ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXX (1975)

Propriétés de certaines solutions d'inégalité aux dérivées partielles de type parabolique

par J. CHABROWSKI (Katowice) et G. REYNAUD (Marseille)

Résumé. Dans ce travail, nous étudions les couples d'applications (u, v), $u = (u^1, \ldots, u^N)$, $v = (v^1, \ldots, v^N)$ définies dans $S = \bar{\Omega} \times [0, T]$ à valeurs dans $\boldsymbol{R}^N$ (Ω ouvert de $\boldsymbol{R}^n$), solutions de:

(I) *pour tout* p: $u^p(x, t) \leqslant v^p(x, t)$ *pour* $(x, t) \in \delta\Omega \times [0, T]$, $L_p(u^p) < f^p(x, t, u)$, $L_p(v^p) > f^p(x, t, v)$ *pour tout* $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$ ($\delta\Omega$ *frontière de* Ω),

où

$$L_p(u^p) = -\sum_{i=1}^{n} D_i[\mathscr{P}_{i,p}(u^p)] - B_p(u^p) + D_t \alpha_p u^p,$$

$\mathscr{P}_{i,p}(u^p)$ et $B_p(u^p)$ sont des opérateurs du premier ordre ne dépendant que de $(x, t) \in S$ et de $D_j u^p$, α_p est une fonction définie dans S, f^p est une fonction définie dans $S \times \boldsymbol{R}_N$. Sous certaines hypothèses, nous obtenons des propriétés sur les fonctions $(u^p - v^p)_+ = \max(0, u^p - v^p)$. Nous appliquons ces propriétés au cas où $\mathscr{P}_{i,p}$ est linéaire de la forme $\mathscr{P}_{i,p}(u^p) = \sum a_{ij}^p D_j u^p$ (les a_{ij}^p étant des fonctions définies dans S, non nécessairement bornées). Nous obtenons alors, sous certaines conditions de croissance à l'infini de u et de v, des résultats du type suivant: Si (u, v) est solution de (I), si $u(x, 0) < v(x, 0)$ pour $x \in \Omega$, alors $u(x, t) < v(x, t)$ pour $(x, t) \in S$.

Notations et hypothèses. Soient Ω un ouvert de l'espace euclidien $\boldsymbol{R}^n$, T un réel positif, S le cylindre $\bar{\Omega} \times [0, T]$. Nous notons $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un élément de $\boldsymbol{R}^n$, $|x|$ la quantité $\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ et t un élément de $[0, T]$.

Si B_ϱ représente la boule ouverte de centre l'origine de rayon ϱ dans $\boldsymbol{R}^n$, et S_ϱ la sphère de centre l'origine de rayon ϱ dans $\boldsymbol{R}^n$, on note par:

ω_ϱ l'ensemble $B_\varrho \cap \Omega$,

σ_ϱ l'ensemble $S_\varrho \cap \Omega$,

Γ la frontière de Ω.

Si f est une fonction différentiable, définie dans S, nous notons par $D_i f$ la dérivée partielle de la fonction f par rapport à la variable x_i, $D_t f$ la dérivée partielle de la fonction f par rapport à la variable t.

Soient $u = (u^1, \ldots, u^N)$ et $v = (v^1, \ldots, v^N)$ des applications définies dans S à valeurs dans $\boldsymbol{R}^n$, nous notons par

uv la fonction définie par $u^1v^1 + \ldots + u^N v^N$,

$D_i u$ l'application définie par: $(D_i u^1, \ldots, D_i u^N)$,

$D_t u$ l'application définie par: $(D_t u^1, \ldots, D_t u^N)$.

Par la suite, L désignera l'opérateur défini par

$$Lu \equiv \begin{cases} L_1(u^1), \\ \vdots \\ L_p(u^p), \\ \vdots \\ L_N(u^N), \end{cases}$$

où L_p est un opérateur de type parabolique défini par:

$$L_p(u^p) = -\sum_{i=1}^{n} D_i[\mathscr{P}_{i,p}(u^p)] - \mathscr{B}_p(u^p) + D_t a_p u^p.$$

$\mathscr{P}_{i,p}(u^p)$ et $\mathscr{B}_p(u^p)$ sont des opérateurs du premier ordre ne dépendant que de (x, t) appartenant à S et de $D_j u^p$, a_p est une fonction définie dans S.

Nous notons par f^p des fonctions définies pour tout (x, t) appartenant à S et tout u appartenant à $\boldsymbol{R}^N$.

Nous notons par φ et ψ des fonctions poids définies dans $\boldsymbol{R}_+ \times [a, b]$ où $[a, b]$ représente un segment de $\boldsymbol{R}$, et on leur associe de nouvelles fonctions que nous notons toujours par φ et ψ définies dans $\boldsymbol{R}^n \times [a, b]$ par $(x, t) \to \varphi(x, t) = \varphi(|x|, t)$, où x appartient à $\boldsymbol{R}^n$ et t appartient à $[a, b]$ (de même pour ψ). Pour simplifier, nous notons par $\varphi_{|x|}, \varphi_i, \varphi_t, \ldots$ les fonctions $D_{|x|}\varphi, D_i\varphi, D_t\varphi$.

Introduction. Nous traitons ici quelques théorèmes sur des inégalités portant sur des systèmes aux dérivées partielles de type parabolique. Nous employons la méthode utilisée dans [5] et [6] qui permet d'obtenir des résultats différents de ceux obtenus dans [3]. Cette différence provient de la forme des opérateurs. En effet, nous considérons les opérateurs Lu (voir notations) alors que dans [3], les opérateurs qui interviennent sont la forme:

$$-\sum_{ij} D_i D_j (a_{ij}^p u^p) + \sum_i D_i (b_i^p u^p) + D_t u^p$$

et ne sont pas équivalents. Nous traitons de problèmes analogues à ceux de [3], mais pour un cylindre S très général (l'ouvert Ω est quelconque sans aucune condition sur la frontière). Comme dans [4] et [5], nous faisons intervenir des fonctions A définies sur $[-1, +\infty[$ qui permettent de généraliser certains coefficients qui interviennent dans [3], par exemple dans [3] interviennent des quantités de la forme

$$\exp - K(|x|^2+1)^{\lambda/2}\big(\operatorname{Log}(|x|^2+1)+1\big)^{\mu},$$

alors que dans ce papier nous faisons intervenir les fonctions

$$\exp - m\left(\int_{-1}^{|x|} \frac{du}{\sqrt{A(u)}}\, du\right)^2$$

qui sont plus générales d'après les propriétés de A.

Dans § 1 nous donnons un résultat général dans le cas où l'opérateur L n'est pas linéaire, dans § 2 nous appliquons ce résultat au cas où l'opérateur L est quasi-linéaire et nous donnons un principe de maximum.

1. Cas général.

DÉFINITION 1.1. Nous dirons que l'application u définie dans S à valeurs dans $\boldsymbol{R}^N$ appartient à $[C^{1,2}(S)]^N$, si u appartient à $[C^1(S)]^N$ et si pour tout couple (i, j), $D_i[D_j u]$ est une application continue dans S (c'est-à-dire peut se prolonger en une application continue dans $\bar{S}$).

DÉFINITION 1.2. Soit u une fonction définie dans S, à valeurs dans $\boldsymbol{R}$, nous noterons par u_+ et u_- les fonctions définies par:

$$\begin{aligned} u_+(x, t) &= \max[0, u(x, t)], \\ u_-(x, t) &= \max[0, -u(x, t)] \qquad ((x, t) \text{ appartenant à } S). \end{aligned}$$

Si $v = (v^1, \ldots, v^N)$ est une application définie dans S à valeurs dans $\boldsymbol{R}^N$, nous noterons:

$$v_+ = (v_+^1, \ldots, v_+^N) \quad \text{et} \quad v_- = (v_-^1, \ldots, v_-^N).$$

HYPOTHÈSES 1.1.

(i) Pour tout u appartenant à $[C^{1,2}(S)]^N$, les $\mathscr{P}_{p,i}(u^p)$ sont localement lipschitziennes dans S.

(ii) Si on note $P_{i,p}(D_j u^p) = \mathscr{P}_{i,p}(u^p)$, alors pour tous $\xi = (\xi_i)$, $\beta = (\beta_i)$ et $\beta' = (\beta'_i)$ appartenant à $\boldsymbol{R}^n$, pour tout (x, t) appartenant à $\Omega \times [0, T]$ on a:

$$\sum_i \xi_i[P_{i,p}(\beta_j) - P_{i,p}(\beta'_j)] \leqslant \lambda F \sum_i \xi_i^2 + \frac{1}{\lambda}\sum_i (\beta_i - \beta'_i)[P_{i,p}(\beta_j) - P_{i,p}(\beta'_j)]$$

et ceci pour tout λ réel strictement positif, F étant une fonction définie dans S.

Remarque. Cette inégalité entraîne que: $\sum_i (\beta_i - \beta'_i)[P_{i,p}(\beta_j) - P_{i,p}(\beta'_j)] \geqslant 0$, c'est-à-dire une condition de monotonie.

(iii) Pour tout (u, v) appartenant à $[C^{1,2}(S)]^N$, on a

$$2(u^p - v^p)\big(\mathscr{B}_p(u^p) - \mathscr{B}_p(v^p)\big) \leqslant C_1(u^p - v^p)^2 + \mu \sum_i D_i(u^p - v^p)[\mathscr{P}_{i,p}(u^p) - \mathscr{P}_{i,p}(v^p)]$$

où C_1 appartient à $C(S)$ et μ est une constante vérifiant $0 \leqslant \mu < 2$.

(iv) Les a_p sont localement lipschitziennes dans S et vérifient presque partout dans $\Omega \times [0, T]$

$$G \leqslant a_p, \quad -H \leqslant D_t a_p,$$

où G et H appartiennent à $C(S)$ et sont positives.

(v) Les fonctions f^p vérifient la propriété suivante: si $u = (u^1, \ldots, u^N)$, $v = (v^1, \ldots, v^N)$ sont tels que $u^k \leqslant v^k$ et $u^p = v^p$, alors $f^p(x, t, u) \leqslant f^p(x, t, v)$.

(vi) Pour tout u, v appartenant à $\boldsymbol{R}^N$, on a,

$$\operatorname{sgn}(u^p - v^p)[f^p(x, t, u) - f^p(x, t, v)] \leqslant L \sum_{k=1}^{N} |u^k - v^k|$$

où L appartient à $C(S)$ ($\operatorname{sgn} x = 1$ si $x \geqslant 0$, $\operatorname{sgn} x = -1$ si $x < 0$).

DÉFINITION 1.3. Soient u et v appartenant à $[C^{1,2}(S)]^N$, nous dirons que le couple (u, v) est solution du Problème I, si

(1) $u(x, t) \leqslant v(x, t)$ pour tout (x, t) appartenant à $\Gamma \times [0, T]$,

(2) pour tout p

$$L_p(u^p) \leqslant f^p(u), \quad L_p(v^p) \geqslant f^p(v).$$

THÉORÈME I. *Soit (u, v) solution du problème* I.

Soit φ une fonction définie dans $\boldsymbol{R}_+ \times [t_1, t_2]$ à valeurs dans $\boldsymbol{R}_+^*$. (t_1, t_2 vérifiant $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$).

On suppose que:

(a) *φ est localement lipschitzienne dans $\boldsymbol{R}_+ \times [t_1, t_2]$,*

(b) *φ est solution presque partout de l'inéquation suivante*

$$-\varphi\varphi_t G - \varphi^2[H + C_1 + 2NL] - \frac{32}{2-\mu} F\varphi^2_{|x|} \geqslant 0,$$

(c) *φ et (u, v) vérifient la condition suivante: pour tout τ_1, τ_2 ($t_1 \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant t_2$), il existe une suite r_m tendant vers l'infini et une suite R_m tendant vers zéro, telles que:*

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\sigma_{r_m}} \sum_{i,p} 2\varphi^2 \cdot \frac{x_i}{r_m} (u^p - v^p)_+ [\mathscr{P}_{i,p}(u^p) - \mathscr{P}_{i,p}(v^p)]\, ds\, dt \leqslant R_m$$

alors:

(1) *la fonction à valeurs dans* $\overline{\mathbf{R}}$ *définie par*

$$t \to \int_\Omega \varphi^2 \sum_p a_p (u^p - v^p)_+^2 \, dx$$

est une fonction décroissante de t *pour* t *appartenant à* $[t_1, t_2]$,

(2) *s'il existe* t_3 *appartenant à* $[t_1, t_2]$ *tel que*

$$\Big(\int_\Omega \varphi^2 \sum_p a_p (u^p - v^p)_+^2 \, dx\Big)_{t=t_3}$$

soit fini, alors

$$\int_\Omega \varphi^2 \sum_p a_p (u^p - v^p)_+^2 \, dx$$

est fini pour tout t *appartenant à* $[t_3, t_2]$ *et*

$$\int_{t_3}^{t_2} \int_\Omega \Big[-\varphi\varphi_t G(u-v)_+^2 + \varphi^2 \sum_{i,p} [\mathscr{P}_{i,p}(u^p) - \mathscr{P}_{i,p}(v^p)] D_i (u^p - v^p)_+\Big] \, dx\, dt$$

est finie.

Démonstration. Soient u, v appartenant à $[C^{1,2}(S)]^N$ et notons $w = u - v = (u^1 - v^1, \ldots, u^N - v^N)$.

Pour tout p, nous avons:

$$L_p(u^p) - L_p(v^p) \equiv -\sum_i D_i[\mathscr{P}_{i,p}(u^p) - \mathscr{P}_{i,p}(v^p)] - [\mathscr{B}_p(u^p) - \mathscr{B}_p(v^p)] + \\ + D_t a_p w^p.$$

Soit φ une fonction vérifiant les hypothèses (a) et (b) du théorème, en presque tout point de $\Omega \times [t_1, t_2]$, nous avons:

$$2\varphi^2 w^p [L_p(u^p) - L_p(v^p)] = -\sum_i D_i \big[2\varphi^2 w^p [\mathscr{P}_{i,p}(u^p) - \mathscr{P}_{i,p}(v^p)]\big] + \\ + \sum_i 4\varphi\varphi_i w^p [\mathscr{P}_{i,p}(u^p) - \mathscr{P}_{i,p}(v^p)] + \sum_i 2\varphi^2 [\mathscr{P}_{i,p}(u^p) - \mathscr{P}_{i,p}(v^p)] D_i w^p - \\ - 2\varphi^2 w^p [\mathscr{B}_p(u^p) - \mathscr{B}_p(v^p)] + D_t[\varphi^2 a_p (w^p)^2] - 2\varphi\varphi_t a_p (w^p)^2 + \varphi^2 (w^p)^2 D_t a_p.$$

En utilisant l'hypothèse (1.1), nous obtenons:

$$(1.1) \quad 2\varphi^2 w^p [L_p(u^p) - L_p(v^p)] \geqslant \sum_i \varphi^2 \Big[2 - \mu - \frac{1}{\lambda}\Big] [\mathscr{P}_{i,p}(u^p) - \mathscr{P}_{i,p}(v^p)] D_i w^p + \\ + [-2\varphi\varphi_t G - \varphi^2 (C_1 + H) - 16\lambda F \varphi_{|x|}^2](w^p)^2 + D_t[\varphi^2 a_p (w^p)^2] - \\ - \sum_i D_i \big[2\varphi^2 w^p \big(\mathscr{P}_{i,p}(u^p) - \mathscr{P}_{i,p}(v^p)\big)\big].$$

Montrons que nous avons presque partout dans $\Omega \times [t_1, t_2]$ l'inégalité suivante:

(1.2)

$$2\varphi^2 w_+^p \cdot [L_p(u^p) - L_p(v^p)] \geqslant \varphi^2 \left[2 - \mu - \frac{1}{\lambda}\right] \sum_i [\mathscr{P}_{i,p}(u^p) - \mathscr{P}_{i,p}(v^p)] D_i w_+^p +$$
$$+ [-2\varphi\varphi_t G - \varphi^2(C_1 + H) - 16\lambda F \varphi_{|x|}^2](w_+^p)^2 + D_t[\varphi^2 a_p (w_+^p)^2] -$$
$$- \sum_i D_i \left[2\varphi^2 w_+^p (\mathscr{P}_{i,p}(u^p) - \mathscr{P}_{i,p}(v^p))\right].$$

En effet, si $w_+^p > 0$, alors (1.2) n'est autre que (1.1), si $w_+^p = 0$, alors on sait que (presque partout dans l'ensemble des points (x, t) où $w_+^p = 0$) $D_i w_+^p = 0$ et $D_t w_+^p = 0$, voir § 2 lemme B et donc les deux membres de (1.2) sont nuls presque partout dans l'ensemble des points (x, t) où $w_+^p = 0$, ce qui démontre l'inégalité (1.2).

Soit (u, v) solution du problème I, nous avons

$$L_p(u^p) - L_p(v^p) \leqslant f^p(u) - f^p(v)$$

mais par hypothèse

$$f^p(u^1, \ldots, u^N) \leqslant f^p(u^1 + w_-^1, \ldots, u^{p-1} + w_-^{p-1}, u^p, u^{p+1} + w_-^{p+1}, \ldots, u^N + w_-^N)$$

et si on remarque que $u^k + w_-^k - v^k = w_+^k$, nous avons

$$f^p(u) - f^p(v) \leqslant L \sum_{k \neq p} w_+^k + L|u^p - v^p|.$$

D'où $(w_+^p \geqslant 0)$

$$w_+^p [L_p(u^p) - L_p(v^p)] \leqslant L \left[\frac{N}{2}(w_+^p)^2 + \frac{(w_+)^2}{2}\right].$$

D'où en portant ce résultat dans l'inégalité (1.2), et en ajoutant membre à membre les N inégalités ainsi obtenues ($p = 1, 2, \ldots, N$) nous avons

$$\sum_{i,p} \left[2 - \mu - \frac{1}{\lambda}\right] \varphi^2 [\mathscr{P}_{i,p}(u^p) - \mathscr{P}_{i,p}(v^p)] D_i w_+^p +$$
$$+ [-2\varphi\varphi_t G - \varphi^2(C_1 + H + 2NL) - 16\lambda F \varphi_{|x|}^2](w_+)^2$$
$$\leqslant \sum_{i,p} D_i \left[2\varphi^2 w_+^p (\mathscr{P}_{i,p}(u^p) - \mathscr{P}_{i,p}(v^p))\right] - D_t\left[\varphi^2 \sum_p a_p (w_+^p)^2\right].$$

Si on choisit λ de telle sorte que $2 - \mu - \dfrac{1}{\lambda} > 0$, par exemple $\lambda = \dfrac{2}{2-\mu}$, et comme φ vérifie l'hypothèse (b), nous avons presque partout dans

$\Omega\times[t_1, t_2]$

$$\sum_{i,p}\frac{2-\mu}{2}\varphi^2[\mathscr{P}_{i,p}(u^p)-\mathscr{P}_{i,p}(v^p)]D_iw_+^p-\varphi\varphi_tG(w_+)^2$$
$$\leqslant\sum_{i,p}D_i\big[2\varphi^2w_+^p\big(\mathscr{P}_{i,p}(u^p)-\mathscr{P}_{i,p}(v^p)\big)\big]-D_t\Big[\varphi^2\sum_p a_p w_+^p)^2\Big].$$

Intégrons cette inégalité sur $\omega_{r_m}\times[\tau_1, \tau_2]$ où τ_1, τ_2 vérifient $t_1\leqslant\tau_1<\tau_2\leqslant t_2$ (r_m étant un terme de la suite qui intervient dans l'hypothèse (c) du théorème 1) et remarquons que

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\omega_{r_m}}\sum_{i,p}D_i\big[2\varphi^2w_+^p\big(\mathscr{P}_{i,p}(u^p)-\mathscr{P}_{i,p}(v^p)\big)\big]dx\,dt$$
$$=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\sigma_{r_m}}\sum_{i,p}2\varphi^2w_+^p\big(\mathscr{P}_{i,p}(u^p)-\mathscr{P}_{i,p}(v^p)\big)\frac{x_i}{r_m}\,ds\,dt$$

(on utilise le lemme A, § 2), de plus,

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\omega_{r_m}}D_t\Big[\sum_p\varphi^2a_p(w_+^p)^2\Big]dx\,dt$$
$$=\Big(\int_{\omega_{r_m}}\sum_p\varphi^2a_p(w_+^p)^2dx\Big)_{t=\tau_2}-\Big(\int_{\omega_{r_m}}\sum_p\varphi^2a_p(w_+^p)^2dx\Big)_{t=\tau_1},$$

on a, en utilisant l'hypothèse (c),

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\omega_{r_m}}\Big[\sum_{i,p}\frac{2-\mu}{2}\varphi^2[\mathscr{P}_{i,p}(u^p)-\mathscr{P}_{i,p}(v^p)]D_iw_+^p-\varphi\varphi_tG(w_+)^2\Big]dx\,dt$$
$$\leqslant R_m+\Big(\int_{\omega_{r_m}}\sum_p\varphi^2a_p(w_+^p)^2dx\Big)_{t=\tau_1}-\Big(\int_{\omega_{r_m}}\sum_p\varphi^2a_p(w_+^p)^2dx\Big)_{t=\tau_2}.$$

Si on fait tendre m vers l'infini, toutes les quantités qui interviennent dans l'inégalité précédente étant de signe constant presque partout, à la limite nous avons (limite dans $\overline{\boldsymbol{R}}$):

(1.3)
$$0\leqslant\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\Big[-\varphi\varphi_tG(w_+)^2+\frac{2-\mu}{2}\varphi^2\sum_{i,p}[\mathscr{P}_{i,p}(u^p)-\mathscr{P}_{i,p}(v^p)]D_iw_+^p\Big]dx\,dt$$
$$\leqslant\Big(\int_{\Omega}\varphi^2\sum_p a_p(w_+^p)^2dx\Big)_{t=\tau_1}-\Big(\int_{\Omega}\varphi^2\sum_p a_p(w_+^p)^2dx\Big)_{t=\tau_2}.$$

Pour tout (τ_1, τ_2), $t_1\leqslant\tau_1<\tau_2\leqslant t_2$, on a,

$$\Big(\int_{\Omega}\varphi^2\sum_p a_p(w_+^p)^2dx\Big)_{t=\tau_1}\geqslant\Big(\int_{\Omega}\varphi^2\sum_p a_p(w_+^p)^2dx\Big)_{t=\tau_2},$$

ce qui démontre la première partie du théorème.

Si de plus il existe t_3 appartenant à $[t_1, t_2]$ tel que,

$$\Big(\int_\Omega \varphi^2 \sum_p a_p (w_+^p)^2 dx\Big)_{t=t_3} < +\infty,$$

alors, d'après ce qui précède, pour tout τ appartenant à $[t_3, t_2]$,

$$\Big(\int_\Omega \varphi^2 \sum_p a_p (w_+^p)^2 dx\Big)_{t=\tau} < +\infty$$

et d'après (1.3)

$$\int_{\tau_3}^{\tau_2} \int_\Omega \Big[-\varphi\varphi_t G(w_+)^2 + \frac{2-\mu}{2}\varphi^2 \sum_{i,p} [\mathscr{P}_{i,p}(u^p) - \mathscr{P}_{i,p}(v^p)] D_i w_+^p\Big] dx\, dt < +\infty$$

ce qui démontre la deuxième partie du théorème.

2. Les opérateurs $\mathscr{P}_{i,p}$ sont linéaires. Par la suite, les opérateurs $\mathscr{P}_{i,p}$ seront donnés par

$$\mathscr{P}_{i,p}(u^p) = \sum_{j=1}^n a_{ij}^p D_j u^p$$

où les a_{ij}^p appartiennent à $C^1(S)$.

Hypothèses 2.1.

$$a_p \leqslant G_1, \qquad |D_j a_{ij}^p| \leqslant F_1,$$

où G_1 et F_1 appartiennent à $C_1(S)$ et sont positives.

On supposera que les hypothèses (1.1) et (2.1) sont vérifiées.

Définition 2.1. Soit ψ une fonction définie dans $\boldsymbol{R}^n \times [0, T]$ à valeurs dans $\boldsymbol{R}_+$. On note $K_{+\psi}$ l'ensemble des applications v appartenant à $[C^{1,2}(S)],^N$ vérifiant la propriété suivante:

$$\psi v_+^p \text{ appartient à } L^2(S) \text{ pour tout } p.$$

Définition 2.2. Soit A une fonction continue, strictement positive définie sur le segment $[-1+\infty[$, on note par:

$$\mathscr{A} \text{ la fonction définie par } s \to \mathscr{A}(s) = \int_{-1}^{s} \frac{du}{\sqrt{A(u)}},$$

$$\psi_A \text{ la fonction définie dans } \boldsymbol{R}^n \times [0, T] \text{ par}$$

$$(x, t) \to \psi_A(x, t) = \exp - m_1 [\mathscr{A}(|x|)]^2,$$

$$\varphi_{A,m,\beta,\tau} \text{ la fonction définie dans } \boldsymbol{R}^n \times \Big[\tau, \tau + \frac{\beta}{2}\Big] \text{ par}$$

$$(x, t) \to \varphi_{A,m,\beta,\tau}(x, t) = \exp - m \frac{[\mathscr{A}(|x|)]^2}{\beta - (t-\tau)}$$

où m_1, m, β sont des constantes positives ($\beta < 1$), τ un réel.

DÉFINITION 2.3. Nous dirons que A vérifie l'hypothèse I ($\mathrm{H_I}$) si $s\exp -M_1[\mathscr{A}(s)]^2 \leqslant K_1$, pour $s \geqslant 0$, où M_1 et K_1 sont des constantes positives.

Il en résulte que $\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{A(s)}} = \infty$.

DÉFINITION 2.4. La fonction A étant donnée, nous dirons que les fonctions $H, C_1, G, G_1, F, F_1, L$ (fonctions qui interviennent dans les hypothèses (1.1) et (2.1)) vérifient l'hypothèse II_A ($\mathrm{H}_{\mathrm{II}_A}$) si, pour tout (x, t) appartenant à S,

$$G_1(x, t) \leqslant K_1 \exp m_0[\mathscr{A}(|x|)]^2, \tag{1}$$

$$\frac{H(x, t)+C_1(x, t)+2NL(x, t)}{G(x, t)} \leqslant K_1[\mathscr{A}(|x|)]^2, \tag{2}$$

$$\frac{F(x, t)}{G(x, t)} \leqslant K_1 A(|x|), \tag{3}$$

$$\frac{F_1(x, t)}{G(x, t)} \leqslant K_1 \exp m_0[\mathscr{A}(|x|)]^2, \tag{4}$$

où m_0 est une constante positive.

THÉORÈME 2.1. *Soit A donnée vérifiant $\mathrm{H_I}$, on suppose que les fonctions $H, C_1, G, G_1, F, F_1, L$ vérifient $\mathrm{H}_{\mathrm{II}_A}$. Soient u et v appartenant à $[C^{1,2}(S)]^N$, $u-v$ appartenant à K_{+v_A}, (u, v) solution du problème* I, *alors il existe 2 constantes positives β_1 et β_2 indépendantes de τ telles que:*

si $m \leqslant \beta_1$ et $m/\beta \geqslant \beta_2$, on ait,

(1) *la fonction à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$ définie par*

$$t \to \int\limits_{\Omega} \varphi^2_{A,m,\beta,\tau} \sum_p a_p(u^p - v^p)^2_+ \, dx$$

est une fonction décroissante de t, pour t appartenant à $[\tau, \tau+\beta/2] \cap [0, T]$ et ceci pour tout τ,

$$\int\limits_{\Omega} \varphi^2_{A,m,\beta,\tau}(x, \tau_1) \sum_p a_p(u^p - v^p)^2_+ \, dx \tag{2}$$

est finie pour tout t appartenant à $]0, T]$ *et tout τ_1 vérifiant* $0 < \tau_1 - \tau < \beta/2$,

$$\varphi^2_{A,m,\beta,\tau}(x, \tau_1) \sum_{i,j,p} a^p_{ij} D_i w^p_+ D_j w^p_+ \tag{3}$$

appartient à $L^1(\Omega \times [\tau_2, T])$ où $\tau_2 > 0$ et $0 < \tau_1 - \tau < \beta/2$.

Démonstration. La fonction $\varphi_{A,m,\beta,\tau}$ vérifie l'hypothèse (a) du théorème (1.1); si dans (b) du théorème (1.1), on remplace φ par $\varphi_{A,m,\beta,\tau}$

et en tenant compte de l'hypothèse $\mathrm{H}_{\mathrm{II}_A}$, nous obtenons,

$$\left[\frac{m}{[\beta-(t-\tau)]^2}-K_1-\frac{128m^2K_1}{(2-\mu)[\beta-(t-\tau)]^2}\right][\mathscr{A}(|x|)]^2,$$

quantité qui est positive si $\dfrac{m}{\beta}\geqslant 2K_1$ et $m\leqslant\dfrac{2-\mu}{256K_1}$.

Donc $\varphi_{A,m,\beta,\tau}$ vérifient (a) et (b) du théorème (1.1) si $\dfrac{m}{\beta}\geqslant 2K_1$ et $m\leqslant\dfrac{2-\mu}{256K_1}$.

Montrons que $\varphi_{A,m,\beta,\tau}$ et (u,v) ($u-v$ appartenant à $K_{+\nu_A}$) vérifient l'hypothèse (c) du théorème (1.1) (m et β bien choisis).

Posons $w=u-v$ et considérons la quantité:

$$I(r)=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\omega_r}\sum_{ijp}2\varphi^2_{A,m,\beta,\tau}x_i w^p_+\,a^p_{ij}D_jw^p\,dx\,dt.$$

En remarquant que, presque partout dans $\Omega\times[0,T]$, $2w^p_+D_jw^p=2w^p_+D_jw^p_+=D_j(w^p_+)^2$, alors on a

$$I(r)=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\omega_r}\sum_{ijp}D_j[\varphi^2_{A,m,\beta,\tau}x_ia^p_{ij}(w^p_+)^2]\,dx\,dt-$$

$$-\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\omega_r}\sum_{ijp}\left[\delta_{ij}-\frac{4m}{\beta-(t-\tau)}\mathscr{A}(|x|)\frac{1}{\sqrt{A(|x|)}}\right]\cdot\frac{x_ix_j}{|x|}\cdot\varphi^2_{A,m,\beta,\tau}a^p_{ij}(w^p_+)^2\,dx\,dt-$$

$$-\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\omega_r}\sum_{ijp}\varphi^2_{A,m,\beta,\tau}x_i(w^p_+)^2\cdot D_ja^p_{ij}\,dx\,dt.$$

Il suffit alors d'appliquer la démonstration (étape 3) de [5] pour démontrer que,

si $m/\beta\geqslant\max[M_1+2m_0+m_1,\ m_0+3M_1+m_1]$, il existe une suite r'_m tendant vers l'infini telle que $I(r'_m)\leqslant R$ (R constante positive indépendante de m) et qu'il existe une suite r_m ($r_m\geqslant r'_m$) telle que:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\sigma_{r_m}}\sum_{ijp}2\varphi^2_{A,m,\beta,\tau}\frac{x_i}{r_m}w^p_+\,a^p_{ij}D_jw^p\,ds\,dt\leqslant\frac{R}{r_m}$$

ce qui démontre l'hypothèse (c) du théorème (1.1).

Donc si $m\leqslant\beta_1$ et $m/\beta\geqslant\beta_2$

$$\left(\beta_1=\frac{2-\mu}{256K_1};\ \beta_2=\max[2K_1,\ M_1+2m_0+m_1,\ m_0+3M_1+m_1]\right),$$

on peut utiliser l'inégalité (1.3) de la démonstration du théorème (1.1).

En remarquant que $D_i w_+^p \cdot D_j w^p = D_i w_+^p D_j w_+^p$ presque partout dans $\Omega \times [0, T]$, on a, pour tout $\tau_1, \tau_2 \in [0, T]$, $\tau \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant \tau + \beta/2$,

$$0 \leqslant \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} \Big[-\varphi_{A,m,\beta,\tau} \cdot D_t[\varphi_{A,m,\beta,\tau}] \cdot G w_+^2 +$$

$$+ \frac{2-\mu}{2} \varphi_{A,m,\beta,\tau}^2 \sum_{ijp} a_{ij}^p D_i w_+^p \cdot D_j w_+^p \Big] dx\, dt$$

$$\leqslant \Big(\int_{\Omega} \varphi_{A,m,\beta,\tau}^2 \sum_p a_p (w_+^p)^2 dx \Big)_{t=\tau_1} - \Big(\int_{\Omega} \varphi_{A,m,\beta,\tau}^2 \sum_p a_p (w_+^p)^2 dx \Big)_{t=\tau_2}$$

donc pour tout τ_1, τ_2, $\tau \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant \tau + \beta/2$ $(\tau_1, \tau_2 \in [0, T])$, on a,

$$\Big(\int_{\Omega} \varphi_{A,m,\beta,\tau}^2 \sum_p a_p (w_+^p)^2 dx \Big)_{t=\tau_1} \geqslant \Big(\int_{\Omega} \varphi_{A,m,\beta,\tau}^2 \sum_p a_p (w_+^p)^2 dx \Big)_{t=\tau_2}$$

ce qui démontre la première partie du théorème.

Supposons que pour $t = t_3$ appartenant à $[0, T]$ et τ_1 appartenant à $[\tau, \tau + \beta/2]$, on ait,

$$\int_{\Omega} \varphi_{A,m,\beta,\tau}^2 (x, \tau_1) \sum_p a_p (w_+^p)^2 dx = +\infty .$$

On en déduit que:

$$\int_{\Omega} \varphi_{A,m,\beta,t_3-\tau_1+\tau}^2 \sum_p a_p (w_+^p)^2 dx = +\infty \qquad \text{pour } t = t_3 .$$

Donc d'après la première propriété:

$$\int_{\Omega} \varphi_{A,m,\beta,t_3-\tau_1+\tau}^2 \sum_p a_p (w_+^p)^2 dx = +\infty ,$$

pour tout t tel que $\max[0, t_3 - \tau_1 + \tau] \leqslant t \leqslant t_3$. Ce qui entraînerait d'après le choix des paramètres que w n'appartiendrait pas à $K_{+\varphi_A}$, ce qui est contraire à l'hypothèse;

ce qui démontre la propriété 2 du théorème (2.1).

Soient τ et τ_1 données vérifiant $0 < \tau_1 - \tau < \beta/2$, soit τ_2 appartenant à $]0, T]$. Si on considère un point t_4 appartenant à $]\tau_2, T]$, on a d'après les résultats précédents, si on pose:

$$t_3 = \max[\tau_2, t_4 + \tau - \tau_1],$$

$$\int_{t_3}^{t_4} \int_{\Omega} \varphi_{A,m,\beta,\tau+t_4-\tau_1} \sum_{ijp} a_{ij}^p D_i w_+^p D_j w_+^p \, dx\, dt < +\infty ,$$

comme pour tout t appartenant au segment $[t_3, t_4]$ on a,

$$\varphi_{A,m,\beta,\tau+t_4-\tau_1}(x, t) \geqslant \varphi_{A,m,\beta,\tau+t_4-\tau_1}(x, t_4),$$

et que la quantité $\sum_{ijp} a_{ij}^p D_i w_+^p D_j w_+^p$ est positive, on a aussi

$$\int_{t_3}^{t_4} \int_{\Omega} \varphi_{A,m,\beta,\tau+t_4-\tau_1}(x, t_4) \sum_{ijp} a_{ij}^p D_i w_+^p D_j w_+^p \, dx \, dt < +\infty.$$

Comme $\varphi_{A,m,\beta,\tau+t_4-\tau_1}(x, t_4) = \varphi_{A,m,\beta,\tau}(x, \tau_1)$, on a pour tout t_4 appartenant à $[\tau_2, T]$

$$\int_{t_3}^{t_4} \int_{\Omega} \varphi_{A,m,\beta,\tau}(x, \tau_1) \sum_{ijp} a_{ij}^p D_i w_+^p D_j w_+^p \, dx \, dt < +\infty.$$

Pour démontrer la troisième partie du théorème, il suffit de recouvrir l'intervalle $[\tau_2, T]$ par des intervalles d'amplitude $\tau_1 - \tau$.

Corollaire 2.1. *Soit A donnée vérifiant* $\mathrm{H_I}$; *on suppose que les coefficients $H, C_1, G, G_1, F, F_1, L$ vérifient* $\mathrm{H_{II_A}}$.

Soient u et v appartenant à $[C^{1,2}(S)]^N$, $u-v$ appartenant à $K_{+\psi_A}$, (u, v) solution du Problème I, *si $u^p(x, 0) \leqslant v^p(x, 0)$ pour tout p, alors*

$$u^p(x, t) \leqslant v^p(x, t) \quad \textit{pour tout } (x, t) \textit{ appartenant à } S.$$

Démonstration. Si on applique le théorème (2.1), on sait qu'il existe deux constantes positives β_1 et β_2 indépendantes de τ, telles que si $m \leqslant \beta_1$ et $m/\beta \geqslant \beta_2$, on ait,

$$t \to \int_{\Omega} \varphi^2_{A,m,\beta,\tau} \sum_{p} a^p (w_+^p)^2 \, dx$$

soit une fonction décroissante pour t appartenant à $[\tau, \tau + \beta/2]$.

Si nous prenons $\tau = 0$, on a alors pour tout $t \in [0, \beta/2]$

$$0 \leqslant \int_{\Omega} \varphi^2_{A,m,\beta,\tau} \sum_{p} a_p (w_+^p)^2 \, dx \leqslant 0,$$

car par hypothèse $w_+^p(x, 0) = 0$.

Comme $\varphi_{A,m,\beta,\tau}$ et a_p sont strictement positifs, on en déduit que $w_+^p = 0$ pour (x, t) appartenant à $\Omega \times [0, \beta/2]$. Il suffit pour démontrer le corollaire de recouvrir l'intervalle $[0, T]$ par des intervalles d'amplitude $\beta/2$.

Remarque. Comme dans [5] (résultats optimaux) on peut montrer que dans un certain sens il n'est pas possible d'améliorer les résultats trouvés précédemment, c'est-à-dire que les théorèmes précédents sont faux si $u-v$ appartiennent à $K_{+\psi_{A,\varepsilon}}$, où $\psi_{A,\varepsilon} = \exp[-m_1 \mathscr{A}(|x|)^{2+\varepsilon}]$.

Nous citons (sans démonstration), les lemmes dont nous avons fait usage (pour la démonstration, voir [6]).

LEMME A. *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$.*

Soit f une fonction définie dans $\Omega \times [t_1, t_2]$ localement lipschitzienne et nulle sur $\Gamma \times [t_1, t_2]$. Alors nous avons pour tout t appartenant à $[t_1, t_2]$

$$\int_{\omega_r} D_i f\, dx = \int_{\sigma_r} f \cdot \frac{x_i}{r}\, ds.$$

LEMME B. *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, soit f une fonction appartenant à $C^1(\bar{\Omega})$ et nulle sur $\Gamma \times [t_1, t_2]$, soit $f_+(x) = \max(0, f(x))$.*

On a les résultats suivants:

(1) *la fonction f_+ admet presque partout dans Ω des dérivées partielles et si on appelle Ω_1 l'ensemble des points x de Ω tel que $f(x) > 0$ et Ω_2 l'ensemble des points x de Ω oú $f(x) \leqslant 0$.*

les restrictions à Ω_1 dé $D_i f_+$ et $D_i f$ sont égales,

la restriction à Ω_2 de $D_i f_+$ est nulle presque partout;

(2) *la fonction f_+ est localement lipschitzienne dans $\bar{\Omega}$.*

Bibliographie

[1] D. G. Aronson et P. Besala, *Uniqueness of positive solutions of parabolic equations with unbounded coefficients*, Colloq. Math. 18 (1967), p. 125–135.

[2] — *Uniqueness of solutions of the Cauchy problem for parabolic equations*, J. of Math. Analysis and Appl. 13 (1966), p. 516–526.

[3] P. Besala, *Function classes pertaining to differential inequalities of parabolic type in unbounded regions*, Ann. Polon. Math. 25 (1972), p. 281–291.

[4] J. Chabrowski, *Sur un système non linéaire d'inégalités différentielles paraboliques dans un domaine non borné*, ibidem 22 (1969), p. 27–35.

[5] — et G. Reynaud, *Inéquations portant sur des systèmes linéaires de type parabolique et applications à la recherche de classes d'unicité*, ce volume, p. 243–256.

[6] G. Reynaud, *Quelques résultats sur les solutions de systèmes de d'inéquations de type parabolique*, Thèses — Université d'Aix-Marseille, N° CNRS: A.O. 6791.

[7] — Notes aux C. R. Acad. Sci. Paris, 271, série A (1970), p. 835–274, série A (1972), p. 636–274, série A (1972), p. 777.

UNIVERSITÉ SILÉSIENNE, KATOWICE
U.E.R., MATHÉMATIQUE — INFORMATIQUE,
UNIVERSITÉ de MARSEILLE — LUMINY

Reçu par la Rédaction le 13. 12. 1972