ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XV (1964)

Sur l'unicité et les limitations des solutions des problèmes de Fourier relatifs aux équations paraboliques à coefficients non bornés

par I. Łojczyk-Królikiewicz (Kraków)

1. Soit $x(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ un point de l'espace euclidien $\mathcal{E}^m$ et (t, x) un point de l'espace-temps $\mathcal{E}^{m+1}$. Soit S un domaine de l'espace $\mathcal{E}^m$. Nous considérons un cylindre $D = S \times \langle 0, T\rangle$ de l'espace-temps, dont les bases S_0 et S_T sont des domaines des hyperplans $t = 0$ et $t = T$ $(T > 0)$. Désignons par σ la surface latérale $\mathrm{F}S \times \langle 0, T\rangle$ du cylindre D.

Dans tous les théorèmes de la présente note nous supposerons que S est l'extérieur d'un domaine borné et fermé de l'hyperplan $t = 0$, dont la frontière $\mathrm{F}S$ est représentée par l'équation:

$$G(x) = 0 \,. \tag{1}$$

Quant à la fonction $G(x)$ nous supposons (comme dans le travail [1] de M. Krzyżański) qu'elle satisfait aux conditions suivantes:

(1') $G(x)$ est de classe C^2 dans S, de classe C^1 dans la fermeture de S, et ses dérivées secondes sont bornées,

(1'') il existe une constante Γ telle que $\operatorname{grad}^2 G(x) = \sum_{j=1}^{m} (G'_{x_j})^2 \geqslant \Gamma^2$ pour $x \in \mathrm{F}S$,

(1''') $G(x) = \big(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\big)^{1/2} = r$ dans $S - L_0$, $L_0(R_0, 0)$ étant un domaine sphérique fermé: $r \leqslant R_0$, contenant la frontière $\mathrm{F}S$ du domaine S à son intérieur.

Nous considérons l'équation

$$F[u] = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} u''_{x_i x_j} + \sum_{k=1}^{m} b_k u'_{x_k} + cu - u'_t = f(t, x) \tag{2}$$

dont les coefficients satisfont aux conditions suivantes:

1° il existe une constante positive A telle que

(3) $$|a_{ij}(t,x)| \leqslant A \quad \text{pour} \quad (t,x) \in D, \quad \text{et } i,j = 1,2,\ldots,m$$

la forme quadratique $\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\lambda_i\lambda_j$ étant non négative dans D,

2° il existe des constantes $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, α_0 et β_0 telles que

(4) $$|b_k(t,x)| \leqslant \alpha \sum_{j=1}^{m} |x_j| + \beta \quad \text{pour} \quad k = 1,2,\ldots,m \text{ et } (t,x) \in D$$

et

(5) $$c(t,x) \leqslant \alpha_0 \sum_{j=1}^{m} x_j^2 + \beta_0 \quad \text{pour} \quad (t,x) \in D.$$

Nous faisons correspondre à chaque point (t,x) de la surface σ une demi-droite l pénétrant dans $\bar{D}$, orthogonale à l'axe t. Soit $\boldsymbol{n}$ le vecteur normal à σ au point (t,x); nous supposons qu'il existe un nombre $\gamma > 0$ tel que

(6) $$\cos(l, \boldsymbol{n}) > \gamma \quad \text{pour } (t,x) \in \sigma \quad \text{(voir [1])}.$$

On dit que la fonction $u(t,x)$ est régulière dans D quand elle est continue dans $\bar{D}$, admet des dérivées premières et secondes par rapport aux variables x_i et une dérivée u_t' continues dans le domaine D. Si en outre la fonction $u(t,x)$ admet une dérivée du/dl en tout point de σ nous l'appellerons presque birégulière dans D.

La fonction $u(t,x)$ appartient à la classe E_a dans D, s'il existe deux constantes non négatives M et K telles que

$$|u(t,x)| \leqslant M \exp(Kr^a) \quad \text{dans } D.$$

2. Nous allons étudier la solution de l'équation (2) satisfaisant à la condition aux limites

(7) $$L[u] = \frac{du}{dl} + h(t,x)u = g(t,x) \quad \text{pour } (t,x) \in \sigma$$

où les fonctions $h(t,x)$ et $g(t,x)$ sont définies sur σ et $h(t,x) \leqslant h_0 = \text{const}$.

THÉORÈME 1. *Soit $u(t,x)$ une solution de l'équation* (2) *presque birégulière et de classe E_2 dans D, satisfaisant à la condition* (7) *sur σ. Si $f(t,x) \leqslant 0$ (resp. $f(t,x) \geqslant 0$) dans D et $g(t,x) \leqslant 0$ (resp. $g(t,x) \geqslant 0$) sur σ, si en outre $u(0,x) \geqslant 0$ (resp. $u(0,x) \leqslant 0$) pour $x \in S_0$, alors $u(t,x) \geqslant 0$ (resp. $u(t,x) \leqslant 0$) dans tout l'ensemble D. En particulier si $f(t,x) \equiv 0$ dans D, $g(t,x) \equiv 0$ sur σ et $u(0,x) \equiv 0$ aux points de S_0, on a $u(t,x) \equiv 0$ dans D.*

Démonstration (¹). Considérons une sphère fermée $L_1(R_1, 0)$ dont le rayon $R_1 > R_0$ sera déterminé plus loin. Désignons par S_1 la partie commune des ensembles $\bar{S}$ et L_1 et par S_2 l'extérieur de la sphère L_1. Nous choisissons un intervalle $0 \leqslant t \leqslant t_1$ de l'axe des t, où $t_1 > 0$ est un nombre constant qui sera défini convenablement dans la suite. Posons:

$$D_1^1 = S_1 \times \langle 0, t_1 \rangle, \quad D_2^1 = S_2 \times \langle 0, t_1 \rangle \quad \text{et} \quad D^1 = D_1^1 + D_2^1 = S \times \langle 0, t_1 \rangle .$$

Nous introduisons une fonction auxiliaire des variables t et x et du paramètre k de la forme suivante:

$$H(t, x, k) = \exp\left[\frac{k(G-p)^2}{1-\mu t} + \nu t\right]. \tag{8}$$

Nous allons démontrer que pour $k > 1$ on peut choisir les constantes positives μ, ν, p de façon que la fonction $H(t, x, k)$ satisfasse aux conditions suivantes:

$$F[H] < 0 \quad \text{dans } D^1 \tag{9}$$

et

$$L[H] < 0 \quad \text{sur } \sigma \cdot \mathrm{F}D^1 . \tag{10}$$

Nous décomposons le domaine D en tenant compte des nombres p et k: nous choisissons notamment le nombre R_1 de façon que

$$R_1 > \max\big(R_0, p+1, kp/(k-1)\big) . \tag{11}$$

Désignons par A_0 le plus petit nombre positif tel que pour tout vector $\Lambda(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ on ait l'inégalité

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\lambda_i\lambda_j \leqslant A_0 \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 . \tag{12}$$

Posons $\mu(k) = 4kA_0 + 2amk + a_0 + 2m\beta$ et choisissons un nombre arbitraire δ, appartenant à l'intervalle $(0, 1)$.

En posant, pour $k > 1$ quelconque, $t_1 = \dfrac{1-\delta}{\mu(k)}$, on a $1 - \mu t \geqslant \delta > 0$ pour $0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Ensuite nous considérons la fonction

$$H_0 = \exp\left[\frac{k(G-p)^2}{1-\mu t} + \nu_0 t\right], \quad \text{où} \quad \nu_0 = \frac{2k(mA + A_0)}{\delta} + \beta_0 + \frac{k \cdot p a_0}{k-1},$$

(¹) Cette démonstration se compose de deux parties, de même que dans le travail [1].

et nous posons

$$\Phi(t,x,k)=\frac{F[H_0]}{H_0}=\frac{2k(G-p)}{1-\mu t}\sum_{i,j=1}^{m}a_{ij}G''_{x_ix_j}+\frac{2k}{1-\mu t}\sum_{i,j=1}^{m}a_{ij}G'_{x_i}G'_{x_j}+$$
$$+\frac{4k^2(G-p)^2}{(1-\mu t)^2}\sum_{i,j=1}^{m}a_{ij}G'_{x_i}G'_{x_j}+\frac{2k(G-p)}{1-\mu t}\sum_{i=1}^{m}b_iG'_{x_i}-\frac{k(G-p)^2}{(1-\mu t)^2}\mu-\nu_0+c\,.$$

Comme le rayon R_1 est fixe de façon à satisfaire à l'inégalité: $R_1>\max\big(kp/(k-1),\,p+1\big)$, il est aisé de démontrer, en tenant compte de l'hypothèse (1'''), que $F[H_0]/H_0\leqslant 0$ dans le domaine D_2^1. En effet dans ce domaine nous avons $G(x)=r$ alors

$$\frac{F[H_0]}{H_0}=-\frac{2k(r-p)\sum\limits_{i,j=1}^{m}a_{ij}x_ix_j}{(1-\mu t)r^3}+\frac{2k\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ii}(r-p)}{(1-\mu t)r}+\frac{2k\sum\limits_{i,j=1}^{m}a_{ij}x_ix_j}{(1-\mu t)r^2}+$$
$$+\frac{4k^2(r-p)^2\sum\limits_{i,j=1}^{m}a_{ij}x_ix_j}{(1-\mu t)^2r^2}+\frac{2k(r-p)\sum\limits_{i=1}^{m}b_ix_i}{(1-\mu t)r}-\frac{k(r-p)^2}{(1-\mu t)^2}\mu-\nu_0+c\,.$$

En tenant compte de la définition des nombres $\mu(k)$ et $\nu_0(k)$ et des inégalités: $\sum\limits_{i,j=1}^{m}|x_ix_j|\leqslant m\sum\limits_{i=1}^{m}x_i^2$, $1/(1-\mu t)\leqslant 1/\delta$ et $1\leqslant 1/(1-\mu t)\leqslant 1/(1-\mu t)^2$ $\leqslant 1/\delta^2$ on voit que

$$\frac{F[H_0]}{H_0}\leqslant\frac{2kamr(r-p)}{1-\mu t}-2k^2am\frac{(r-p)^2}{(1-\mu t)^2}+sr^2-s\frac{k(r-p)^2}{(1-\mu t)^2}-$$
$$-\frac{kp^2s}{k-1}+\frac{2km\beta(r-p)}{1-\mu t}-\frac{2km\beta(r-p)^2}{(1-\mu t)^2}\leqslant 0$$

pour $k>1$ et pour $r>\max\big(p+1,\,kp/(k-1)\big)$, c'est-à-dire dans le domaine D_2^1. Choisissons un nombre N tel que $N(k)>\sup\limits_{(t,x)\in D_1^1}\Phi(t,x,k)$ et posons $\nu=\nu_0+N$. Le nombre ν etant ainsi choisi, la fonction $H(t,x,k)$ (8) satisfait à l'inégalité (9) dans tout le domaine D^1.

Choisissons $p>h_0/2k\Gamma\gamma_0$; il résulte des hypothèses (1'') et (6) que l'inégalité (10) est valable sur σ ([2]).

Nous passons maintenant à la seconde partie de la démonstration. Prenons la suite des sphères $L_n(R_n,0)$, où $R_n\to\infty$ et désignons par D_n^1 la partie commune de l'ensemble $L_n\times(0,t_1)$ et du domaine D^1.

[2] Ce détail du calcul est analogue à ceux des travaux [1], [2], [3] de M. Krzyżański, c'est pourquoi nous l'omettons.

Soit $u(t, x)$ une solution de l'équation (2) régulière et de classe E_2 dans D, satisfaisant à la condition aux limites (7) sur σ, et à l'inégalité $u(0, x) \geqslant 0$ pour $x \in S_0$. Alors la fonction

$$v(t, x) = u(t, x)/H(t, x, k) \tag{13}$$

satisfait dans D_n^1, $n = 1, 2, 3, \ldots$, à une équation de la forme

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(t\, x) v''_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{m} \bar{b}_i(t, x) v'_{x_i} - v'_t + \bar{c}(t, x) v = \bar{f}(t, x) \tag{14}$$

dans laquelle $\bar{c}(t, x) = F[H]/H < 0$ dans D^1 (voir (9)) et $\bar{b}_i(t, x)$ sont des fonctions bornées dans tout ensemble D_n. Sur la frontière $\sigma^1 = \mathrm{F}S_0 \times \times \langle 0, t_1 \rangle$ la fonction $v(t, x)$ satisfait à la condition aux limites de la forme suivante:

$$\frac{dv}{dl} + \bar{h}(t, x) v = \bar{g}(t, x), \quad \text{où} \quad \bar{h}(t, x) = \frac{L[H]}{H} < 0 . \tag{15}$$

Il résulte des hypothèses relatives aux fonctions $f(t, x)$ et $g(t, x)$ que $\bar{f}(t, x) \leqslant 0$ dans D^1 et $\bar{g}(t, x) \leqslant 0$ sur σ^1.

Soit (t_0, x_0) un point appartenant à D^1. Nous choisissons R_n assez grand pour que x_0 soit un point intérieur de la sphère $L_n(R_n, 0)$. Désignons par σ_n^1 la partie commune de la surface $\mathrm{F}L_n \times \langle 0, t_1 \rangle$ et de l'ensemble D^1. Comme la fonction $u(t, x)$ est supposée de classe E_2, il existe deux nombres M et k_0 tels que $|u(t, x)| \leqslant M \exp(k_0 r^2)$. Il en résulte que la fonction $v(t, x)$ jouit pour $k > \max(k_0, 1)$ de la propriété suivante: pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $N(\varepsilon)$ tel que pour $n > N(\varepsilon)$ on a $v(t, x) > -\varepsilon$ sur σ_n^1. On a aussi $v(0, x) \geqslant 0$ quand $x \in S_0 \cdot L_n$. Il résulte du théorème de M. Picone [5] que $v(t, x) > -\varepsilon$ dans D_n^1 pour n assez grand, d'où $v(t_0, x_0) > -\varepsilon$. Le nombre $\varepsilon > 0$ étant arbitraire on a $v(t_0, x_0) \geqslant 0$. Le point (t_0, x_0) étant choisi arbitrairement dans D^1, il en résulte que $v(t, x) \geqslant 0$ pour $(t, x) \in D^1$ et à cause de la formule (13) on a aussi

$$u(t, x) \geqslant 0 \quad \text{dans } D^1 , \tag{16}$$

D'une manière analogue en supposant $f(t, x) \geqslant 0$ dans D^1, $g(t, x) \geqslant 0$ sur σ^1 et $u(0, x) \leqslant 0$ pour $x \in S_0$, nous obtiendrons l'inégalité

$$u(t, x) \leqslant 0 \quad \text{dans } D^1. \tag{17}$$

Si $t_1(k) < T$ (pour k fixé ci-dessus) nous posons $t_j = j t_1$ pour $j = 2, 3, \ldots, s$, où le nombre s est choisi de sorte que l'on ait $s \cdot t_1 > T$. En désignant par D^j les domaines $S_0 \times \langle t_{j-1}, t_j \rangle$ et en répétant dans chaque domaine D^j $(j = 2, 3, \ldots, s)$ le procédé que nous venons d'effectuer, nous démontrons qu'on peut prolonger l'inégalité (16) (resp. (17)) sur tout l'ensemble D.

3. On déduit du théorème 1 un théorème analogue à celui du no 6 du travail [1], l'hypothèse relative aux coefficients $b_i(t,x)$ étant moins restrictive: on a notamment:

THÉORÈME 2. *Les hypothèses* (3) *et* (4) *restant valables nous supposons que* $c(t,x) \leqslant 0$ *dans* D. *Soit* $u(t,x)$ *une solution de l'équation* (2) *et satisfaisant à la condition* (7), *presque birégulière et de classe* E_2 *dans le domaine* D, *telle que* $u(0,x) \geqslant -M$ (*resp.* $u(0,x) \leqslant M$), *où* $M > 0$. *Si en outre* $f(t,x) \leqslant 0$ (*resp.* $f(t,x) \geqslant 0$) *dans* D *et aussi* $g(t,x) \leqslant 0$ (*resp.* $g(t,x) \geqslant 0$) *sur* σ, *alors on a* $u(t,x) \geqslant -M$ (*resp.* $u(t,x) \leqslant M$) *dans tout l'ensemble* D.

Pour démontrer ce théorème il suffit d'appliquer le théorème 1 à la fonction $v(t,x) = u(t,x)+M$ (resp. $v(t,x) = u(t,x)-M$).

Du théorème 2 résulte un théorème analogue à celui du travail [4], no 1.

THÉORÈME 3. *Soit* $c(t,x) \leqslant c_0$, *où* c_0 *est une constante arbitraire les autres hypothèses du théorème* 2 *concernant les coefficients de l'équation* (2) *restant valables.*

Soit $u(t,x)$ *une solution de l'équation* (2) *presque birégulière et de classe* E_2 *dans* D, *satisfaisant à la condition* (7), *où* $h(t,x) \leqslant -h_0 < 0$ *et* $|g(t,x)| \leqslant g_0 \exp(c_0 t)$ *sur* σ. *Si l'on a les inégalités* $|f(t,x)| \leqslant M_0 \exp(c_0 t)$ *dans* D *et* $|u(0,x)| \leqslant M$ *dans* S_0, *alors*

$$|u(t,x)| \leqslant (M + g_0/h_0 + M_0 t)\exp(c_0 t) \qquad \textit{dans } D\,.$$

Pour la démonstration nous introduisons les fonctions auxiliaires:

$$v_1(t,x) = u(t,x)\exp(-c_0 t) - M_0 t - (g_0/h_0)$$

et

$$v_2(t,x) = u(t,x)\exp(-c_0 t) + M_0 t + (g_0/h_0)$$

et nous appliquons à ces fonctions le théorème 2 (pour les détails voir [4]).

4. Dans le travail [4] j'ai donné quelques limitations de la solution des deuxième et troisième problèmes de Fourier pour l'équation de la forme (2), en supposant que les coefficients de cette équation étaient bornés. J'avais supposé que la fonction $\varphi(x)$, qui intervenait dans la condition initiale $u(0,x) = \varphi(x)$, était de classe E_1 au plus. En appliquant le théorème 3 nous obtiendrons une limitation des solutions de ces problèmes dans le cas où $\varphi(x)$ est de classe E_2, mais cette limitation, ne sera valable que dans une partie du domaine D contenue dans une couche de hauteur assez petite. Nous désignons ce domaine par D^1 (voir no 2).

THÉORÈME 4. *Nous supposons que les inégalités* (3) *et* (4) *sont satisfaites et aussi que* $c(t,x) \leqslant c_0$ *dans* D. *Soit* $u(t,x)$ *une solution de l'équation* (2) *presque birégulière et de classe* E_2 *dans le domaine* D, *satisfaisant à la condition* (7) *avec* $h(t,x) \leqslant h_0$ *et*

(18) $$|g(t,x)| \leqslant g_0 \exp(c_0 t) \qquad \textit{sur } \sigma$$

le nombre h_0 étant arbitraire et g_0 non négative. Si

(19) $$|f(t,x)| \leqslant M_0 \exp(c_0 t + k_0 r^2) \quad \textit{dans } D$$

et

(20) $$|u(0,x)| \leqslant M \exp(k_0 r^2) \quad \textit{pour} \quad x \in S_0\,,$$

il existe un nombre c_2, défini par la formule (22), *et des nombres $\bar{M}(\varkappa)$, $\bar{M}_0(\varkappa)$ dépendant de la constante arbitraire $\varkappa > 0$ (voir les formules* (24), (25) *et* (26)) *tels que*

(21) $$|u(t,x)| \leqslant \left(\bar{M} + \frac{g_0}{\varkappa} + \bar{M}_0 t\right) \exp\left(c_2 t + \frac{kr^2}{1-\mu t}\right) \quad \textit{dans } D\,,$$

où $\mu = 4kA + 2kam + 2m\beta$, et le nombre $k > 1$ sera déterminé dans la suite.

Démonstration. Nous introduisons la fonction auxiliaire $v(t,x)$ définie par la formule

$$u(t,x) = v(t,x) H(t,x,k), \qquad \text{où} \qquad H(t,x,k) = \exp\left[\frac{k(G-p)^2}{1-\mu t}\right],$$

et nous décomposons le domaine D comme au no 2. C'est-à-dire nous prenons la même sphère $L_1(R_1, 0)$ de rayon

$$R_1 > \max\big(R_0, p+1, kP/(k-1)\big)$$

et pour un intervalle $0 \leqslant t \leqslant t_1$ nous posons

$$D_1^1 = S_1 \times \langle 0, t_1 \rangle \qquad \text{et} \qquad D_2^1 = S_2 \times \langle 0, t_1 \rangle\,.$$

La fonction $v(t,x)$ satisfait à une équation de la forme (14) dans laquelle

$$\bar{c}(t,x) = \frac{2k}{1-\mu t} \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} G'_{x_i} G'_{x_j} + \frac{2k(G-p)}{1-\mu t} \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} G''_{x_i x_j} +$$
$$+ \frac{4k^2(G-p)^2}{(1-\mu t)^2} \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} G'_{x_i} G'_{x_j} + \frac{2k(G-p)}{1-\mu t} \sum_{i=1}^{m} b_i G'_{x_i} -$$
$$- \frac{k(G-p)^2}{(1-\mu t)^2} \mu + c(t,x) = \Phi_1(t,x,k)\,.$$

Nous désignons $N_1(k) = \sup\limits_{(t,x) \in D_1^1} \Phi_1(t,x,k)$. Pour les nombres $k > 1$ et $\mu = 4kA_0 + 2kam + 2m\beta$, nous choisissons $t_1 = \dfrac{1-\delta}{\mu} > 0$ et alors dans le domaine D_2^1 on a

$$\bar{c}(t,x) \leqslant \frac{2kAm}{\delta} + \frac{2kA_0}{\delta} + c_0 = c_1\,.$$

Il en résulte que

$$\bar{c} \leqslant c_2 = \max(c_1, N_1) \quad \text{dans } D^1 . \tag{22}$$

Les coefficients $\bar{b}_i(t, x)$ dans l'équation (14) sont de la forme suivante:

$$\bar{b}_i(t, x) = \frac{4k(G-p)}{1-\mu t} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} G'_{x_j} + b_i(t, x)$$

et il est aisé de démontrer qu'il existe des constantes positives $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ telles que

$$\bar{b}_i(t, x) \leqslant \bar{\alpha} \sum_{k=1}^{m} |x_k| + \bar{\beta} \quad \text{dans } D^1 ,\ \text{où } i = 1, \ldots, m . \tag{23}$$

La fonction $v(t, x)$ remplit aussi une condition aux limites de la forme (15). En posant $p = (h_0 + \varkappa)/2k\Gamma\gamma_0$, où $\varkappa > 0$ est une constante arbitraire, on a

$$\bar{h}(t, x) \leqslant -\varkappa < 0 . \tag{24}$$

Choisissons le nombre $S = \sup\limits_{|x| \leqslant 2kp/k-k_0} [k_0 r^2 - k(G-p)^2]$ et remarquons que pour $P = \max(S, 1)$ nous avons, en vertu des hypothèses (18), (19) et (20),

$$|\bar{f}(t, x)| = |f(t, x)| \exp\left[-\frac{k(G-p)^2}{1-\mu t}\right] \leqslant \bar{M}_0 \exp(c_2 t) \quad \text{dans } D , \tag{25}$$

$$|v(0, x)| = |u(0, x)| \exp\left[-\frac{k(G-p)^2}{1-\mu t}\right] \leqslant \bar{M} \quad \text{dans } S_0 , \tag{26}$$

où $\bar{M} = MP$ et $\bar{M}_0 = M_0 P$. On a aussi

$$|\bar{g}(t, x)| = |g(t, x)| \exp\left[-\frac{k(G-p)^2}{1-\mu t}\right] \leqslant g_0 \exp(c_2 t) \quad \text{sur } \sigma^1 . \tag{27}$$

Il résulte des inégalités (25), (26), (27), et des formules (22), (23) et (24) que la fonction $v(t, x)$ satisfait aux hypothèses du théorème 3 et alors on a dans D^1 l'inégalite

$$|v(t, x)| \leqslant (\bar{M} + g_0/\varkappa + M_0 t) \exp(c_2 t) .$$

D'après la définition de la fonction $v(t, x)$ l'inégalité (21) a lieu dans D^1.

Remarque. Si l'on applique dans la note [4] les théorèmes 2 et 3 qui viennent d'être démontrés au lieu du théorème du travail [1], no 6, dans les démonstrations des théorèmes 3, 4 et 5 de mon travail antérieur [4] il n'y aurait presque rien à changer. C'est pourquoi on peut démontrer ces théorèmes en supposant que les coefficients $b_i(t, x)$, étant des fonctions non bornées, satisfont aux inégalités [4].

Je tiens à exprimer ma gratitude profonde à M. le Professeur M. Krzyżański pour ses remarques précieuses.

Travaux cités

[1] M. Krzyżański, *Sur l'unicité des solutions des second et troisième problèmes de Fourier relatifs à l'équation linéaire normale du type parabolique*, Ann. Polon. Math. 7 (1960), p. 201-208.

[2] — *Certaines inégalités relatives aux solutions de l'équation parabolique linéaire normale*, Bull. Acad. Polon. Sci. 7 (3) (1959).

[3] — *Évaluations des solutions de l'équation aux dérivées partielles du type parabolique déterminées dans un domaine non borné*, Ann. Polon. Math. 4 (1957), p. 93-97.

[4] I. Łojczyk-Królikiewicz, *Certaines évaluations des solutions des problèmes de Fourier relatives à l'équation du type parabolique*. Ann. Polon. Math. 13 (1963), p. 221-227.

[5] M. Picone, *Nuove formole di maggiorazione per gl'integrali delle equazioni ineari a derivate parziali del second' ordine ellitico-paraboliche*, Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei 1938 (XVI), ser. 6, vol. 28.

Reçu par la Rédaction le 5. 2. 1962