung 7. h_+, h_- seien Stützfunktionen aus $\mathscr{H}(f)$, die durch (ξ_j) bzw. $(-\xi_j)$ definiert sind. Falls f reellwertig ist, gilt $h_+ = \overline{h_-}$; falls $f = \check{f}$, gilt $h_+ = \check{h}_-$. Dies folgt durch Einsetzen von $\hat{f}(z) = \overline{\hat{f}(-\bar{z})}$ bzw. $\hat{f} = \check{\hat{f}}$ in v_f direkt aus der Definition der h_+, h_-. Wenn also f reellwertig und symmetrisch ist, ist jedes $h \in \mathscr{H}(f)$ symmetrisch.

Seien $\eta \in S^{n-1}$ und $h \in \mathscr{H}(\chi_{K(0,1)};\eta)$. Nach der Folgerung von Satz 5 ist h die Stützfunktion einer Teilmenge der Menge ss$(\chi_{K(0,1)};\eta)$, die nach Satz 11 mit $\{+\eta, -\eta\}$ übereinstimmt. Weil h nach Bemerkung 7 symmetrisch und außerdem nicht identisch $-\infty$ ist ($\hat{\chi}_{K(0,1)}$ ist langsam fallend – s. z.B. [2]), gilt $h = h_{\{\pm\eta\}}$. Das ist der

Satz 12. $\mathscr{H}(\chi_{K(0,1)};\eta) = \{|\langle\cdot,\eta\rangle|\}$ *für jedes* $\eta \in S^{n-1}$.

Dieses Ergebnis läßt sich auch herleiten, indem man die $h \in \mathscr{H}(\chi_{K(0,1)})$ direkt auf dem Wege über die Definition berechnet und die asymptotischen

Eigenschaften von $\hat{\chi}_{K(0,1)}$ ausnutzt (s. [3], Beweis von Proposition 4; beachte dort: $|\cos s| \sim e^{|\operatorname{Im} s|}$). Der Satz 11 ergibt sich umgekehrt mit Folgerung 2 von Satz 6 sofort aus Satz 12.

Falls $n > 1$, folgt mit Satz 2 aus Satz 12, daß $\chi_{K(0,1)}$ nicht Singularitäten-erhaltend ist. Dies ist die Beweismethode von Berenstein und Dostal [3], von denen dieses Resultat stammt. Man erhält es ebenfalls als Korollar der Sätze 1 und 11; das ist Bengels Methode in [1]. Die Ergebnisse von § 3 klären den Zusammenhang zwischen beiden Beweismethoden.

Zwar ist $\chi_{K(0,1)}$ für $n > 1$ nicht Singularitäten-erhaltend, doch — wie man mit den Sätzen 9 und 12 sowie 11 folgert — gilt der

SATZ 13. *Für jedes $\eta \in S^{n-1}$ ist $\chi_{K(0,1)}$ η-Singularitäten-erhaltend; für beliebige $g \in \mathcal{E}'$ gilt*

$$\operatorname{ch} \operatorname{ss}(g * \chi_{K(0,1)}; \eta) = \operatorname{ch} \operatorname{ss}(g; \eta) + [-\eta, +\eta].$$

In welcher Form $\chi_{K(0,1)}$ die notwendige Bedingung von Satz 10 erfüllt, sieht man sofort mit Satz 11.

7. Anhang. Ein Beispiel. Mit (B) bezeichnen wir (nach dem Vorbild von [2]) kurzfristig die Klasse der Singularitäten-erhaltenden $f \in \mathcal{E}'$; mit (D) die Klasse der $f \in (B)$, die (20) erfüllen. Wie man leicht mit Hilfe der Titchmarsh-Lions-Formel für die Träger von Faltungen nachweist, hat die Klasse (D) die folgende Eigenschaft:

Zwei beliebige Distributionen $f_1, f_2 \in \mathcal{E}'$ gehören genau dann zu (D), wenn dies auf $f_1 * f_2$ zutrifft.

Für (B) ist dies im allgemeinen falsch: im Falle $n = 1$ konstruieren wir Distributionen $f_1, f_2 \in \mathcal{E}'$, so daß $f_1 * f_2 \in (B)$, aber $f_1, f_2 \notin (B)$. Dabei gehen wir von der Zerlegung (30) der Dirac-Distribution δ aus und zeigen zuerst, daß man hier — auch bei $n > 1$ — aus den Eigenschaften der Wellenfrontmengen von v und w weitgehende Rückschlüsse auf $\mathscr{H}(v)$ ziehen kann.

LEMMA 4. *v und w seien Distributionen aus $\mathcal{E}'$ mit den Eigenschaften* (30a)-(30c). *Dann gilt*

$$\mathscr{H}(v; \eta) = \begin{cases} \{0\}, & \textit{falls } \eta \in \mathring{K}, \\ \{-\infty\}, & \textit{falls } \eta \in S^{n-1} \setminus V. \end{cases}$$

Beweis. Wegen $\mathscr{H}(\delta) = \{0\}$ und $\mathscr{H}(v) \subset \{-\infty, 0\}$ folgt die Behauptung mit Satz 8 sofort aus (30).

Sei nun $n = 1$. In diesem Fall liefert Lemma 4 eine vollständige Beschreibung von $\mathscr{H}(v)$ (sei etwa $K = \{+1\}$):

$$\mathscr{H}(v; 1) = \{0\}, \quad \mathscr{H}(v; -1) = \{-\infty\}. \tag{48}$$

Wir geben ein $\varepsilon > 0$ vor und setzen

$$f_1 := v + \tau_{-\varepsilon} \check{v}, \quad f_2 := v + \tau_{+\varepsilon} \check{v}. \tag{49}$$

SATZ 14. *Die durch* (49) *definierten Distributionen* $f_1, f_2 \in \mathscr{E}'(\mathbf{R})$ *sind nicht Singularitäten-erhaltend, wohl aber* $f_1 * f_2$.

Beweis. Es gilt

$$f_1 * f_2 = v*v + \tau_{-\varepsilon}(\check{v}*v) + \tau_{+\varepsilon}(v*\check{v}) + \widecheck{v*v}.$$

Wegen $\mathrm{WF}(v) \subset \{(0, t); t > 0\}$ ((30b)!) sind die beiden mittleren Summanden C_0^∞-Funktionen, und haben die beiden übrigen Summanden disjunkte Wellenfrontmengen. Sei $h \in \mathscr{H}(f_1 * f_2)$. Wählt man nach [7], Lemma 5.1, h_1 und h_2 so, daß

$$(h, h_1, h_2) \in \mathscr{H}(f_1 * f_2, v*v, \widecheck{v*v}),$$

folgt mit Satz 8: $h = \max\{h_1, h_2\}$. Weil nach (4)

$$\mathscr{H}(v*v; \eta) = \mathscr{H}(v; \eta) \quad \text{und} \quad \mathscr{H}(\widecheck{v*v}; \eta) = \mathscr{H}(v; -\eta)$$

gilt, ist nach (48) entweder h_1 oder h_2 identisch 0, also $h \equiv 0$. Somit ist $\mathscr{H}(f_1 * f_2) = \{0\}$, und $f_1 * f_2$ ist nach Satz 2 Singularitäten-erhaltend.

Auf f_1 und f_2 trifft dies nicht zu, denn

$$\text{ch sing supp } f_1 * f_2 = \{0\} \subsetneq [-\varepsilon, +\varepsilon] = \text{ch sing supp } f_1 + \text{ch sing supp } f_2.$$

Im übrigen erfüllen f_1 und f_2 auch nicht einmal die notwendige Bedingung von Satz 1.

LITERATURNACHWEIS

[1] G. Bengel, *Wave front sets and singular supports of convolutions*, Mathematische Annalen 226 (1977), S. 247-252.

[2] C. Berenstein and M. Dostal, *On convolution equations, I*, in: Conference on Harmonic Analysis, Lecture Notes in Mathematics 266 (1972), S. 79-94.

[3] — *On convolution equations, II*, in: *Analyse fonctionnelle et applications*, Actualités scientifiques, Paris 1975.

[4] M. Dostal, *On a property of convolution*, Communications on Pure and Applied Mathematics 20 (1967), S. 565-607.

[5] J. Duistermaat, *Fourier integral operators*, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York 1973.

[6] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Memoirs of the American Mathematical Society 16 (1966).

[7] L. Hörmander, *Supports and singular supports of convolutions*, Acta Mathematica 110 (1965), S. 279-302.

[8] — *Fourier integral operators, I*, ibidem 127 (1971), S. 79-183.

MATHEMATISCHES SEMINAR DER UNIVERSITÄT
KIEL, BRD

Reçu par la Rédaction le 12. 7. 1977