ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXI (1968)

Sur la stabilité asymptotique de la solution d'un système non linéaire d'équations aux derivées partielles du type parabolique, II

par I. Łojczyk-Królikiewicz (Kraków)

1. Nous présentons dans la suite quelques théorèmes qui concernent le problème résolu dans la note [4]. Nous allons faire usage de toutes les hypothèses et définitions de la note [4]; c'est pourquoi nous ne les répétons pas ici.

Nous allons considérer un système d'équations différentielles

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} = f^i(t, x, u, u^i_{x_j}, u^i_{x_j x_k}) \quad (i = 1, \dots, m) \tag{1}$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)$, $u^i_{x_j} = (u^i_{x_1}, \dots, u^i_{x_n})$, $u^i_{x_j x_k} = (u^i_{x_1 x_1}, \dots, u^i_{x_n x_n})$ dans un domaine parabolique et borné D, avec les conditions aux limites

$$a^i(t, x)\frac{du^i}{dl^i} = \varphi^i(t, x, u^i) \quad \text{ou bien} \quad \varphi^i(t, x, u^i) = 0 \ (i = 1, \dots, m) \tag{2}$$

sur la surface latérale Σ du domaine D.

2. Ensuite, nous allons construire deux systèmes de fonctions $V^i(t, x)$ et $v^i(t, x)$, régulières dans D, qui satisfont, pour $i = 1, \dots, m$, aux conditions suivantes:

1° $V^i(t, x) \geqslant 0$, $v^i(t, x) \leqslant 0$ dans D;

2° $V^i(t, x) < \varepsilon$ et $v^i(t, x) > -\varepsilon$ pour $t > T(\varepsilon)$ et $x \in \bar{S}_D$;

3° Dans le domaine D_T ont lieu les inégalités

$$\frac{\partial V^i}{\partial t} \geqslant f^i(t, x, V, V^i_{x_j}, V^i_{x_j x_k}), \tag{3}$$

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} \leqslant f^i(t, x, v, v^i_{x_j}, v^i_{x_j x_k}); \tag{4}$$

4° Il existe des dérivées suivant la demi-droite l^i en tout point de $\Sigma_T^{a^i}$ et on a

$$\begin{cases} \varphi^i(t, x, V^i(t, x)) \geqslant a^i(t, x)\dfrac{dV^i}{dl^i} & \text{sur} \quad \Sigma_T^{a^i}, \\ \varphi^i(t, x, V^i(t, x)) \geqslant 0 & \text{sur} \quad \Sigma_T - \Sigma_T^{a^i} \end{cases} \tag{5}$$

et

$$\begin{cases} \varphi^i(t, x, v^i(t, x)) \leqslant a^i(t, x)\dfrac{dv^i}{dl^i} & \text{sur} \quad \Sigma_T^{a^i}, \\ \varphi^i(t, x, v^i(t, x)) \leqslant 0 & \text{sur} \quad \Sigma_T - \Sigma_T^{a^i}. \end{cases} \tag{6}$$

Il résulte du lemme, cité dans [4], § 3, que la solution $u(t, x)$ de l'équation (1) avec les conditions aux limites (2), satisfaisant à la condition initiale

$$v^i(T, x) \leqslant u^i(T, x) \leqslant V^i(T, x) \quad \text{pour} \quad x \in S_T, \tag{7}$$

satisfait aux inégalités

$$v^i(t, x) \leqslant u^i(t, x) \leqslant V^i(t, x) \quad \text{dans} \quad D_T,$$

c'est-à-dire que cette solution est asymptotiquement stable dans D.

3. Dans la note [4], nous avons supposé que les fonctions $f^i(t, x, z, q, r)$ sont elliptiques au sens de J. Szarski. Nous admettrons maintenant des conditions plus restrictives, à savoir:

CONDITION H. *Il existe des fonctions* $a^i_{jk}(t, x)$, $i = 1, \ldots, m$, $j, k = 1, \ldots, n$, *définies dans* D *et satisfaisant aux conditions suivantes:*

1° $a^i_{jk}(t, x) = a^i_{kj}(t, x)$ *dans* D $(i = 1, \ldots, m)$,

2° *il existe un indice* k, *soit par exemple* $k = 1$, *tel que*

$$a^i_{11}(t, x) \geqslant a^i(t) \quad \textit{dans} \quad D, \tag{8}$$

où les fonctions $a^i(t)$ *sont définies dans* $\langle 0, \infty)$ *et positives;*

3° *les formes quadratiques* $\sum_{j,k=1}^{n} a^i_{jk}\lambda_j\lambda_k$, $i = 1, \ldots, m$, *sont non négatives dans* D;

4° *pour chaque système de nombres* $r_{jk}, \tilde{r}_{jk}$, $j, k = 1, \ldots, m$, *où* $r_{jk} = r_{kj}$ *et* $\tilde{r}_{jk} = \tilde{r}_{kj}$ *tels que*

$$\sum_{j,k=1}^{n} (r_{jk} - \tilde{r}_{jk})\lambda_j\lambda_k \leqslant 0$$

on a l'inégalité

$$(9)\qquad f^i(t,x,z,q,r)-f^i(t,x,z,q,\tilde{r}) \leqslant \sum_{j,k=1}^{n} a^i_{jk}(t-T,x)(r_{jk}-\tilde{r}_{jk})$$

pour $(t,x)\in D_T$, *où* $T\geqslant 0$, z, q *sont arbitraires* (²).

HYPOTHÈSE A: *Il existe un nombre* $T\geqslant 0$ *et des fonctions* $\sigma^i(t,z)$ *continues et non négatives pour* $t\geqslant 0$, $z^j\geqslant 0$ $(j=1,\dots,m)$, *satisfaisant à la condition* W_+ (voir l'hypothèse B) *pour* $t\geqslant 0$, *telles que*

$$(10)\qquad f^i(t,x,z,q,r)-f^i(t,x,\tilde{z},q,r)\leqslant \sigma^i(t-T,z-\tilde{z})\qquad (i=1,\dots,m),$$

pour $z^j\geqslant \tilde{z}^j$ $(j=1,\dots,m)$, $(t,x)\in D_T$, q *et* r *arbitraires, et que* $z^i=0$ $(i=1,\dots,m)$ *soit l'intégrale unique du système d'équations ordinaires*

$$\frac{dz^i}{dt}=\sigma^i(t,z^1,\dots,z^m)\qquad (i=1,\dots,m)$$

issue de l'origine.

HYPOTHÈSE B. (³) *Lorsque l'indice* i_0 *est fixé arbitrairement, les relations* $z^j\leqslant\tilde{z}^j$, $j\neq i_0$, *et* $z^{i_0}=\tilde{z}^{i_0}$ *impliquent l'inégalité* $f^{i_0}(t,x,z,q,r)\leqslant f^{i_0}(t,x,\tilde{z},q,r)$ *dans* D *pour* q *et* r *arbitraires.*

HYPOTHÈSE C. *Soient* $f^i(t,x,0,0,0)$ *des fonctions continues dans* $\bar{D}$. *On suppose que* $\lim\limits_{t\to\infty} f^i(t,x,0,0,0)=0$ $(i=1,\dots,m)$ *uniformément dans* $\bar{S}_D$.

HYPOTHÈSE E_1. *Il existe des fonctions* $\mu^i(t)\geqslant 0$ $(0\leqslant t<\infty)$ *telles que*

$$(\mathrm{a})\qquad f^i(t,x,z,q,0)-f^i(t,x,z,\tilde{q},0)\leqslant \mu^i(t-T)\sum_{j=1}^{n}(q_j-\tilde{q}_j)$$

ou bien

$$(\mathrm{b})\qquad f^i(t,x,z,q,0)-f^i(t,x,z,\tilde{q},0)\geqslant -\mu^i(t-T)\sum_{j=1}^{n}(q_j-\tilde{q}_j)$$

pour $q\geqslant\tilde{q}$, z *arbitraire, et* $(t,x)\in D_T$ $(i=1,\dots,m)$.

HYPOTHÈSE F. *Soient* $\varphi^i(t,x,z)$ *des fonctions définies pour* $(t,x)\in\Sigma_T$, z *arbitraire, strictement croissantes par rapport à* z. *Supposons qu'il existe un nombre* $L>0$ *tel que*

$$(11)\qquad \varphi^i(t,x,z)-\varphi^i(t,x,\tilde{z})\geqslant L(z-\tilde{z})\qquad (i=1,\dots,m)$$

lorsque $z>\tilde{z}$, *pour* $(t,x)\in\Sigma_T$, *et en outre admettons qu'il existe une constante* $M>0$ *telle que*

$$(12)\qquad |a^i(t,x)|\leqslant M\quad \textit{sur } \Sigma_T\quad (i=1,\dots,m).$$

(²) De l'hypothèse H il s'ensuit que $f^i(t,x,z,q,r)$ sont aussi elliptiques, mais pas inversement.

(³) Dans la note [5] la propriété exprimée par l'hypothèse B est appelée „condition W_+".

HYPOTHÈSE G. *On a l'identité*

$$(13) \qquad \varphi^i(t, x, 0) \equiv 0 \quad \text{sur } \Sigma_T \text{ (4)} .$$

Désignons par R le diamètre de l'ensemble S_D.

THÉORÈME 1. *Admettons qu'il existe un nombre $T > 0$ tel que dans le domaine D_T toutes les hypothèses introduites ci-dessus soient vérifiées. Supposons qu'on ait*

$$(14) \qquad a^i(t) - \beta\mu^i(t) - mK\sigma^i(t) \geqslant \gamma > 0$$

pour $T \leqslant t < \infty$, où $\beta = \exp 2R$ et

$$(15) \qquad K > \max(M\beta/L + \beta, 1+\beta) .$$

Ceci étant admis, la solution régulière et parabolique du système (1) *avec les conditions aux limites* (2) *est asymptotiqement stable dans D.*

Démonstration. Posons

$$J(t) = \int_{-\delta}^{t} p(\tau)\exp[\lambda(\tau - t)]d\tau$$

où $p(t)$, qui a été construite dans [4], p. 4, remplit les conditions

1° $p(t) \geqslant f^i(t, x, 0, 0, 0)$, $t \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, m)$,

2° $p(t) > 0$ pour $t \geqslant 0$,

3° $\lim\limits_{t\to\infty} p(t) = 0$,

4° $p(t)$ est une fonction continue et décroissante dans $\langle 0, \infty)$.

Soit $w^1(x) = K - \exp(R - x_1)$, K étant déterminé par (15). En admettant l'hypothèse E(a) (voir [4]) et an posant $V(t, x) = w^1(x)J(t)$ et $v(t, x) = -w^1(x)J(t)$, on voit que

$$\frac{\partial V}{\partial t} \geqslant [-\lambda K - \sigma^i(t-T)mK - \beta\mu^i(t-T) + a^i(t-T)]J(t) + \\ + f^i(t, x, V, V_{x_j}, V_{x_jx_k}) .$$

Pour un λ assez petit nous pouvons omettre l'expression entre crochets et en déduire que les inégalités (3) sont satisfaites par les fonctions $V^i(t, x) = V(t, x)$ $(i = 1, \ldots, m)$. Pour le même nombre λ on a aussi

$$\frac{\partial v}{\partial t} \leqslant [\lambda K + \sigma^i(t-T)mK + \beta\mu^i(t-T) - a^i(t-T)]J(t) + f^i(t, x, v, v_{x_j}, v_{x_jx_k}) \\ \leqslant f^i(t, x, v, v_{x_j}, v_{x_jx_k}) ,$$

c'est-à-dire que les fonctions $v^i(t, x) = v(t, x)$ satisfont aux inégalités (4). Dans la démonstration du théorème 1 de la note [4] on a prouvé que ces

(4) Les hypothèses A, C, E_1, F, G sont identiques à celles de la note [4].

fonctions remplissent aussi les inégalités aux limites (5) et (6), ainsi que la condition initiale (7) pour le nombre K assez grand, satisfaisant à (15), où M, L vérifient les hypothèses (11) et (12).

Pour démontrer le théorème 1, sous l'hypothèse E(b), on pose $V(t, x) = w^2(x)J(t)$ et $v(t, x) = -w^2(x)J(t)$ où $w^2(x) = K - \exp(R + x_1)$ et en profitant des inégalités (9), (10), on démontre les conditions (5) et ensuite aussi (6).

4. Au lieu de l'hypothèse G on peut admettre une condition moins restrictive.

HYPOTHÈSE G_1. *Pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un $T(\varepsilon) > 0$ tel que $|\varphi^i(t, x, 0)| < \varepsilon$, lorsque $t \geqslant T$, $x \in \bar{S}_{\Sigma_T}$.*

En supposant que $\sigma^i(t)$ tendent vers zéro exponentiellement pour $t \to \infty$ on peut démontrer un théorème analogue au théorème 2 [4], en admettant l'hypothèse E_1 et la condition H et en supposant que l'inégalité (14) soit remplie.

5. Les théorèmes exposés jusqu'à présent ne contiennent pas le cas des théorèmes 2 dans [1], 1 dans [2] et 2 dans [3]. Nous allons démontrer un théorème qui en constitue une généralisation.

HYPOTHÈSE A_1. *Pour chaque $z \geqslant \tilde{z}$ on a*

$$f^i(t, x, z, 0, 0) - f^i(t, x, \tilde{z}, 0, 0) \leqslant 0 \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

où $(t, x) \in D_T$.

THÉORÈME 2. *Admettons qu'il existe un nombre $T > 0$ tel que les hypotèses H, A_1, B, C, E_1 soient remplies dans le domaine D_T, et les hypothèses F, G_1 le soient sur Σ_T. Supposons en outre qu'il existe un $P > 0$ tel que*

$$\frac{\mu^i(t)}{a^i(t)} \leqslant P \quad \textit{pour} \quad t \geqslant T \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{16}$$

Il en résulte que la solution $u^i(t, x)$ du système (1) avec les conditions aux limites (2), régulière et parabolique dans D, est asymptotiquement stable dans D.

Démonstration. Admettons l'hypothèse E_1(a) et posons $w^3(x) = K^1 - \exp[\varrho(R - x_1)]$, où $\varrho > P + \gamma$ pour $\gamma > 0$ arbitraire et $K^1 > \max(M\beta/L + \beta_1, \beta_1 + 1)$ pour $\beta_1 = \exp \varrho 2R$. La fonction $V(t, x) = w^3(x) \times J(t) + \varepsilon$ satisfait à l'inégalité

$$\frac{\partial V}{\partial t} \geqslant J(t)[-\lambda K^1 - \mu^i(t-T)\varrho + a^i(t-T)\varrho^2] + f^i(t, x, V, V_{x_j}, V_{x_j x_k}).$$

En profitant de (16) on peut choisir le nombre λ suffisamment petit pour que l'expression entre crochets soit non négative. En supposant E_1(b) posons $V(t, x) = w^4(x)J(t)+\varepsilon$, où $w^4(x) = K-\exp[\varrho(R+x_1)]$. Les autres détails du calcul restent invariables.

6. On peut facilement, donner, dans le cas d'une équation linéaire, des exemples de solutions qui ne sont pas asymptotiquement stables. Par exemple la fonction

$$u(t, x) = \exp(-\tfrac{1}{3}x)\left[\sin\frac{x}{6\sqrt{2}}+\cos\frac{x}{6\sqrt{2}}\right]\frac{t^2}{t^2+1}$$

est une solution de l'équation suivante

$$u''_{xx}+\tfrac{2}{3}u'_x+\tfrac{1}{8}u-u'_t = -\exp(-\tfrac{1}{3}x)\left[\sin\frac{x}{6\sqrt{2}}+\cos\frac{x}{6\sqrt{2}}\right]\frac{2t}{(t^2+1)^2},$$

une solution qui s'annule pour $x_1 = 9\sqrt{2}\pi/2$ et $x_2 = 21\sqrt{2}\pi/2$. La fonction $u(t, x)$ n'est pas asymptotiquement stable dans la demi-bande $\langle x_1, x_2\rangle\times\times\langle 0, \infty)$. Remarquons que $M = 0$ et il suffit de poser $K = 1+\exp 12\sqrt{2}\pi$ et alors la condition (14) prend la forme

$$1-\tfrac{2}{3}\exp 12\sqrt{2}\pi-\tfrac{1}{8}K \geqslant \gamma > 0 .$$

Cette inégalité est fausse.

Soit $a > 0$ arbitraire. Considérons l'équation

$$au''_{xx}+u-u'_t = \left(-\sin\frac{x}{\sqrt{a}}\right)\frac{2t}{(t^2+1)^2}.$$

La solution $u(t, x) = \left(\sin\frac{x}{\sqrt{a}}\right)\frac{t^2}{(t^2+1)}$ s'annule pour $x_1 = 0$ et $x_2 = \pi\sqrt{a}$ mais elle n'est pas asymptotiquement stable dans $\langle 0, \pi\sqrt{a}\rangle\times\langle 0, \infty)$. On ne peut pas déterminer de paramètre a assez grand pour que l'inégalité (14) soit remplie.

Travaux cités

[1] M. Krzyżański, *Sur l'allure asymptotique des solutions d'équation du type parabolique*, Bull. Acad. Polon. Sci. 4 (5) (1956), pp. 247-251.

[2] I. Łojczyk-Królikiewicz, *L'allure asymptotique des solutions des problèmes de Fourier relatifs aux équations linéaires normales du type parabolique dans l'espace $\mathcal{E}^{m+1}$*, Ann. Polon. Math. 14 (1963), pp. 1-12.

[3] — *Propriétés limites des solutions des problèmes de Fourier relatifs à l'équation presque linéaire du type parabolique*, Bull. Acad. Polon. Sci. 8 (9) (1960), pp. 597-603.

[4] — *Sur la stabilité asymptotique de la solution du système non linéaire des équations aux dérivées partielles du type parabolique*, Ann. Polon. Math. 18 (1966), pp. 243-255.

[5] J. Szarski, *Sur un système non linéaire d'inégalités différentielles paraboliques*, Ann. Polon. Math. 15 (1964), pp. 15-22.

Reçu par la Rédaction le 18. 3. 1966