COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. LVII 1989 FASC. 2

UNE REPRÉSENTATION POUR LA SÉRIE DE DIRICHLET ENGENDRÉE PAR $f(n^r M)$, OÙ f EST MULTIPLICATIVE

PAR

ARMEL MERCIER* (CHICOUTIMI, QUÉBEC)

1. Introduction. Soit n et m des entiers positifs et désignons par (n, m) le plus grand commun diviseur de n et m. Vaidyanathaswamy [5] a caractérisé les fonctions multiplicatives f, qui vérifient l'équation

$$f(nm) = \sum_{d|(n,m)} g(d) f(n/d) f(m/d),$$

et qui est appelée *identité de Busche–Ramanujan*. Lorsque $g(d) = \mu(d)h(d)$, où μ est la fonction de Möbius et h désigne une fonction complètement multiplicative, les fonctions f vérifiant l'identité ci-dessus sont appelées *fonctions spécialement multiplicatives* [3]. Plus récemment, Faiziev [1] a obtenu, en utilisant la décomposition en facteurs premiers, une démonstration assez laborieuse de ce résultat lorsque

$$f(n) = \sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k.$$

Dans le présent texte l'identité de Busche–Ramanujan sera obtenue à partir de la représentation d'une série de Dirichlet et cela constitue une démonstration très simple de cette identité.

Ainsi pour des entiers positifs r et M nous étudierons la série de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n^r M) n^{-s},$$

où

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) h(n/d)$$

et g et h sont des fonctions complètement multiplicatives. Lorsque $r = 1$, on a la représentation de la série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} f(nM) n^{-s}$ qui est équivalente à celle de

$$M^s \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 0(M)}}^{\infty} f(n) n^{-s}$$

* Travail fait dans le cadre de la subvention CRSNG A-3508.

et qui correspond à une étude déjà faite [4]. Notons enfin, que pour une série de Dirichlet, nous désignerons par σ_a son abscisse de convergence absolue, lorsqu'elle existe.

2. Les principaux résultats.

LEMME 1. *Soit* $f(n) = \sum g(d)h(n/d)$, *où* g, h *sont des fonctions complètement multiplicatives. Soit* a, k *des entiers positifs. Alors on a*

$$f(p^{a+k}) = f(p^k)f(p^a) - g(p)h(p)f(p^{k-1})f(p^{a-1})$$

et de plus pour tout $i \geqslant 2$ *on obtient*

$$f(p^{a+ik}) = f(p^{a+(i-1)k})(g^k(p)+h^k(p)) - g^k(p)h^k(p)f(p^{a+(i-2)k}).$$

Preuve. Pour la première partie on utilise l'induction sur k tandis que la seconde partie s'obtient par induction sur i.

THÉORÈME 1. *Soit* g *et* h *des fonctions complètement multiplicatives telles que*

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d)h(n/d).$$

Alors pour tout entier positif r *et* M *et pour* $\sigma > \sigma_a$ ($\sigma = \Re s$) *nous avons*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n^r M)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^r(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^r(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|g(n)h(n)f(n^{r-2})}{n^s}$$
$$\times \sum_{t|M} \left[f(M/t) \frac{\mu(t)g(t)h(t)f(t^{r-1})t^{-s}}{\sum_{d|t} g(d)h(d)f(d^{r-2})d^{-s}} \right].$$

Ici il est entendu que $f(n^{r-2}) = 0$ *si* $r = 1$ *pour* $n > 1$.

Preuve. Puisque la fonction $f(n^r M)/f(M)$, $f(M) \neq 0$, est une fonction multiplicative de n, alors pour $\sigma > \sigma_a$ on a

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n^r M)/f(M)}{n^s}$$
$$= \prod_p \left(1 + \frac{f(Mp^r)/f(M)}{p^s} + \frac{f(Mp^{2r})/f(M)}{p^{2s}} + \ldots\right)$$
$$= \prod_{p \nmid M} \left(1 + \frac{f(p^r)}{p^s} + \frac{f(p^{2r})}{p^{2s}} + \ldots\right) \prod_{p|M} \left(1 + \frac{f(Mp^r)/f(M)}{p^s} + \ldots\right).$$

Posons $x = p^{-s}$ alors, en utilisant la définition de f, on obtient

$$1 + f(p^r)x + f(p^{2r})x^2 + \ldots = \frac{1}{1-g^r(p)x}\left(1 + \frac{f(p^{r-1})h(p)x}{1-h^r(p)x}\right).$$

Ainsi en posant $B(n) = g(n)h(n)$, on a finalement

$$1 + f(p^r)x + f(p^{2r})x^2 + \ldots = \frac{1 - h(p)[h^{r-1}(p) - f(p^{r-1})]x}{1 - (g^r(p) + h^r(p))x + B^r(p)x^2},$$

et puisque

$$1-h(p)[h^{r-1}(p)-f(p^{r-1})]x = 1+B(p)f(p^{r-2})x,$$

alors pour tout $r \geqslant 1$ nous avons

$$(2) \quad \prod_{p|M}(1+f(p^r)x+f(p^{2r})x^2+\ldots) = \prod_{p|M}\left(\frac{1+B(p)f(p^{r-2})x}{1-(g^r(p)+h^r(p))x+B^r(p)x^2}\right).$$

Il suffit maintenant d'évaluer

$$(3) \qquad \prod_{p|M}\left(1+\frac{f(Mp^r)/f(M)}{p^s}+\frac{f(Mp^{2r})/f(M)}{p^{2s}}+\ldots\right).$$

Supposons que $M = p^a\ldots$, alors (3) est équivalent à ($p^a\|M$ signifie que $p^a|M$ et $p^{a+1}\nmid M$)

$$\prod_{p^a\|M}\left(1+\frac{f(p^{a+r})/f(p^a)}{p^s}+\frac{f(p^{a+2r})/f(p^a)}{p^{2s}}+\ldots\right)$$

et ainsi il suffit ($x = p^{-s}$) d'évaluer

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{f(p^{a+ir})}{f(p^a)}x^i$$

que nous noterons par I. Or on peut écrire

$$I = 1+\frac{f(p^{a+r})}{f(p^a)}x + \sum_{i=2}^{\infty}\frac{f(p^{a+ir})}{f(p^a)}x^i,$$

d'où en utilisant le lemme 1, on obtient

$$I = 1+\frac{f(p^{a+r})}{f(p^a)}x+\sum_{i=2}^{\infty}\left[\frac{f(p^{a+(i-1)r})}{f(p^a)}(g^r(p)+h^r(p))-\frac{B^r(p)f(p^{a+(i-2)r})}{f(p^a)}\right]x^i,$$

et finalement on a

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{f(p^{a+ir})}{f(p^a)}x^i = \frac{1+\dfrac{f(p^{a+r})-f(p^a)(g^r(p)+h^r(p))}{f(p^a)}x}{1-(g^r(p)+h^r(p))x+B^r(p)x^2}.$$

En conséquence, (3) devient

$$(4) \qquad \prod_{p^a\|M}\left(\frac{1+\dfrac{f(p^{a+r})-f(p^a)(g^r(p)+h^r(p))}{f(p^a)}x}{1-(g^r(p)+h^r(p))x+B^r(p)x^2}\right),$$

et en remplaçant (4) et (2) dans (1) on obtient

$$
(5) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(Mn^r)/f(M)}{n^s} = \prod_{p\mid M} \left(\frac{1-h(p)[h^{r-1}(p)-f(p^{r-1})]p^{-s}}{1-(g^r(p)+h^r(p))p^{-s}+B^r(p)p^{-2s}} \right)
$$

$$
\times \prod_{p^a \| M} \left(\frac{1+\dfrac{f(p^{a+r})-f(p^a)(g^r(p)+h^r(p))}{f(p^a)}p^{-s}}{1-(g^r(p)+h^r(p))p^{-s}+B^r(p)p^{-2s}} \right)
$$

$$
= \prod_{p} \left(\frac{1-h(p)[h^{r-1}(p)-f(p^{r-1})]p^{-s}}{1-(g^r(p)+h^r(p))p^{-s}+B^r(p)p^{-2s}} \right)
$$

$$
\times \prod_{p^a \| M} \left(\frac{1+\dfrac{f(p^{a+r})-f(p^a)(g^r(p)+h^r(p))}{f(p^a)}p^{-s}}{1-h(p)[h^{r-1}(p)-f(p^{r-1})]p^{-s}} \right).
$$

Or

$$
1-(h^r(p)-h(p)f(p^{r-1}))x = 1-(g^r(p)+h^r(p)-f(p^r))x,
$$

d'où

$$
\frac{1+\dfrac{f(p^{a+r})-f(p^a)(g^r(p)+h^r(p))}{f(p^a)}x}{1-h(p)(h^{r-1}(p)-f(p^{r-1}))x} = 1+\frac{\left(\dfrac{f(p^{a+r})}{f(p^a)}-f(p^r)\right)x}{1-(g^r(p)+h^r(p)-f(p^r))x},
$$

et en utilisant le lemme 1 on obtient

$$
\frac{1+\dfrac{f(p^{a+r})-f(p^a)(g^r(p)+h^r(p))}{f(p^a)}x}{1-h(p)(h^{r-1}(p)-f(p^{r-1}))x} = 1-\frac{B(p)f(p^{r-1})f(p^{a-1})x}{f(p^a)[1+B(p)f(p^{r-1})x]}
$$

$$
= \frac{1}{f(p^a)}\left[f(p^a)-\frac{B(p)f(p^{r-1})f(p^{a-1})x}{1+B(p)f(p^{r-2})x}\right].
$$

En utilisant cette dernière identité et en notant que

$$
\prod_{p} \left(\frac{1-h(p)[h^{r-1}(p)-f(p^{r-1})]p^{-s}}{1-(g^r(p)+h^r(p))p^{-s}+B^r(p)p^{-2s}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n^r)}{n^s},
$$

on obtient

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n^r M)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n^r)}{n^s} \prod_{p^a \| M} \left(f(p^a)-\frac{B(p)f(p^{r-1})f(p^{a-1})p^{-s}}{1+B(p)f(p^{r-2})p^{-s}} \right).
$$

Mais

$$
\prod_{p^a \| M} \left(f(p^a)-\frac{B(p)f(p^{r-1})f(p^{a-1})p^{-s}}{1+B(p)f(p^{r-2})p^{-s}} \right) = \sum_{t\mid M} \left(f(M/t)\frac{\mu(t)B(t)f(t^{r-1})t^{-s}}{\sum_{d\mid t}|\mu(d)|B(d)f(d^{r-2})d^{-s}} \right)
$$

$$
= \sum_{t\mid M} \left(f(M/t)\frac{\mu(t)B(t)f(t^{r-1})t^{-s}}{\sum_{d\mid t}B(d)f(d^{r-2})d^{-s}} \right),
$$

d'où on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n^rM)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n^r)}{n^s}\sum_{t|M}\left(f(M/t)\frac{\mu(t)B(t)f(t^{r-1})t^{-s}}{\sum_{d|t}B(d)f(d^{r-2})d^{-s}}\right). \tag{6}$$

Puisque, pour $\sigma>\sigma_a$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n^r)}{n^s}&=\prod_p\left(\frac{1-h(p)[h^{r-1}(p)-f(p^{r-1})]p^{-s}}{1-(g^r(p)+h^r(p))p^{-s}+B^r(p)p^{-2s}}\right)\\&=\prod_p\left(\frac{1+B(p)f(p^{r-2})p^{-s}}{(1-g^r(p)p^{-s})(1-h^r(p)p^{-s})}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g^r(n)}{n^s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^r(n)}{n^s}\prod_p\left(1+\frac{B(p)f(p^{r-2})}{p^s}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g^r(n)}{n^s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^r(n)}{n^s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\mu(n)|B(n)f(n^{r-2})}{n^s},\end{aligned}$$

alors on obtient le résultat demandé.

En posant $r=1$ dans l'équation du théorème 2, on obtient facilement le résultat suivant (identité de Busche–Ramanujan):

COROLLAIRE 1. *Soit g et h des fonctions complètement multiplicatives et soit $f=g*h$. Alors pour tout entier positif M on a*

$$f(nM)=\sum_{d|(n,M)}\mu(d)B(d)f(n/d)f(M/d).$$

On a aussi le résultat suivant obtenu par Götze [2].

COROLLAIRE 2. *Pour tout nombre complexe k et pour tout entier positif M, on a*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_k(n^2M)}{n^s}=\frac{\zeta(s)\zeta(s-k)\zeta(s-2k)}{\zeta(2s-2k)}\sum_{t|M}\frac{\mu(t)\sigma_k(M/t)\sigma_k(t)}{\sigma_{s-k}(t)},$$

où $\Re(s-1)>\max\{0,\Re(2k)\}$ et ζ désigne la fonction zeta de Riemann.

Preuve. En posant $r=2$ dans l'équation du théorème principal, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n^2M)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g^2(n)}{n^s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^2(n)}{n^s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\mu(n)|g(n)h(n)}{n^s}$$
$$\times\sum_{t|M}\left(f(M/t)\frac{\mu(t)g(t)h(t)f(t)t^{-s}}{\sum_{d|t}g(d)h(d)d^{-s}}\right),$$

et en observant que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\mu(n)|n^k}{n^s}=\frac{\zeta(s-k)}{\zeta(2s-2k)}$$

on obtient le résultat.

En posant $M = 1$ dans (6), on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n^r)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d|n} g^r(d)h^r(n/d)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|g(n)h(n)f(n^{r-2})}{n^s}$$

et ainsi on peut énoncer le résultat suivant:

THÉORÈME 2. *Pour tout entier positif r et pour toute fonction arithmétique $f = g*h$, où g et h sont des fonctions complètement multiplicatives, on a*

$$f(n^r) = \sum_{d|n} |\mu(d)|g(d)h(d)f(d^{r-2}) \sum_{e|(n/d)} g^r(e)h^r(n/de).$$

En particulier, on a

$$\sigma(n^r) = \sum_{d|n} d|\mu(d)|\sigma(d^{r-2})\sigma_r(n/d).$$

COROLLAIRE 3. *Pour $x \to \infty$, on a*

$$\sum_{n \leqslant x} \sigma(n^r) = \begin{cases} \dfrac{\zeta(r+1)}{r+1} x^{r+1} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|\sigma(n^{r-2})}{d^r} + O(x^{r+1/2}) & \text{si } r > 2, \\ \dfrac{\zeta(3)\zeta(2)}{3\zeta(4)} x^3 + O(x^2 \log x) & \text{si } r = 2. \end{cases}$$

Preuve. D'après le théorème 2 on a, pour $r \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} \sum_{n \leqslant x} \sigma(n^r) &= \sum_{n \leqslant x} \sum_{d|n} d|\mu(d)|\sigma(d^{r-2})\sigma_r(n/d) \\ &= \sum_{d \leqslant x} d|\mu(d)|\sigma(d^{r-2}) \sum_{k \leqslant x/d} \sigma_r(k) \\ &= \frac{\zeta(r+1)}{r+1} x^{r+1} \sum_{d \leqslant x} \frac{|\mu(d)|\sigma(d^{r-2})}{d^r} + O\left(x^r \sum_{d \leqslant x} \frac{|\mu(d)|\sigma(d^{r-2})}{d^{r-1}}\right). \end{aligned}$$

Or pour $n > 2$, $\sigma(n^r) < n^{r+1/2}$, d'où

$$\sum_{d \leqslant x} \frac{|\mu(d)|\sigma(d^{r-2})}{d^{r-1}} \leqslant \sum_{d \leqslant x} \frac{1}{d^{1/2}} \ll x^{1/2} \quad \text{si } r > 2,$$

$$\sum_{d \leqslant x} \frac{|\mu(d)|\sigma(d^{r-2})}{d^{r-1}} = \sum_{d \leqslant x} \frac{|\mu(d)|}{d} \ll \log x \quad \text{si } r = 2$$

et

$$\sum_{d > x} \frac{|\mu(d)|\sigma(d^{r-2})}{d^r} \leqslant \sum_{d > x} \frac{1}{d^{3/2}} \ll \frac{1}{x^{1/2}}.$$

Ceci complète la preuve de ce résultat.

Pour terminer mentionnons que pour toute fonction multiplicative f définie par

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d)\mu(n/d),$$

où g est une fonction complètement multiplicative, on peut montrer facilement que, au lieu d'obtenir une équation semblable à celle de Busche–Ramanujan, on obtient, pour tout entier positif n et M, la relation

$$f(n)f(M) = \sum_{d|(n,M)} \mu(d) f(nM/d).$$

Enfin, il est possible de montrer que sous certaines conditions, cette fonction f satisfait aussi une identité semblable à celle de Busche–Ramanujan, et est appelée *identité restreinte de Busche–Ramanujan* (voir [3], p. 52).

TRAVAUX CITÉS

[1] R. F. Faiziev, *On an identity in number theory*, Dokl. Akad. Nauk Tadzhik. SSR 25 (1982), pp. 381–384.

[2] F. Götze, *Über Teilerfunktionen in Dirichletschen Reihen*, Archiv Math. 19 (1968), pp. 627–634.

[3] P. J. McCarthy, *Introduction to Arithmetical Functions*, Springer-Verlag, 1986.

[4] A. Mercier, *Remarques sur la représentation de certaines séries de Dirichlet*, Canad. Math. Bull. 24 (1981), pp. 483–484.

[5] R. Vaidyanathaswamy, *The theory of multiplicative arithmetic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 33 (1931), pp. 579–662.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À CHICOUTIMI
555 BLVD. UNIVERSITÉ
CHICOUTIMI, QC
CANADA, G7H 2B1

Reçu par la Rédaction le 18.7.1987