ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XX (1968)

Sur la notion d'objet géométrique attaché, I

par Z. Moszner (Kraków)

Cette note attire l'attention sur le fait qu'un objet géométrique spécial n'est pas, en général, un objet géométrique au sens de Wundheiler. On tire dans la suite de cette note quelques conclusions de ce fait.

Soit fixée une variété topologique à n dimensions et un point de cette variété. Rappelons qu'on appelle *objet*, d'après. J. A. Schouten et J. Haantjes [4], une application f dont la source est l'ensemble des systèmes admissibles de coordonnées et l'ensemble de ses valeurs est un sous-ensemble de m-ième puissance cartésienne (m est un nombre entier positif) de l'ensemble des nombres réels. Un objet est dit *géométrique*, d'après A. Wundheiler [6], si l'on peut calculer sa composante ω_2 pour le système S_2 à l'aide de sa composante ω_1 pour le système S_1 et à l'aide de la transformation T:

$$\bar{\xi}^{\varkappa} = \varphi^{\varkappa}(\xi^1, \ldots, \xi^n) \qquad \text{où} \qquad \varkappa = 1, 2, \ldots, n$$

qui mène du système S_1 au système S_2, c'est-à-dire si l'on peut donner une règle de transformation de la forme

$$\omega_2 = F(\omega_1, T) \tag{1}$$

où F ne dépend ni de S_1 ni de S_2. Enfin, on dit qu'un objet géométrique est *spécial* [4] si la règle de transformation de cet objet est de la forme

$$\omega_2 = F(\omega_1, \underset{0}{\xi}^{\varkappa}, \underset{0}{\bar{\xi}}^{\varkappa}, A^{\varkappa}_{k}, \ldots, A^{\varkappa}_{k_1 \ldots k_r}) , \tag{2}$$

où $\underset{0}{\xi}^{\varkappa}$ désignent les coordonnées du point p_0 dans le système S_1, $\underset{0}{\bar{\xi}}^{\varkappa}$ ont la même signification dans le système S_2 et

$$A^{\varkappa}_{k_1 \ldots k_s} \overset{\mathrm{df}}{=} \left(\frac{\partial^s \varphi^{\varkappa}(\xi^1, \ldots, \xi^n)}{\partial \xi^{k_1} \ldots \partial \xi^{k_s}} \right)_{(\underset{0}{\xi}^1, \ldots, \underset{0}{\xi}^n)} \tag{3}$$

pour $\varkappa, k_1, \ldots, k_r = 1, 2, \ldots, n$ et $s \leqslant r$ où r est un nombre entier positif, fixé à l'avance.

Remarquons que ni la transformation T ni la composante ω_1 ne déterminent les coordonnées $\underset{0}{\xi}^{\varkappa}$ du point p_0, même si ce point est donné.

Ces coordonnées sont données si le système S_1 est donné, mais nous ne pouvons pas supposer que celui-ci est donné, puisque dans ce cas chaque objet serait un objet géométrique. En effet, si nous connaissons seulement T et S_1, nous connaissons S_2, donc ω_2 est déterminé, car $\omega_2 = f\big(T(S_1)\big)$. Il en résulte que la formule (2) n'est pas un cas particulier de la formule (1), donc un objet spécial géométrique n'est pas, en général, un objet géométrique au sens de Wundheiler.

Par contre, si la transformation T et les coordonnées $\underset{0}{\xi}^{\varkappa}$ sont données, nous connaissons $\underset{0}{\bar{\xi}}^{\varkappa} = \varphi^{\varkappa}(\underset{0}{\xi}^1, \ldots, \underset{0}{\xi}^n)$ et les nombres (3) sont donnés. Si nous dirons donc qu'un objet est un *objet géométrique attaché au point* p_0 si l'on peut calculer sa composante ω_2 pour le système S_2 à l'aide de sa composante ω_1 pour le système S_1, à l'aide de la transformation T qui mène du système S_1 au système S_2 et à l'aide des coordonnées $\underset{0}{\xi}^{\varkappa}$ du point p_0 dans le système S_1, c'est-à-dire: si l'on peut donner une règle de transformation de la forme

$$\omega_2 = F(\omega_1, \underset{0}{\xi}^{\varkappa}, T)\,, \tag{4}$$

alors chaque objet géométrique spécial sera le cas particulier d'un objet géométrique attaché.

Nous ferons maintenant quelques remarques au sujet de la notion d'objet géométrique attaché.

1. Puisque la formule (1) est un cas particulier de la formule (4), chaque objet géométrique est en même temps un objet géométrique attaché. La conclusion inverse n'est pas vraie. En effect, considérons une droite, métrisée en définissant la longueur, comme une variété topologique à 1 dimension et soit p_0 un point de cette droite. Introduisons sur cette droite un système cartésien S_0 de coordonnées dont l'origine est au point p_0. Soit S_k le système de coordonnées sur cette droite qui s'obtient du système S_0 par la translation T_k: $\bar{\xi} = \xi + k$. Posons

$$f(S_k) \overset{\mathrm{df}}{=} \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad k = 0\,, \\ 0 & \text{pour} \quad k \neq 0\,. \end{cases}$$

Cet objet n'est pas un objet géométrique (voir [1] ou [2]), mais il est un objet géométrique attaché au point p_0. En effet, la formule (4) a dans notre cas la forme suivante:

$$\omega_2 = F(\omega_1, \underset{0}{\xi}, T_k) \overset{\mathrm{df}}{=} \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad \underset{0}{\xi} + k = 0\,, \\ 0 & \text{pour} \quad \underset{0}{\xi} + k \neq 0\,. \end{cases}$$

2. Quelle est l'équation fonctionnelle fondamentale pour un objet géometrique attaché? Soient S_1, S_2, S_3 trois systèmes de coordonnées;

T_{ik} pour $i, k, = 1, 2, 3$ la transformation qui mène du système S_i au système S_k; $\underset{1}{\xi}^\varkappa$ et $\underset{2}{\xi}^\varkappa$ les coordonnées du point p_0 dans les systèmes S_1 et S_2; f un objet géométrique attaché au point p_0; (4) sa règle de transformation et

$$\omega_\nu = f(S_\nu) \quad \text{pour} \quad \nu = 1, 2, 3 .$$

Nous avons

$$\omega_2 = F(\omega_1, \underset{1}{\xi}^\varkappa, T_{12}), \quad \omega_3 = F(\omega_1, \underset{1}{\xi}^\varkappa, T_{13}) \quad \text{et} \quad \omega_3 = F(\omega_2, \underset{2}{\xi}^\varkappa, T_{23}),$$

d'où

(5) $$F(\omega_1, \underset{1}{\xi}^\varkappa, T_{13}) = F\big(F(\omega_1, \underset{1}{\xi}^\varkappa, T_{12}), \underset{2}{\xi}^\varkappa, T_{23}\big) .$$

Mais $T_{13} = T_{23} \cdot T_{12}$ et $\underset{2}{\xi}^\varkappa = T_{12}(\underset{1}{\xi}^\varkappa)$, donc (5) a la forme

(6) $$F(\omega_1, \underset{1}{\xi}^\varkappa, T_{23} \cdot T_{12}) = F\big(F(\omega_1, \underset{1}{\xi}^\varkappa, T_{12}), T_{12}(\underset{1}{\xi}^\varkappa), T_{23}\big) .$$

Cette dernière équation est l'équation de translation pour la fonction $F(\omega, \langle\xi^\varkappa, T\rangle)$ qui est déterminée sur le produit cartésien d'un sous-ensemble de m-ième puissance cartésienne de l'ensemble des nombres réels et du groupoïde de Brandt des éléments des transformations au sens de Nijenhuis [3].

En outre la fonction F doit satisfaire à la condition d'idéntité

(7) $$F(\omega, \xi^\varkappa, I) = \omega ,$$

où I désigne la transformation identique.

3. Si la fonction F dans la règle (4) ne dépend pas de $\underset{0}{\xi}^\varkappa$, l'objet est un objet géométrique au sens de Wundheiler. Il résulte de (7) que si F ne dépend pas de T, l'objet doit être un scalaire.

4. Il se pose la question suivante: quand un objet f est-il un objet géométrique attaché à un point p_0?

Avant de répondre à cette question nous allons donner quelques définitions (voir [2] et [5]).

Définition 1. La famille $\{Z_t\}_{t \in S}$ des ensembles Z_t disjoints et non vides est appelée *décomposition* de l'ensemble Z, si $Z = \bigcup_{t \in S} Z_t$. Les ensembles sont appelés les *composantes* de cette décomposition.

Soient donnés des ensembles Z et E et une opération extérieure „$\circ$" $z \circ e \in Z$, pour un z de Z et un e de E.

Définition 2. La décomposition $\{Z_t\}_{t \in S}$ de l'ensemble Z est appelée *invariante* (*admissible* dans [5]) par rapport à l'opération „$\circ$" s'il existe, pour tout élément e de E et tout t_1 de S, un t_2 de S tel que

$$Z_{t_1} \circ e \subset Z_{t_2} ,$$

où

$$Z_{t_1} \circ e \overset{\mathrm{df}}{=} \{z\colon \bigvee_{z_1} (z_1 \in Z_{t_1} \text{ et } z = z_1 \circ e)\} .$$

On soit que nous obtenons tous les systèmes admissibles de coordonnées d'un système primitif à l'aide d'un ensemble fixé Z de transformations. Il en résulte qu'on peut considérer un objet comme une fonction de transformation de l'ensemble Z au lieu de le considérer comme une fonction du système admissible de coordonnées. Nous supposons que l'ensemble Z est transitif par rapport à la superposition des transformations, c'est-à-dire que pour tout couple de transformations T_1 et T_2 de Z il existe une transformation T de Z pour laquelle $T_2 = T(T_1) \overset{\mathrm{df}}{=} T \cdot T_1$.

Définition 3. La décomposition de l'ensemble Z déterminée par un objet f, défini sur l'ensemble Z, est une décomposition définie comme suit. Nous formons l'ensemble

$$f^{-1}(\{\omega\}) \overset{\mathrm{df}}{=} \{T\colon (T \in Z \text{ et } f(T) = \omega)\}$$

pour chaque ω de l'ensemble $\Omega = f(T)$ et nous posons

$$Z = \bigcup_{\omega \in \Omega} f^{-1}(\{\omega\}) .$$

Soit maintenant donné un point p_0 dont les coordonnées pour un système primitif sont $\underset{p}{\xi^{\varkappa}}$ et désignons par

$$C \overset{\mathrm{df}}{=} \{\xi^{\varkappa}\colon \bigvee_{T \in Z} [\xi^{\varkappa} = T(\underset{p}{\xi^{\varkappa}})]\} .$$

Soit $E = C \times Z$ et pour $\langle \xi^{\varkappa}, T\rangle$ de E et une T_1 de Z, telle que $\xi^{\varkappa} = T_1(\underset{p}{\xi^{\varkappa}})$, posons

$$T_1 \circ \langle \xi^{\varkappa}, T\rangle = T \cdot T_1 .$$

On peut démontrer comme le théorème 1 dans [2] que

— *pour qu'un objet f, défini dans l'ensemble Z, soit un objet géométrique attaché au point p_0 il faut et il suffit que la décomposition déterminée par f sur l'ensemble Z soit invariante par rapport à l'opération „$\circ$" définie plus haut.*

L'objet f qui satisfait à la condition de ce théorème admet la règle de transformation suivante

$$\omega_2 = \}f[f^{-1}(\{\omega_1\}) \circ \langle \xi^{\varkappa}, T\rangle]\{ , \tag{8}$$

où $\}A\{$ désigne le seul élément de l'ensemble A qui n'a qu'un élément.

Nous donnerons deux applications de ce théorème.

5. Il existe des objets qui ne sont des objets géométriques attachés à aucun point.

En effet, considérons l'axe numérique et toutes les transformations

$$T(\underset{0}{\xi}, k):\ \bar{\xi} = k(\xi - \underset{0}{\xi})$$

affines sur cette droite. Posons

$$f\big(T(\underset{0}{\xi}, k)\big) \overset{\mathrm{df}}{=} \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad k = 1\,, \\ 1 & \text{pour} \quad k \neq 1\,. \end{cases}$$

Cet objet n'est un objet géométrique attaché à aucun point de cet axe, puisque la décomposition déterminée par cet objet n'est pas invariante. Pour le démontrer, remarquons que pour chaque point p_0 de l'axe considéré, en désignant par $\underset{p}{\xi}$ la coordonnée de ce point dans le système primitif, nous avons

$$f\big(T(\underset{p}{\xi}, 2)\big) = f\big(T(\underset{p}{\xi}, 3)\big) = 1\,,$$

$$T(\underset{p}{\xi}, 2) \circ \langle 0, T(0, \tfrac{1}{2})\rangle = T(0, \tfrac{1}{2}) \cdot T(\underset{p}{\xi}, 2) = T(\underset{p}{\xi}, 1)\,,$$

$$T(\underset{p}{\xi}, 3) \circ \langle 0, T(0, \tfrac{1}{2})\rangle = T(0, \tfrac{1}{2}) \cdot T(\underset{p}{\xi}, 3) = T(\underset{p}{\xi}, \tfrac{3}{2})\,,$$

donc

$$f[T(\underset{p}{\xi}, 2) \circ \langle 0, T(0, \tfrac{1}{2})\rangle] = f\big(T(\underset{p}{\xi}, 1)\big) = 0 \neq 1$$
$$= f\big(T(\underset{p}{\xi}, \tfrac{3}{2})\big) = f[T(\underset{p}{\xi}, 3) \circ \langle 0, T(0, \tfrac{1}{2})\rangle]\,.$$

6. On sait qu'un objet géométrique spécial f est appelé *non-différentiel* si la règle (2) pour cet objet a la forme

$$\omega_2 = F(\omega_1, \underset{0}{\xi}^{\varkappa}, \underset{0}{\bar{\xi}}^{\varkappa})\,.$$

D'après (7) nous avons

$$\omega_2 = F(\omega_1, \underset{0}{\xi}^{\varkappa}, \underset{0}{\xi}^{\varkappa}) = \omega_1\,. \tag{9}$$

En désignant par $\underset{p}{\xi}^{\varkappa}$ les coordonnées du point p_0 dans le système primitif, nous avons

$$f(T_2) = F\big(f(T_1), T_1(\underset{p}{\xi}^{\varkappa}), T_2(\underset{p}{\xi}^{\varkappa})\big)\,,$$

donc si $T_1(\underset{p}{\xi}^{\varkappa}) = T_2(\underset{p}{\xi}^{\varkappa})$, alors d'après (9)

$$f(T_2) = F\big(f(T_1), T_1(\underset{p}{\xi}^{\varkappa}), T_1(\underset{p}{\xi}^{\varkappa})\big) = f(T_1)\,.$$

Nous avons donc démontré que l'objet géométrique spécial non-différentiel attaché au point p_0 satisfait à la condition suivante

$$T_1(\underset{p}{\xi}^{\varkappa}) = T_2(\underset{p}{\xi}^{\varkappa}) \Rightarrow f(T_1) = f(T_2)\,. \tag{10}$$

Nous démontrerons que cette condition est aussi suffisante pour que l'objet f soit un objet géométrique spécial non-différentiel attaché au point p_0.

Soit $f(T_1)=f(T_2)$. Remarquons que s'il existe $T_1 \circ \langle \xi^{\varkappa}, T\rangle$ et $T_2 \circ \langle \xi^{\varkappa}, T\rangle$, donc $T_1(\underset{p}{\xi^{\varkappa}}) = \xi^{\varkappa} = T_2(\underset{p}{\xi^{\varkappa}})$. De là

$$T\cdot T_1(\underset{p}{\xi^{\varkappa}}) = T\big(T_1(\underset{p}{\xi^{\varkappa}})\big) = T\big(T_2(\underset{p}{\xi^{\varkappa}})\big) = T\cdot T_2(\underset{p}{\xi^{\varkappa}})\,.$$

D'après (10) nous en tirons que $f(T\cdot T_1)=f(T\cdot T_2)$. L'objet f remplit la condition dans le théorème énoncé au point 4, il est donc un objet géométrique attaché au point p_0. Pour achever la démonstration il suffit de montrer que le second membre dans la formule (8), au lieu de T, dépend seulement de $T(\xi^{\varkappa})$, c'est-à-dire que si $T_1(\xi^{\varkappa}) = T_2(\xi^{\varkappa})$ on a

$$f[f^{-1}(\{\omega_1\})\circ\langle\xi^{\varkappa}, T_1\rangle] = f[f^{-1}(\{\omega_1\})\circ\langle\xi^{\varkappa}, T_2\rangle]$$

et cela résulte évidemment de l'implication (10).

7. On peut étendre aux objet géométriques attachés, par une méthode analogue aux susdites, tous les résultats énoncés dans la note [2] pour les objets géométriques au sens de Wundheiler.

8. M. Kucharzewski et M. Kuczma ont introduit dans [1] la notion d'objet géométrique *abstrait* comme la famille de tous les objets géométriques spéciaux purement différentiels qui on la même règle de transformation. Par analogie on peut introduire la notion d'*objet géométrique abstrait général* comme la famille de tous les objets géométriques au sens de Wundheiler qui ont la même règle de transformation (1). Evidemment l'objet précédent n'est pas un cas particulier de ce dernier, mais il est le cas particulier de la notion d'*objet géométrique abstrait attaché* comme famille de tous les objets géométriques attachés qui ont la même règle de transformation (4).

9. On peut indiquer une liaison plus précise entre la notion d'objet géométrique au sens de Wundheiler et celle d'objet géométrique attaché au point p_0. Etant donnés un objet $f(T)$ et les coordonnées $\underset{p}{\xi^{\varkappa}}$ du point p_0 dans le système primitif, et désignant

$$\bar{f}(T) = \langle f(T),\, T(\underset{p}{\xi^{\varkappa}})\rangle\,,$$

nous pouvons facilement démotrer, directement ou en s'appuyant sur le théorème 1 de la note [2] et sur la condition nécessaire et suffisante du point 4 de cette note, le théorème suivant:

— *l'objet f est un objet géométrique attaché au point p_0 si et seulement si l'objet $\bar{f}$ est un objet géométrique au sens de Wundheiler.*

Travaux cités

[1] M. Kucharzewski and M. Kuczma, *Basic concepts of the theory of geometric objects*, Rozprawy Mat. 43, Warszawa 1964.

[2] S. Midura et Z. Moszner, *Quelques remarques au sujet de la notion de l'objet et de l'objet géométrique*, Ann. Polon. Math. 18 (1966), pp. 323-338.

[3] A. Nijenhuis, *Theory of the geometric object*, Amsterdam 1952.

[4] J. A. Schouten and J. Haantjes, *On the theory of the geometric object*, Proc. London Math. Soc. 42 (1936), pp. 356-376.

[5] L. Sedláček, *Grupoidy a grupy s operátory*, Acta Universitatis Packianae Olomuctiensis, Facultas Rerum Naturalium, 7 (1961), pp. 33-66.

[6] A. Wundheiler, *Objekte, Invarianten und Klassifikation der Geometrien* (I Intern. Konf. f. tens. Diff. Geom. u. i. Anw., Moskau 17-23. V. 1934), Abhandlungen Sem. Vekt. An. Mosk. 4 (1937), pp. 366-376.

Reçu par la Rédaction le 7. 3. 1967