NUMERICAL ANALYSIS AND MATHEMATICAL MODELLING
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 24
PWN–POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1990

О НЕКОТОРЫХ СПОСОБАХ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ОТ БЫСТРООСЦИЛЛИРУЮЩХ ФУНКЦИЙ

В. К. ЗАДИРАКА

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова, Киев, СССР

Рассматриваются способы повышения точности при вычислении интегралов от быстроосциллирующих функций вида

$$\mathcal{I}_1(\omega) = \int_a^b f(x)e^{-i\omega x}dx,$$

$$\mathcal{I}_2(\omega) = \int_a^b f(x)\cos\omega x\,dx, \tag{1}$$

$$\mathcal{I}_3(\omega) = \int_a^b f(x)\sin\omega x\,dx,$$

где: $f(x)\in F$ (F — некоторый класс функций), ω — произвольное вещественное число и информация о $f(x)$ задается в N узловых точках из $[a, b]$.

Необходимость в вычислении таких интегралов возникает при решении многих классов задач вычислительной и прикладной математики, таких как: краевые задачи для уравнений в частных производных, автоматическое регулирование, цифровая обработка сигналов, моделирование оптических систем и синтезированных голограмм, распознавание образов и других.

Для вычисления интеграла $\mathcal{I}(\omega)$ (1) могут быть применены многие известные классические правила интегрирования, однако, они дают хорошую точность в случае, если интегрируемая функция является достаточно гладкой и не быстроизменяющейся. В интеграле $\mathcal{I}_1(\omega)$, например, интегрируемой функцией является произведение $f(x)\cdot e^{-i\omega x}$. Если параметр ω — большое число, то функция $e^{-i\omega x}$ быстро осциллирует, и для получения значения $\mathcal{I}_1(\omega)$ с допустимой точностью, даже при медленно

(1) $\mathcal{I}(\omega)$ — один из инегралов $\mathcal{I}_1(\omega)$–$\mathcal{I}_3(\omega)$.

изменяющейся функции $f(x)$, следует в соответствующей квадратурной формуле брать многочлен степени $n \gg \omega(b-a)/\pi$. Это приводит к трудоемким вычислениям. Таким образом, указанные выше квадратуры практически могут применяться для вычисления $\mathscr{I}(\omega)$ при небольших значениях ω. Чтобы построить квадратурные формулы, пригодные при изменении ω в широких пределах, необходимо заранее учесть наличие осциллирующего множителя. Это можно сделать, принимая, например, такие множители за весовые функции.

Впервые Файлоном был построен аналог квадратурной формулы Симпсона, который сохраняет равномерную точность также и при больших значениях ω. Еругиным Н. П. и Соболевым С. Л. [1] предложен метод, который также сохраняет равномерную точность относительно ω. Крыловым В. И. развит метод работы [1]. В [3] при построении квадратурной формулы вычисления коэффициентов Фурье периодической функции была использована сплайн-интерполяция для равноотстоящих точек. В работе [4] в случае, когда $f(x)$ — гладкая функция, для узлов интерполирования

$$x_j = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} d_j, \qquad j = \overline{1, n},$$

где: $d_j \in [-1, 1]$ — некоторые числа, интеграл $\mathscr{I}_1(\omega)$ заменяется на $\int_a^b L_n(x) e^{-i\omega x}\, dx$ ($L_n(x)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа степени $n-1$); тогда:

$$\text{(2)} \qquad \begin{gathered} \int_a^b L_n(x) e^{-i\omega x}\, dx = S_n^{\omega}(f) = \frac{b-a}{2} e^{-i\omega(a+b)/2} \sum_{j=1}^{n} D_j\left(\omega \frac{b-a}{2}\right) f(x_j), \\ D_j(p) = \int_{-1}^{1} \left(\prod_{k \neq j} \frac{t-d_k}{d_j-d_k}\right) e^{-ipt}\, dt. \end{gathered}$$

На практике формула (2) чаще всего используется для случаев: $n = 3$, $d_1 = -1, d_2 = 0, d_3 = 1$ (формула Файлона) или $n = 5, d_1 = -1, d_2 = -0.5$, $d_3 = 0$, $d_4 = 0.5$, $d_5 = 1$.

Основными характеристиками вычислительных алгоритмов, сложившимися в практике численного решения задач вычислительной и прикладной математики на ЭВМ, являются: точность, время решения и требуемая память. Оптимизация алгоритмов состоит в оптимизации одной из характеристик при соблюдении ограничений на остальные.

§ 1. Оптимальные по точности квадратурные формулы

Нередко при решении задач традиционными методами мы не получаем требуемого значения некоторого показателя качества решения, например, решения с заданной точностью или с максимально возможной точностью. В таких случаях бывает полезно, а иногда и необходимо, применить оптимальный по соответствующему критерию алгоритм решения задачи. Это дает возможность либо получить искомое решение, либо при заданной исходной информации показать, что его получить невозможно.

Существенная особенность рассматриваемой ниже постановки задач на оптимальность состоит в том, что связь меры погрешности с различными видами погрешности решения данной задачи численного интегрирования естественно приводит к новым конкретным областям неопределенности задания исходной информации, которые ранее не рассматривались и весьма важны в приложениях. Данный подход позволяет строить оптимальные численные методы. При этом предполагается, что необходимые вычисления выполняются точно. В реальных условиях решения задач на ЭВМ, когда появляется погрешность округления, эти алгоритмы являются асимптотически оптимальными по τ, где τ — количество двоичных разрядов у мантиссы чисел.

Существующие методы построения оценок снизу погрешности численного интегрирования позволяют, как правило, строить и обосновывать оптимальные по порядку квадратурные формулы относительно числа входных данных. В данном разделе основное внимание уделено методам построения оптимальных и асимптотически оптимальных по точности квадратурных формул вычисления $\mathscr{I}(\omega)$.

На основании метода граничных функций

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{I}^* = (\mathscr{I}^+ + \mathscr{I}^-)/2, \qquad \varrho^* = (\mathscr{I}^+ - \mathscr{I}^-)/2,\\
&\mathscr{I}^+ = \sup_{f\in F} \mathscr{I}(\omega), \qquad \mathscr{I}^- = \inf_{f\in F} \mathscr{I}(\omega),
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где: ϱ^* — чебышевский радиус области значений $\mathscr{I}(\omega)$ или погрешность представления $\mathscr{I}(\omega)$ при помощи чебышевского центра $\mathscr{I}^*$. Квадратурную формулу, которая вычисляет $\mathscr{I}^*$ будем называть оптимальной по точности. Квадратурная формула вычисления $\bar{\mathscr{I}}$, для которой

$$
\sup_{f\in F} |\bar{\mathscr{I}} - \mathscr{I}(\omega)| \leqslant \varrho^* + \eta, \qquad \eta > 0 \text{ и } \eta = o(\varrho^*),\ O(\varrho^*),\ \varrho^* \to 0,
\tag{4}
$$

называется соответственно асимптотически оптимальной или оптимальной по порядку.

При данной информации о задаче никакая квадратурная формула не дает точность меньше, чем ϱ^*. Чебышевский радиус области неопределенности значений $\mathscr{I}(\omega)$ характеризует разрешающую способность квадратурных формул. Для ее повышения необходимо, наряду с классами F, рассматривать более узкие, интерполяционные классы F_N, которые определяются принадлежностью классу F и еще $2N$ числами: $f(x_\nu)$ и x_ν, $\nu = \overline{0, N-1}$. Класс F_N представляет собой пучок функций из F, которые интерполируют заданную функцию в узлах x_ν, $\nu=\overline{0, N-1}$. Поскольку квадратурная формула использует $f(x_\nu)$, $\nu=\overline{0, N-1}$, то все функции $f(x)\in F_N$ ею не различаются. Таким образом, приближенные значения $\mathscr{I}(\omega)$ будут одинаковыми для всех $f\in F_N$, а точные значения, вообще говоря, будут различными. Наряду с классами F_N, будем также рассматривать классы $F_{N,\varepsilon}$, которые соответствуют проближенному заданию исходной информации из области $|f_\nu-\tilde{f}_\nu|\leqslant\varepsilon$, $\nu=\overline{0, N-1}$. Именно классы $F_{N,\varepsilon}$ соответствуют реально решаемым задачам.

В качестве классов F_N и $F_{N,\varepsilon}$ рассматриваются следующие классы функций [5]:

Q_L — класс ограниченных функций, имеющих кусочно-непрерывные производные, ограниченные константой L;

C_L — класс функций, удовлетворяющих условию Липшица с константой L;

$C_{L,N}$ — интерполяционный клсс функций, удовлетворяющих условию Липшица с константой L;

$C_{L,N,\varepsilon}$ — класс функций $C_{L,N}$ с приближенно заданными исходными данными;

$W_{2,L,N}$ — класс функций, первая производная которых удовлетворяет условию Липшица с константой L и заданных своими фиксированными значениями $\{f_\nu\}_0^{N-1}$ и $\{f'_\nu\}_0^{N-1}$ в N заданных узлах $\{x_\nu\}_0^{N-1}$.

В некоторых случаях нам понадобится (для удобства построения „плохой"(²) функции класса) выполнения условий:

$$\text{(A)} \qquad [|\omega|(b-a)/\pi]+1$$

узлов квадратурной формулы входят в число нулей функций $\sin\omega x(\cos\omega x)$ на $[a, b]$ или

(B) N узлов квадратурной формулы x_ν, $\nu=\overline{0, N-1}$, входят в число нулей функций $\sin\omega x$ $(\cos\omega x)$ на $[a, b]$ (случай сильной осцилляции).

По отношению к интегралу $\mathscr{I}_3(\omega)$, справедливы следующие результаты [5]–[7].

Теорема 1. *Пусть* $f(x)\in C_L$ *выполняется условие* (A) *и сетка узлов равномерная*: $x_\nu=\nu\cdot\Delta x$, $\nu=\overline{0, N-1}$, $\Delta x=(b-a)/N$. *Тогда квадратурная формула типа средней точки*

$$R_1=\sum_{\nu=0}^{N-1} f_\nu\int_{x_{\nu-1/2}}^{x_{\nu+1/2}}\sin\omega x\,dx \tag{5}$$

является оптимальной по точности при $N>|\omega|$ *и* $N=[|\omega|/\pi]+1$, *причем*

(²) Под „плохой" функцией класса будем понимать функцию $f(x)\in F$, на которой рассматриваемая квадратурная формула имеет наибольшую погрешность.

(6)

$$\varrho^* = \begin{cases} L\left[\dfrac{1}{2\pi N}+\left|\dfrac{4\cos(\omega(1-1/4N))\sin(\omega/4N)}{\omega^2}-\dfrac{\cos\omega}{\omega\cdot N}\right|\right], & N \geqslant |\omega|, \\ \dfrac{L}{|\omega|}\left(\dfrac{2}{\pi}+\dfrac{1}{N}\right), & N = [|\omega|/\pi]+1. \end{cases}$$

Доказательство основано на построении „плохой” функции класса C_L, применении метода „шапочек” [4] для доказательства оценки (6) и построении оценки сверху для погрешности квадратурной формулы на классе C_L.

Теорема 2 дает оценку ϱ^* на классе Q_L в случае сильной осцилляции подинтегральной функции ($N < [|\omega/(b-a)]$).

Теорема 2. *В случае, когда* $f(x) \in Q_L$ *и* $N < [|\omega|/(b-a)]$ *справедлива оценка*

$$\varrho^* \geqslant L(b-a)\left(2\left[\frac{|\omega|}{\pi}-\frac{1}{2}\right]+2+(-1)^{[|\omega|/\pi+1/2]}\sin\omega\right)/\omega^2.$$

Доказательство основано на использовании соотношения [8]

$$\inf_{R\in M}\sup_{f\in F}\varrho(\mathcal{I}_3, S) = \inf_{R\in M}\sup_{F_N\subset F}\sup_{f\in F_N}\varrho(\mathcal{I}_3, S),$$

где: $\varrho(\mathcal{I}_3, S)$ — погрешность численного интегрирования, S — результат приближенного вычисления $\mathcal{I}_3(\omega)$ с помощью квадратурной формулы $R \in M$ и применении метода граничных функций.

Теорема 3. *В условиях теоремы* 2 *квадратурная формула* R_1 *является асимптотически оптимальной на классе* Q_L *с оценкой сверху*

$$\sup_{f\in Q_L}\varrho(\mathcal{I}_3, R_1) \leqslant 2L(b-a)([|\omega|/\pi]+1)/\omega^2.$$

Как было отмечено выше, для повышения разрешающей способности квадратурных формул (уменьшения чебышевского радиуса области неопределенности значений интеграла $\mathcal{I}(\omega)$) целесообразно наряду с классами F рассматривать более узкие интерполяционнье классы F_N.

Теорема 4. *Пусть* $f(x) \in C_{L,N}$, *выполняется условие* (A) *и* $\omega > 0$. Тогда

$$\varrho^* = \begin{cases} \dfrac{4L(b-a)}{\omega^2}\displaystyle\sum_{\nu=0}^{N-2}\left|\sin\frac{\omega}{2}(x_\nu+x_{\nu+1})\right|\left(\sin^2\frac{\omega\Delta x_\nu}{2}-\sin^2\frac{\omega|\Delta f_\nu|}{4L}\right), & N \geqslant \omega; \\ \dfrac{L(b-a)}{\omega}\left[\dfrac{2}{\pi}+\dfrac{\pi}{\omega+\pi}-\dfrac{4}{\omega}\displaystyle\sum_{\nu=0}^{[|\omega|/\pi]}\sin\left(\frac{\omega|\Delta f_\nu|}{4L}\right)\right], & N = [\omega/\pi]+1, \end{cases}$$

причем, квадратурная формула

$$R_2 = \sum_{\nu=0}^{N-1} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} f_1^*(x) \sin\omega x dx,$$

где:

$$f_1^*(x) = \begin{cases} f_\nu, & x_\nu \leqslant x \leqslant \bar{x}_\nu, \\ f_\nu + L(x-x_\nu)\operatorname{sign}\Delta f_\nu, & \bar{x}_\nu \leqslant x \leqslant \bar{\bar{x}}_\nu, \\ f_{\nu+1}, & \bar{\bar{x}}_\nu \leqslant x \leqslant x_{\nu+1}, \\ f_{N+1}, & x_{N-1} \leqslant x \leqslant x_N, \end{cases} \quad \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} x \notin [x_{N-1}, x_N],$$

$$\bar{x}_\nu = (x_\nu + x_{\nu+1})(2 - |\Delta f_\nu|/(2L)), \qquad \bar{\bar{x}}_\nu = (x_\nu + x_{\nu+1})(2 + |\Delta f_\nu|/(2L)),$$

является оптимальной по точности при $N \geqslant \omega$ *и* $N = [\omega/\pi] + 1$.

Доказательство основано на построении мажорант и минорант области неопределенности исходной информации с учетом структуры подинтегральной функции, применении метода граничных функций и получении оценки сверху для погрешности квадратурной формулы R_2 на классе $C_{L,N}$.

В теореме 4 были рассмотрены случаи $N \geqslant |\omega|$ и $N = [|\omega|/\pi] + 1$. В Теоремах 5–8 для класса $C_{L,N}$ рассмотрен слачай сильной осцилляции: $N < [|\omega|/(b-a)]$.

Теорема 5. *Пусть* $f(x) \in C_{L,N}$, $N < [|\omega|/(b-a)]$, *выполняется условие* (B) *и на отрезках* $[x_\nu, x_{\nu+1}]$ *имеется* $k_\nu = [|\omega|x_{\nu+1}/\pi] - [|\omega|x_\nu/\pi] + 1$ *колебаний* $\sin\omega x$. *Тогда справедлива следующая оценка*

$$\varrho^* \geqslant \frac{2L(b-a)}{\omega^2}\left([|\omega|/\pi] - 2\sum_{\nu=0}^{N-1}(k_\nu - 1)\sin^2(\pi|\Delta f_\nu|/(4L\Delta x))\right)$$

и квадратурная формула

$$R_3 = \sum_{\nu=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{k_\nu - 1}\int_{x_{\nu,k}}^{x_{\nu,k+1}} f_{\nu,k}^*(x)\sin\omega x dx,$$

где: $x_{\nu,k} = \pi/(2|\omega|)(2[|\omega|x_\nu/\pi] + 1/2) + 2k_\nu + 1$ — *нули* $\sin\omega x$ *на* $[x_\nu, x_{\nu+1}]$, $f_{\nu,k}^*$ — *чебышевский центр области неопределенности исходных данных, является оптимальной по точности.*

Теорема 6. *Пусть* $f(x) \in C_{L,N}$, $N < [|\omega|/(b-a)]$ *и на отрезках* $[x_\nu, x_{\nu+1}]$, $\nu = 0, N-1$ *имеется* k_ν *колебаний* $\sin\omega x$. *Тогда справедливо следующее соотношение*

$$\varrho^* \sim \frac{4L(b-a)}{\omega^2}\sum_{\nu=0}^{N-2}\left\{(k_\nu - 3)\left(1/2 - \sin^2(\pi|\Delta f_\nu|/(4L\Delta x_\nu))\right)\right)$$

$$+ |\sin\omega(x_\nu + x_{\nu,1})/2|\left(1/2 - \sin^2(\omega|\Delta\bar{f}_{\nu,0}|/(4L))\right)\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&-|\sin\omega(x_\nu+x_{\nu,1})/2|\left(1-\sin^2(\omega\Delta x_{\nu,0}/4)\right)\\
&+|\sin\omega(x_{\nu,1}+x_{\nu,2})|\left(1/2-\sin^2(\omega|\Delta\tilde{f}_{\nu,1}/(4L))\right)\\
&+|\sin\omega(x_{\nu,k_\nu-1}+x_{\nu,k_\nu})|\left(1/2-\sin^2(\omega|\Delta\tilde{f}_{\nu,k_\nu-1}|(4L))\right)\\
&+|\sin\omega(x_{\nu,k_\nu}+x_{\nu+1})|\left(1/2-\sin^2(\omega|\Delta\tilde{f}_{\nu,k_\nu}|/(4L))\right)\\
&-|\sin(\omega(x_{\nu,k_\nu}+x_{\nu+1})/2)|(1/2-\sin^2\omega\Delta x_{\nu,k_\nu}/4)\big\},
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\Delta x_{\nu,k}=x_{\nu,k+1}-x_{\nu,k}, && \Delta\tilde{f}_{\nu,k}=\tilde{f}_{\nu,k+1}-\tilde{f}_{\nu,k}\\
&\tilde{f}_{\nu,k}=f_\nu+R_\nu(x_{\nu,k}-x_\nu), && R_\nu=\Delta f_\nu/\Delta x_\nu,\\
&x_{\nu,k}=([|\omega|x_\nu/\pi]+k)\pi/|\omega|, && k=\overline{0,k_\nu-1}.
\end{aligned}
$$

Доказательство основано на построении мажорант и минорант области неопределенности задания исходной информации с учетом осцилляции $\sin\omega x$ и применении метода граничных функций.

Теорема 7. *В условиях теоремы* 6 *квадратурная формула*

$$
R_4=\sum_{l=0}^{n}\int_{x_{0,l}}^{x_{0,l+1}}f^*(x)\sin\omega x\,dx+\sum_{j=0}^{m}\int_{x_{N-1,j}}^{x_{N-1,j+1}}f^*(x)\sin\omega x\,dx
$$
$$
+\sum_{\nu=0}^{N-2}\sum_{k=0}^{k\nu}\int f^*(x)\sin\omega x\,dx,
$$

где:

$$
f^*(x)=\begin{cases}
f_0, & x\in[a,x_0],\\
\tilde{f}_{\nu,k}, & x\in[x_{\nu,k},\hat{x}_{\nu,k}],\\
\tilde{f}_{\nu,k}+L(x-\hat{x}_{\nu,k})\operatorname{sign}\Delta f\nu, & x\in[\hat{x}_{\nu,k},\hat{\hat{x}}_{\nu,k}],\\
\tilde{f}_{\nu,k+1}, & x\in[\hat{\hat{x}}_{\nu,k},x_{\nu,k+1}],\quad k=\overline{0,k_\nu},\\
f_{N-1}, & x\in[x_{N-1},b],
\end{cases}
$$

n, m — *число колебаний* $\sin\omega x$ *на отрезках* $[a,x_0]$, $[x_{N-1},b]$ *соответственно*,

$$
\hat{x}_{\nu,k}=(x_{\nu,k+1}+x_{\nu,k})/2-|\Delta\tilde{f}_{\nu,k}|/(2L),
$$
$$
\hat{\hat{x}}_{\nu,k}=(x_{\nu,k+1}+x_{\nu,k})/2+|\Delta\tilde{f}_{\nu,k}|/(2L),
$$

является оптимальной по точности.

Доказательство следует из выражений для мажоранты и миноранты области неопределенности задания исходной информации.

Выше мы рассмотрели вопросы построения $\mathcal{I}_3(\omega)$ в случае, когда $f(x)\in Q_L$, C_L, C_{LN}. Во всех этих случаях мы предполагали, что исходная информация $\{f_\nu\}_0^{N-1}$ о решаемой задаче задана точно ($\varepsilon_\nu=0$, $\nu=\overline{0,N-1}$).

На практике, как правило, нам известны приближенные значения $\{\tilde{f}_\nu\}_0^{N-1}$: $|\tilde{f}_\nu - f_\nu| \leqslant \varepsilon$. В связи с этим рассмотрим класс функций $C_{L,N,\varepsilon}$.

Теорема 8. *Пусть* $f(x) \in C_{L,N,\varepsilon}$ *и выполняется условие* (A). *Тогда*

$$\varrho^* = \begin{cases} L(b-a)/(2|\omega|)\left|\sum\limits_{\nu=0}^{N-2} \operatorname{sign}\sin\omega x[\cos\omega x_\nu(\zeta_\nu^+ - \zeta_\nu^-) \right. \\ \quad -\cos\omega x_{\nu+1}(\zeta_\nu^+ - \zeta_\nu^-) + 2L/\omega(\sin\omega\bar{x}_\nu + \sin\omega\bar{\bar{x}}_\nu \\ \quad \left. -\sin\omega x_\nu - \sin\omega x_{\nu+1})\right|, & N \geqslant |\omega|, \\ L(b-a)/(2|\omega|)\left|\sum\limits_{\nu=0}^{[|\omega|/\pi]-1} \operatorname{sign}\sin\omega x_\nu[2/\omega \right. \\ \quad \left. \times(\sin\omega\bar{x}_\nu + \sin\omega\bar{\bar{x}}_\nu) + \Delta\zeta_\nu^- - \Delta\zeta_\nu^+]\right|, & N = [|\omega|/\pi] + 1 \end{cases}$$

где:

$$\bar{x}_\nu = (x_\nu + x_{\nu+1})/2 - (2|\Delta\tilde{f}_\nu| + \Delta\zeta_\nu^+(\operatorname{sign}\Delta\tilde{f}_\nu - 1)$$
$$+ \Delta\zeta_\nu^-(\operatorname{sign}\Delta\tilde{f}_\nu + 1))/(4L),$$
$$\bar{\bar{x}}_\nu = (x_\nu + x_{\nu+1})/2 + (2|\Delta\tilde{f}_\nu| + \Delta\zeta_\nu^+(\operatorname{sign}\Delta\tilde{f}_\nu + 1)$$
$$+ \Delta\zeta_\nu^-(\operatorname{sign}\Delta\tilde{f}_\nu - 1))/(4L), \qquad \zeta_\nu^+, \zeta_\nu^-, \nu = \overline{0, N-1},$$

соответственно максимально и минимально допустимые решения системы линейных неравенств

$$-\varepsilon_\nu \leqslant \zeta_\nu \leqslant \varepsilon_\nu, \qquad \nu = \overline{0, N-1},$$
$$-L\Delta x - \Delta\tilde{f}_\nu \leqslant \zeta_{\nu+1} - \zeta_\nu \leqslant L\Delta x - \Delta\tilde{f}_\nu, \qquad \nu = \overline{0, N-2},$$

причем, квадратурная формула

$$R_5 = \sum_{\nu=0}^{N-1} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} f_\varepsilon(x)\sin\omega x\,dx,$$

где: $f_\varepsilon(x)$ — *чебышевский центр области неопределенности исходных данных, является оптимальной по точности при* $N \geqslant |\omega|$ *и* $N = [|\omega|/\pi] + 1$.

По сравнению с классом $C_{L,N}$, здесь дополнительно решается система линейных неравенств, которая согласует точность задания исходной информации и принадлежность классу $C_{L,N}$. Результатом решения данной системы является сглаженная исходная информация о $f(x)$, что весьма важно для выявления и уточнения априорной информации о решаемой задаче и повышении разрешающей способности численных методов.

Выше были построены оптимальные и асимптотически оптимальные по точности квадратурные формулы для классов функций почти всюду имеющих производную. Рассмотрим теперь более гладкий класс $W_{2,L,N}$ и предположим, что выполняется условие:

(C) $$|(f_\nu' + f_{\nu+1}')\Delta x_\nu/2 - \Delta f_\nu| = L|\Delta x_\nu^2 - (\Delta f_\nu')^2/L|/4.$$

Теорема 9. *Пусть* $f(x) \in W_{2,L,N}$ *выполняются условия* (A) *и* (C). *Тогда квадратурная формула*

$$R_6 = \sum_{\nu=0}^{N-1} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} f_1^*(x) \sin \omega x dx,$$

где:

$$f_1^*(x) = \begin{cases} f_\nu + f'_\nu(x-x_\nu), & x_\nu \leqslant x \leqslant \hat{x}_\nu, \\ L \operatorname{sign} \Delta f'_\nu [(x-x_\nu)^2 + (x-x_{\nu+1})^2]/4 + [f_\nu + f'_\nu(x-x_\nu) & \\ \qquad + f_{\nu+1} + f'_{\nu+1}(x-x_{\nu+1})], & \hat{x}_\nu \leqslant x \leqslant \hat{\hat{x}}_\nu, \\ f_{\nu+1} + f'_{\nu+1}(x-x_{\nu+1}), & \hat{\hat{x}}_\nu \leqslant x \leqslant x_{\nu+1\nu}, \ x \notin [x_{N-1}, x_N]; \\ f_{N-1} + f'_{N-1}(x-x_{N-1}), & x_{N-1} \leqslant x \leqslant x_N, \end{cases}$$

$$\hat{x}_\nu = (x_\nu + x_{\nu+1})/2 - |\Delta f'_\nu|/(2L),$$

$$\hat{\hat{x}}_\nu = (x_\nu + x_{\nu+1})/2 - |\Delta f'_\nu|(2L),$$

является оптимальной по точности при $N \geqslant |\omega|$ *и* $N = [|\omega|/\pi] + 1$.

Доказательство основано на построении „плохой" функции класса $f_2^*(x)$:

$$f_2^*(x) = \begin{cases} L \cdot (x-x_\nu)^2/2, & x_\nu \leqslant x \leqslant \hat{x}, \\ L \cdot [(x-x_\nu)^2 - (x-x_{\nu+1})^2]/4 + \operatorname{sign} \Delta f'_\nu [f_\nu + f'_\nu(x-x_\nu) & \\ \qquad - f_{\nu+1} - f'_{\nu+1}(x-x_{\nu+1})]/2, & \hat{x}_\nu \leqslant x \leqslant \hat{\hat{x}}_\nu, \\ -L \cdot (x-x_{\nu+1})^2/2, & \hat{\hat{x}}_\nu \leqslant x \leqslant x_{\nu+1}, \ x \notin [x_{N-1}, x_N], \\ L \cdot (x-x_{N-1})^2/2, & x_{N-1} \leqslant x \leqslant x_N. \end{cases}$$

и получении оценки сверху для R_6 на классе $W_{2,L,N}$.

Аналогичные результаты для рассмотренных выше классов подинтегральных функций справедливы для интегралов $\mathscr{I}_1(\omega)$, $\mathscr{I}_2(\omega)$, а также в n-мерном случае [5], [9].

Методы отыскания оптимальных по точности решений и их устойчивая реализация на ЭВМ позволяет правильно сдормулировать требования к точности входной информации и к разрядности ЭВМ, при которых может быть достигнуто приближенное решение с наперед заданной точностью.

§ 2. Оптимальные по быстродействию вычислительные алгоритмы

Пусть в задаче $P(I)$, $I \equiv (i_1, i_2, \ldots, i_N)$, $I \in \mathscr{I}$ — входные данные, M — множество алгоритмов A решения задачи с заданной точностью E на фиксированной ЭВМ $C(Y)$ (Y — вектор параметров, характеризующих C) и $Q(A, I, E, Y)$ — необходимое количество арифметических операций.

Введем в рассмотрение характеристики:

$$Q_N(A, E, Y) = \sup_{I \in \mathscr{I}} Q_N(A, I, E, Y),$$

$$Q_N = Q_N(E, Y) = \inf_{A \in M} Q_N(A, E, Y).$$

Алгоритм, на котором достигается характеристика Q_N, назовем оптимальным по быстродействию. Если $Q_N(A^*, E, Y) = Q_N + \eta$, $\eta > 0$, то A^* назовем оптимальным по быстродействию с точностью до η. Если $\eta = o(Q_N)$, $O(Q_N)$, то A^* назовем соответственно асимптотически оптимальным или оптимальным по порядку по быстродействию алгоритмом.

Рассмотрим вопрос оптимизации по быстродействию алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ), быстрых синус и косинус преобразований и их использования для эффективной реализации на ЭВМ построенных оптимальных и асимптотически оптимальных по точности квадратурных формул вычисления $\mathscr{I}(\omega)$.

БПФ представляет собой метод эффективного вычисления дискретного преобразования Фурье (ДПФ), позволяющий сократить необходимое для этого число базисных операций на один-два порядка. Метод БПФ основан на циклическом сведении преобразования ряда из N членов к преобразованию более коротких рядов. При этом все коэффициенты ДПФ вычисляются одновременно, что даёт большую экономию числа операций. Можно утверждать, что разработка этого алгоритма революционизировала многие области анализа, связанные с проведением большого объема вычислительных работ.

В случае, когда N разложимое число, $N = \prod_{i=1}^{m} N_i$, общее число операций составит $N\sum_{i=1}^{m} N_i \leqslant N^2$. В частном случае, когда $N = q^m$, число операций равно $qN\log_q N$. При этом выигрыш в числе операций по сравнению со стандартными равен $N/(q\log_q N)$. В [10] показано, что для программной реализации алгоритма БПФ в случае $N = 2^m$, лучшим будет основание 8.

Минимальное число операций типа сложения для вычисления ДПФ больше, чем $(N\log_2 N)/2$ (см. [11]).

В последние годы большое внимание уделяется алгоритму и программам, реализующим подход С. Винограда [12]. Он основан на результатах по теории чисел, которые позволяют конструировать эффективные по числу операций умножения алгоритмы вычисления ДПФ и свертки двух дискретных функций. Алгоритм Винограда требует такого же числа сложений, что и алгоритм БПФ, а умножений — на порядок меньше (сравнительный анализ приведен без учета количества логических операций).

Сопоставляя оценку снизу количества необходимых операций сложения, приведенную выше, и оценку сверху для алгоритмов БПФ, можно утверждать, что алгоритмы БПФ авляются оптимальными по порядку по числу операций сложения с константой, не превышающей два.

Для класса C_L показано [5], что оптимальные по точности квадратурные формулы реализуются на ЭВМ с помощью алгоритмов БПФ. Для других из рассмотренных в § 1 классов подинтегральных удается лишь частично использовать алгоритмы БПФ для сокращения числа необходимых вычислительных затрат для реализации на ЭВМ построенных оптимальных и асимптотически оптимальных квадратурных формул.

§ 3. О программной реализации

Программная реализация по точности и/или быстродействию алгоритмов вычисления оценок $\mathscr{I}(\omega)$ составила основу ряда библиотек и пакетов прикладных программ [13], [14]. Созданное программное обеспечение использовалось для решения задач спектрального и корреляционного анализа случайных процессов и цифровой обработки сигналов. При создании пакетов прикладных программ значительное внимание уделено систематизации решаемых задач, наиболее полному и наилучшему использованию априорной информации о решаемых задачах, использованию априорных оценок абсолютной погрешности решения задач, времени ее решения и необходимой памяти ЭВМ, а также определенной технологии решения задач.

Программное обеспечение создано на языке ФОРТРАН для ЕС ЭВМ.

Литература

[1] Н. П. Еругин, С. Л. Соболев, *Приближенное интегрирование некоторых колеблющихся функций*, Прикладная математика и механика, № 2, 1950, 193–196.

[2] В. И. Крылов, *Приближенное вычисление интегралов от функций, содержащих быстро колеблющиеся множители*, Докл. АН СССР, т. 108, № 6, 1956, 1014–1017.

[3] W. Quade und L. Collatz, *Zur Interpolationstheorie der reellen periodischen Funktionen*, Sitzungsber. Preussischen Akad. Wiss. 6 in: Phisikalischmathematische Klasse, Berlin, (1988), 283–429.

[4] Н. С. Бахвалов, *Численные методы, ч. I* Наука, Москва, 1973.

[5] В. К. Задирака, *Теория вычисления преобразования Фурье*, Наук. думка, Киев, 1983.

[6] В. К. Задирака, С. З. Касенов, *Оптимальные по точности квадратурные формулы вычисления преобразования Фурье финитных функций класса* $C_{L,N}$, УМЖ, 38, № 2, 1986, 233–237.

[7] В. К. Задирака, С. С. Мельникова, *Об оптимальной квадратурной формуле вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций в интерполяционном классе Липшица*, В кн.: Численные методы и их оптимизация, Сб. науч. тр. Киев, ИК АН УССР, 1984, 9–151.

[8] Дж. Трауб, Х. Вожьняковский, *Общая теория оптимальных алгоритмов*, Пер. с англ., Мир, Москва, 1983.

[9] С. С. Мельникова, *Оптимальные по точности квадратурные и кубатурные формулы вычисления интегралов от некоторых быстроосциллирующих функций*, Автореферат дис. канд. физ.-мат. наук., Киев, 1986.

[10] Л. Рабинер, Б. Гоулд, *Теория и применение цифровой обработки сигналов*, Мир, Москва, 1978.

[11] J. Morgenstern, *Note on lower bound of the linear complexity of the fast Fourier transform*, J. Assoc. Comput. Mach., 20(2) (1973), 257–301.

[12] Дж. Е. Макклелан, Ч. М. Рейдер, *Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов*, Пер. с англ. (Под ред. Ю. Манина), Радио и связь, Москва, 1983.

[13] В. К. Задирака, Н. П. Новицкая, *Комплекс программ для решения спектрального и корреляционного анализа* (СКАН), *Методы решения нелинейных уравнений и задач оптимизации*, Докл. и сообщ. III Всесоюзн. симпоз. (Таллин, янв. 1984 г.), Валгус, Таллин, 1984, 206–207.

[14] В. К. Задирака, *Комплексы программ решения задач цифровой обработки сигналов*, УС и М, № 2, 1987, 107–110.

Presented to the Semester
Numerical Analysis and Mathematical Modelling
February 25 – May 29, 1987