ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXI (1969)

Die affin-zusammenhängenden Räume mit verunstalteter rekurrenter Krümmung

von S. Gołąb (Kraków) und A. Jakubowicz (Szczecin)

§ 1. Einleitung. Es sei ein affin-zusammenhängender Raum L_n für $n \geqslant 3$ gegeben, d.h. ein n-dimensionaler Raum, der mit einem Objekt $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ $(\lambda, \mu, \nu = 1, 2, \ldots, n)$ der linearen Übertragung ausgestattet ist.

Der Krümmungstensor R wird bekanntlich in Abhängigkeit von dem Objekt Γ folgendermassen definiert:

$$R_{\alpha\beta\lambda}{}^{\mu} \overset{\text{df}}{=} 2\partial_{[\alpha}\Gamma_{\beta]\lambda}^{\mu} + 2\Gamma_{[\alpha|\omega|}^{\mu}\Gamma_{\beta]\lambda}^{\omega} . \tag{1}$$

Wir führen folgende Bezeichnung ein:

$$R_{P\lambda}{}^{\mu} \overset{\text{df}}{=} R_{\alpha\beta\lambda}{}^{\mu}; \tag{2}$$

$$P = (\alpha, \beta),\ \alpha < \beta;\ P = 1, 2, \ldots, \binom{n}{2};\ \lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n .$$

Zwischen P und (α, β) kann man eine eindeutige Zuordnung feststellen. Stellen wir eine solche Korrespondenz ein für allemal fest. Das Objekt $R_{P\lambda}{}^{\mu}$ ist bekanntlich ein geometrisches Objekt mit der Transformationsregel [4]:

$$R_{P'\lambda'}{}^{\mu'} = A_{P'}^{P} , A_{\lambda'\mu}^{\lambda\mu'} R_{P\lambda}{}^{\mu} , \tag{3}$$

wo

$$A_{\mu}^{\mu'} \overset{\text{df}}{=} \frac{\partial\xi^{\mu'}}{\partial\xi^{\mu}} , \qquad A_{\lambda'}^{\lambda} \overset{\text{df}}{=} \frac{\partial\xi^{\lambda}}{\partial\xi^{\lambda'}} ,$$
$$A_{P'}^{P} \overset{\text{df}}{=} 2A_{[\alpha'}^{\alpha} . A_{\beta']}^{\beta} \quad (\alpha < \beta,\ \alpha' < \beta') . \tag{4}$$

Es sei $\nabla_{\xi} R_{\alpha\beta\lambda}{}^{\mu}$ die kovariante Ableitung des Krümmungstensors R. Wir führen folgende Bezeichnung ein:

$$\nabla_{\xi} R_{P\lambda}{}^{\mu} \overset{\text{df}}{=} \nabla_{\xi} R_{\alpha\beta\lambda}{}^{\mu} . \tag{5}$$

Das Objekt $\nabla_\xi R_{P\lambda}{}^\mu$ ist ein geometrisches Objekt mit der Transformationsregel:

$$\nabla_{\xi'} R_{P'\lambda'}{}^{\mu'} = \Delta^P_{P'} A^{\xi\lambda\mu'}_{\xi'\lambda'\mu} \nabla_\xi R_{P\lambda}{}^\mu . \tag{6}$$

Es kann vorkommen, dass folgende zwei Beziehungen erfüllt sind:

$$R_{P\lambda}{}^\mu = \underset{Q_0}{h_P} R_{Q_0\lambda}{}^\mu , \tag{7}$$

$$\nabla_\xi R_{P\lambda}{}^\mu = \underset{Q_0}{k_{\xi P}} R_{Q_0\lambda}{}^\mu \tag{8}$$

($Q_0 =$ const; in (7) und (8) soll also in bezug auf Q_0 nicht summiert werden).

Falls (7) und (8) erfüllt sind, nennen wir den Raum von *verunstalteter rekurrenter Krümmung* [5].

Das Objekt $\underset{Q_0}{h_P}$ ist ein geometrisches Objekt mit der Transformationsregel [5]:

$$\underset{Q_0}{h_{P'}} = \frac{\Delta^P_{P'} \underset{Q_0}{h_P}}{\Delta^R_{Q'_0} \underset{Q_0}{h_R}} \qquad (Q'_0 = Q_0) , \tag{9}$$

während die Transformationsformel für $\underset{Q_0}{k_{\xi P}}$ folgendermassen lautet:

$$\underset{Q_0}{k_{\xi' P'}} = \frac{\Delta^P_{P'} A^\xi_{\xi'} \underset{Q_0}{k_{\xi P}}}{\Delta^R_{Q'_0} \underset{Q_0}{h_R}} \qquad (Q'_0 = Q_0) . \tag{10}$$

Der Sammelbegriff $\{\underset{Q_0}{h_P}, \underset{Q_0}{k_{\xi P}}\}$ ist ein geometrisches Objekt (das so genannte halbzusammengesetztes Objekt [2]), während $\underset{Q_0}{k_{\xi P}}$ für sich kein geometrisches Objekt darstellt. Die Beziehungen (7) besitzen einen invarianten Charakter ([6], S. 32). Die Beziehungen (8) zusammen mit (7) besitzen auch einen invarianten Charakter ([6], S. 40).

§ 2. Die kovariante Ableitung des Objektes h_P. Auf Grund der Beziehungen (7) kann man die kovariante Ableitung des Objektes $\underset{Q_0}{h_P}$ definieren. Nehmen wir nämlich (7) in Betracht und setzen voraus, dass die Leibnizsche Regel für (7) gilt. Setzen wir noch [1]:

$$\Gamma_{\xi Q}{}^S \overset{\mathrm{df}}{=} 4\Gamma_{\xi[\lambda}{}^{[\alpha}\delta_{\mu]}{}^{\beta]} \tag{11}$$

$$(Q = (\lambda, \mu), \lambda < \mu ; S = (\alpha, \beta), \alpha < \beta) :$$

Vorausgesetzt, dass $\underset{Q_0}{\nabla_\xi h_P}$ existiert und dass die Leibnizsche Regel für Produkte gilt, können wir formell schreiben [1]:

$$\nabla_\xi R_{P\lambda}{}^\mu = R_{Q_0\lambda}{}^\mu \underset{Q_0}{\nabla_\xi h_P} + \underset{Q_0}{h_P} \nabla_\xi R_{Q_0\lambda}{}^\mu .$$

$$\partial_\xi R_{P\lambda}{}^\mu - \Gamma_{\xi P}{}^T R_{T\lambda}{}^\mu - \Gamma_{\xi\lambda}^a R_{Pa}{}^\mu + \Gamma_{\xi a}{}^\mu R_{P\lambda}^a$$
$$= R_{Q_0\lambda}{}^\mu \underset{Q_0}{\nabla_\xi h_P} + \underset{Q_0}{h_P} \partial_\xi R_{Q_0\lambda}{}^\mu - \underset{Q_0}{h_P} \Gamma_{\xi Q_0}{}^T R_{T\lambda}{}^\mu$$
$$- \underset{Q_0}{h_P} \Gamma_{\xi\lambda}^a R_{Q_0 a}{}^\mu + \underset{Q_0}{h_P} \Gamma_{\xi a}^\mu R_{Q_0\lambda}{}^a ,$$

$$R_{Q_0\lambda}{}^\mu \partial_\xi \underset{Q_0}{h_P} + \underset{Q_0}{h_P} \partial_\xi R_{Q_0\lambda}{}^\mu - R_{Q_0\lambda}{}^\mu \Gamma_{\xi P}{}^T \underset{Q_0}{h_T} - \Gamma_{\xi\lambda}^a R_{Pa}{}^\mu + \Gamma_{\xi a}^\mu R_{P\lambda}^a$$
$$= R_{Q_0\lambda}{}^\mu \underset{Q_0}{\nabla_\xi h_P} + \underset{Q_0}{h_P} \partial_\xi R_{Q_0\lambda}{}^\mu - R_{Q_0\lambda}{}^\mu \underset{Q_0}{h_P} \Gamma_{\xi Q_0}{}^T \underset{Q_0}{h_T} - \Gamma_{\xi\lambda}{}^a R_{Pa}{}^\mu + \Gamma_{\xi a}{}^\mu R_{P\lambda}{}^a ,$$

also

$$\partial_\xi \underset{Q_0}{h_P} - \Gamma_{\xi P}{}^T \underset{Q_0}{h_T} = \underset{Q_0}{\nabla_\xi h_P} - \underset{Q_0}{h_P} \Gamma_{\xi Q_0}{}^T \underset{Q_0}{h_T} .$$

Jetzt mögen wir die kovariante Ableitung $\underset{Q_0}{\nabla_\xi h_P}$ in folgender Weise definieren (wir lassen weiter überall die Indizes Q_0 unter h und k weg):

(12) $$\nabla_\xi h_P \overset{\mathrm{df}}{=} \partial_\xi h_P - \Lambda_{\xi P}{}^T h_T ,$$

wo

(13) $$\Lambda_{\xi P}{}^T \overset{\mathrm{df}}{=} \Gamma_{\xi P}{}^T - h_P \Gamma_{\xi Q_0}{}^T .$$

Auf Grund der Definition (12) und des Satzes 1 in der Arbeit [8] sehen wir, dass $\{h_P, \nabla_\xi h_P\}$ ein geometrisches Objekt (halbzusammengesetztes) ist.

Wenn der Raum von verunstalteter rekurrenter Krümmung ist, dann haben wir auf Grund (7) und (8):

$$\nabla_\xi R_{P\lambda}{}^\mu = R_{Q_0\lambda}{}^\mu \nabla_\xi h_P + h_P \nabla_\xi R_{Q_0\lambda}{}^\mu = R_{Q_0\lambda}{}^\mu (\nabla_\xi h_P + h_P k_{\xi Q_0}) ,$$
$$k_{\xi P} = \nabla_\xi h_P + h_P k_{\xi Q_0} ,$$

also für die kovariante Ableitung $\nabla_\xi h_P$ haben wir folgende Formel:

(14) $$\nabla_\xi h_P = k_{\xi P} - h_P k_{\xi Q_0} ,$$

woraus ersichtlich ist, dass die kovariante Ableitung des Pensovschen Objektes h_P hier durch h_P und $k_{\xi T}$ ausgedrückt werden kann. Die kovariante Ableitung $\nabla_\xi h_P$ ist ein Objekt mit der Transformationsformel [7]:

$$\nabla_{\xi'} h_{P'} = \frac{2 \Delta_{[P'}^{P} \Delta_{Q_0']}^{T'} h_T}{(\Delta_{Q_0'}^{S} h_S)^2} A_{\xi'}^{\xi} \nabla_\xi h_P .$$

[1] Vgl. das nachkommende Paragraph.

§ 3. Die Objekte $R_{Q_0\lambda}{}^{\mu}$, $V_\xi R_{Q_0\lambda}{}^{\mu}$. Das objekt $R_{Q_0\lambda}{}^{\mu}$ ist bei fixiertem Q_0 kein geometrisches Objekt (wie z.B. die erste Komponente eines Vektors). Man kann jedoch zeigen, dass die Zusammensetzung

$$\{h_P,\ R_{Q_0\lambda}{}^{\mu}\} \tag{15}$$

schon ein geometrisches Objekt darstellt. Da auf Grund von (7)

$$h_{Q'_0} = h_{Q_0} \tag{16}$$

ein Skalar ist, so haben wir für $R_{Q_0\lambda}^{\mu}$ die Transformationsformel

$$R_{Q'_0\lambda'}{}^{\mu'} = \Delta^{P}_{Q'_0} A^{\lambda\,\mu'}_{\lambda'\,\mu}\, h_P R_{Q_0\lambda}{}^{\mu} \qquad (Q'_0 = Q_0)\,. \tag{17}$$

Es kann leicht bewiesen werden, dass diese Transformationsformel die Gruppeneigenschaft besitzt, woraus folgt, das (15) tatsächlich ein geometrisches Objekt (ein halbzusammengesetztes, da h_P für sich ein Pensovsches Objekt darstellt). In ähnlicher Weise stellt man fest, dass zwar

$$V_\xi R_{Q_0\lambda}{}^{\mu} \tag{18}$$

für sich kein geometrisches Objekt ist, jedoch die Zusammensetzung

$$\{h_P,\ k_{\sigma P},\ V_\xi R_{Q_0\lambda}{}^{\mu}\} \tag{19}$$

schon ein geometrisches Objekt darstellt. In der Tat wir erhalten für $V_\xi R_{Q_0\lambda}{}^{\mu}$ die Transformationsformel

$$V_{\xi'} R_{Q'_0\lambda'}{}^{\mu'} = \frac{1}{k_{\varrho_0 Q_0}} A^{\xi\,\lambda\,\mu'}_{\xi'\lambda'\mu}\, \Delta^{P}_{Q'_0} k_{\xi P} V_{\varrho_0} R_{Q_0\lambda}{}^{\mu} \qquad (Q'_0 = Q_0) \tag{20}$$

(nicht summieren über ϱ_0, Q_0; ϱ_0 beliebig aber fixiert).

Eine Rechnung (die wir dem Leser überlassen) zeigt, dass die Formel (20) die Gruppeneigenschaft besitzt und dass folglich (19) tatsächlich ein geometrisches Objekt darstellt.

§ 4. Beispiele. Man kann leicht beweisen, dass ein drei dimensionaler Riemannscher Raum V_3 nicht von verunstalteter rekurrenter Krümmung sein kann. Denn für V_3 sind die Beziehungen (7) nur dann erfüllt, wenn $r_1 = 4$, $r_2 = r_3 = 2$ [6], wo die Invarianten r_1, r_2, r_3 in der Arbeit [6] definiert sind. Aber in diesem Fall muss der Raum V_3 mit rekurrenter Krümmung sein, was in der Formel (9.16) der Arbeit [3] gezeigt wurde. Darum ist das Beispiel (3.21) in [6] nicht richtig. Zum Schluss wollen wir ein Beispiel eines affin-zusammenhängenden Raumes von verunstalteter rekurrenter Krümmung angeben, der aber nicht von rekurrenter Krümmung ist. Nehmen wir nämlich einen affin-zusammenhängenden Raum A_3, der mit folgendem Objekt $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ der linearen Übertragung ausgestattet ist:

$$\Gamma_{22} \overset{*}{\neq} 0\,, \qquad \Gamma_{\lambda\mu}{}^{\nu} \overset{*}{=} 0 \qquad (\lambda \neq 2\,, \mu \neq 2\,, \nu \neq 3)\,. \tag{21}$$

Auf Grund (21) haben wir für die Komponenten des Krümmungstensors:

(22) $$R_{232}{}^{3} = -R_{322}{}^{3} = -\partial_3 \Gamma_{23}{}^{3}, \quad R_{122}{}^{3} = -R_{212}{}^{3} = \partial_1 \Gamma_{22}{}^{3}$$

(die übrigen Komponenten sind identisch gleich Null).

Auf Grund (22) haben wir für die Komponenten der kovarianten Ableitung des Krümmungstensors:

(23) $$\nabla_\xi R_{232}{}^{3} = -\nabla_\xi R_{322}{}^{3} = -\partial_{\xi 3} \Gamma_{22}{}^{3}, \quad \nabla_\xi R_{122}{}^{3} = -\nabla_\xi R_{212}{}^{3} = \partial_{\xi 1} \Gamma_{22}{}^{3} \qquad (\xi = 1, 2, 3)$$

(die übrigen Komponenten sind identisch gleich Null).

Wenn wir weiter voraussetzen:

(24) $$\begin{gathered} \partial_3 \Gamma_{22}{}^{3} \neq 0, \quad \partial_{11} \Gamma_{22}{}^{3} \neq 0, \quad \partial_{23} \Gamma_{22}{}^{3} \neq 0, \quad \partial_{33} \Gamma_{22}{}^{3} \neq 0, \\ \partial_1 \Gamma_{22}{}^{3} = 0, \quad \partial_{13} \Gamma_{22}{}^{3} = 0, \quad \partial_{12} \Gamma_{22}{}^{3} = 0, \end{gathered}$$

so ist der Raum (24) von verunstalteter rekurrenter Krümmung. Insbesondere kann man setzen:

(25) $$\Gamma_{22}{}^{3} = e^{(\xi^1)^2 + \xi^2 + \xi^3}.$$

Literaturverzeichnis

[1] S. Gołąb und A. Jakubowicz, *Ein Beitrag zur Theorie des Zusammenhanges für Bivektoren*, Tensor, N. S. 20 (1969).

[2] S. Gołąb, A. Jakubowicz, M. Kucharzewski et M. Kuczma, *Sur l'objet géométrique représentant une direction munie d'un sens*, Ann. Polon. Math. 15 (1964), S. 233-236.

[3] V. Hlavatý, *The holonomy group III, Metrisable spaces*, Journ. Math. Mech. 9 (1960), S. 89-122.

[4] A. Jakubowicz, *O kompresji wskaźników dla afinorów antysymetrycznych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Szczecińskiej 39 (1963), S. 57-88.

[5] — *O pewnym obiekcie geometrycznym na wpół złożonym*, ibidem 57 (1964), S. 19-27.

[6] — *Über die Metrisierbarkeit der affin-zusammenhangenden Räume*, II Teil, Tensor, N. S. 17 (1966), S. 28-43.

[7] E. Siwek, *Sur la dérivée covariante des pseudoobjets géométriques*, Ann. Polon. Math. 17 (1965), S. 219-222.

[8] A. Szybiak, *Covariant derivative of geometric objects of the first class*, Bull. Acad. Polon. Sci. 11 (1963), S. 687-690.

Reçu par la Rédaction le 1. 9. 1967