ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
IX, 1 (1966)

R. ZUBER (Wrocław)

O SZYBKO ZBIEŻNYCH CIĄGACH KOLEJNYCH PRZYBLIŻEŃ

W procesach iteracyjnych, umożliwiających budowanie ciągu kolejnych przybliżeń

$$u_0(x),\, u_1(x),\, u_2(x),\, \ldots$$

zbieżnego do rozwiązania określonego zadania, interesuje nas przede wszystkim szybkość zbieżności tego procesu.

W tym celu należy zbadać zachowanie się ciągu liczbowego

$$\text{(i)} \qquad \mu(u_0, u),\, \mu(u_1, u),\, \mu(u_2, u),\, \ldots,$$

gdzie $\mu(u_n, u)$ jest miarą odległości między dokładnym rozwiązaniem $u(x)$ a jego przybliżeniem $u_n(x)$, otrzymanym w n-tym kroku iteracyjnym.

Badanie ciągu (i) jest w wielu przypadkach zadaniem bardzo trudnym. Dlatego często bada się zachowanie się innego ciągu liczbowego

$$\text{(ii)} \qquad \mu(u_0, u_1),\, \mu(u_1, u_2),\, \mu(u_2, u_3),\, \ldots,$$

co pozwala również wyciągnąć wnioski o zachowaniu się ciągu (i).

Jeżeli w szczególności przyjmiemy

$$\mu(u_n, u_{n+1}) = \sup_x |u_{n+1}(x) - u_n(x)|,$$

to wówczas z oszacowania szybkości zbieżności ciągu (ii) wynika łatwo podobne oszacowanie dla ciągu (i).

W pracy [1] podana jest konstrukcja pewnego uniwersalnego algorytmu, zwanego algorytmem Z, który umożliwia budowanie ciągu kolejnych przybliżeń $\{y_n(x)\}$, zbieżnego do rozwiązania zadania początkowego

$$\text{(1)} \qquad y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

W sformułowanym tam twierdzeniu dowodzi się, że ciąg kolejnych przybliżeń $\{y_n(x)\}$, określony z pomocą algorytmu Z, spełnia warunek

$$\text{(2)} \qquad \varrho_n \leqq \left(\frac{2hL}{1-hL}\right)^n \varrho_0,$$

gdzie

$$\varrho_n = \sup_{|x-x_0|<h} |y_{n+1}(x) - y_n(x)|,$$

natomiast L oraz h są stałymi dodatnimi niezależnymi od n. Z (2) wynika od razu, że dla $h < 1/3L$ ciąg liczbowy $\{\varrho_n\}$ monotonicznie dąży do zera.

W niniejszej pracy zajmujemy się analizą pewnego ciągu kolejnych przybliżeń szybko zbieżnego do rozwiązania zadania (1). Zbieżność tego ciągu wynika bezpośrednio z twierdzenia 1 (patrz [1]), którego założenia są szczególnym przypadkiem założeń twierdzenia sformułowanego w niniejszej pracy.

1. Twierdzenie. Niech funkcje $f(x, y)$ oraz $F_n(x, y)$, dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ będą określone i ciągłe w domkniętym prostokącie R, danym nierównościami

$$(3) \qquad |x - x_0| \leqslant a, \quad |y - y_0| \leqslant b,$$

oraz mają w tym prostokącie ciągłe pochodne cząstkowe względem y do rzędu $m+1$ włącznie. Zakładamy ponadto, że pochodne cząstkowe względem y rzędu $m+1$ wszystkich funkcji $F_n(x, y)$ są wspólnie ograniczone w prostokącie R.

Rozpatrzmy teraz ciąg funkcji

$$y_0(x), y_1(x), y_2(x), \ldots,$$

których wykresy należą do prostokąta R. $s+1$ pierwszych funkcji $y_0(x), y_1(x), \ldots, y_s(x)$ wybieramy dowolnie, żądając jedynie, aby każda z nich spełniała warunek początkowy $y_i(x_0) = y_0$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, s)$.

Dla ustalonego n weźmy pod uwagę odcinek powyższego ciągu, zawierający $s+1$ kolejnych wyrazów

$$y_n(x), y_{n+1}(x), \ldots, y_{n+s}(x).$$

Ustalmy ponadto $s+1$ liczb całkowitych nieujemnych $k_0, k_1, \ldots, k_s$, tak aby spełniały one warunek

$$k_0 + k_1 + \ldots + k_s = m+1.$$

Załóżmy, że dla rozpatrywanego n funkcja $F_n(x, y)$ spełnia warunki

(4)

$$D^0 F_n(x, y_{n+i}) = D^0 f(x, y_{n+i}), \quad \ldots, \quad D^{s_i} F_n(x, y_{n+i}) \equiv D^{s_i} f(x, y_{n+i})$$

dla $i = 0, 1, 2, \ldots, s$, przy czym $s_i = k_0 + k_1 + \ldots + k_i$, gdzie oznaczyliśmy

$$D^k f(x, y) = \frac{\partial^k f(x, y)}{\partial y^k}.$$

Załóżmy na koniec, że dla każdego n funkcja $y_{n+s+1}(x)$ spełnia równanie

$$y'_{n+s+1} = F_n(x, y_{n+s+1}) \quad \text{dla} \quad |x-x_0| < a \tag{5}$$

oraz warunek początkowy

$$y_{n+s+1}(x_0) = y_0. \tag{6}$$

Przy tych założeniach udowodnimy, że *istnieje takie $h > 0$, że wyrazy ciągu liczbowego $\{\varrho_n\}$, określone wzorem*

$$\varrho_n = \sup_{|x-x_0|<h} |y_{n+1}(x) - y_n(x)|,$$

spełniają warunki

$$\varrho_{n+s+1} \leqslant A\left(\frac{2hL}{1-hL}\right)^{p_{n+s+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{7}$$

gdzie $\{p_n\}$ jest ciągiem liczbowym spełniającym równanie różnicowe

$$p_{n+s+1} = k_0 p_n + k_1 p_{n+1} + \ldots + k_s p_{n+s}$$

z warunkiem początkowym

$$p_0 = \bar{p}_0, \quad p_1 = \bar{p}_1, \quad \ldots, \quad p_s = \bar{p}_s,$$

przy czym A jest stałą niezależną od n.

Aby to udowodnić, rozpatrzmy dla ustalonego x z przedziału $|x-x_0| < a$ następujący zbiór liczb:

$$y_n(x), y_{n+1}(x), \ldots, y_{n+s}(x). \tag{i}$$

Zbudujmy wielomian interpolacyjny Hermite'a $H_m(x, y)$, w którym x będziemy traktowali jako parametr, natomiast y jako zmienną. Zażądajmy, aby wielomian $H_m(x, y)$ spełniał następujące warunki:

$$\begin{gathered} D^0 H_m(x, y_i(x)) = D^0 f(x, y_i(x)), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D^{k_i-1} H_m(x, y_i(x)) = D^{k_i-1} f(x, y_i(x)) \end{gathered} \tag{ii}$$

dla $i = n, n+1, \ldots, n+s$.

Wielomian interpolacyjny Hermite'a otrzymamy najłatwiej, budując wielomian interpolacyjny Newtona z powtarzającymi się argumentami (patrz [2]). W przypadku naszego zadania należy zbudować wielomian interpolacyjny Newtona dla następujących węzłów:

$$\underbrace{y_n(x), \ldots, y_n(x)}_{k_0 \text{ razy}}, \underbrace{y_{n+1}(x), \ldots, y_{n+1}(x)}_{k_1 \text{ razy}}, \ldots, \underbrace{y_{n+s}(x), \ldots, y_{n+s}(x)}_{k_s \text{ razy}}. \tag{iii}$$

Zauważmy, że jeśli dla danego x wszystkie liczby (i) są różne, to ilość 1óżnych węzłów we wzorze (iii) jest równa $s+1$, przy czym węzeł

$y_{n+i}(x)$ ma krotność k_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, s)$. Może się jednak zdarzyć dla pewnych wartości x (takich x jest skończona ilość), że niektóre z liczb (i) są równe. Wówczas w (iii) pojawi się mniejsza ilość różnych węzłów, ale za to zwiększy się ich krotność. Jeśliby np. dla pewnego x wszystkie liczby (i) były równe, to w (iii) wystąpiłby tylko jeden węzeł $y_{n+s}(x)$ o krotności $m+1$.

Z warunków (4) wynika, że wielomian interpolacyjny $H_m(x, y)$ spełnia również warunki

$$\text{(iv)}\quad D^0 H_m\big(x, y_i(x)\big) \equiv D^0 F_n\big(x, y_i(x)\big), \quad \ldots, \quad D^{k_i-1} H_m\big(x, y_i(x)\big) \equiv \equiv D^{k_i-1} F_n\big(x, y_i(x)\big)$$

dla $i = n, n+1, \ldots, n+s$. Dla funkcji $f(x, y)$ oraz $F_n(x, y)$ prawdziwe są zatem wzory aproksymacyjne

$$\text{(v)}\qquad f(x, y) = H_m(x, y) + \Omega_n(x, y)\frac{D^{m+1} f(x, \eta_n)}{(m+1)!},$$

$$\text{(vi)}\qquad F_n(x, y) = H_m(x, y) + \Omega_n(x, y)\frac{D^{m+1} F_n(x, \bar{\eta}_n)}{(m+1)!},$$

gdzie

$$\Omega_n(x, y) = [y - y_n(x)]^{k_0}[y - y_{n+1}(x)]^{k_1} \ldots [y - y_{n+s}(x)]^{k_s}$$

oraz $\eta_n(x)$, $\bar{\eta}_n(x)$, dla każdej wartości parametru x z przedziału $|x - x_0| < \bar{a}$, są zawarte między liczbami (i),

Podstawiając (v) oraz (vi) do równania (5), otrzymamy

$$\text{(vii)}\quad y'_{n+s+1} = \Omega_n(x, y_{n+s+1})\frac{D^{m+1} F_n(x, \bar{\eta}_n) - D^{m+1} f(x, \eta_n)}{(m+1)!} + f(x, y_{n+s+1}).$$

Z założeń ciągłości $m+1$ pochodnej cząstkowej względem y funkcji $f(x, y)$ oraz wspólnej ograniczoności pochodnych rzędu $m+1$ funkcji $F_n(x, y)$ w domkniętym prostokącie R wynika istnienie takich stałych M_1 i M_2, że

$$\text{(viii)}\qquad |D^{m+1} f(x, y)| \leqslant M_1,$$

$$\text{(ix)}\qquad |D^{m+1} F_n(x, y)| \leqslant M_2$$

dla wszystkich punktów $(x, y) \in R$.

Natomiast z założenia ciągłości pierwszej pochodnej cząstkowej względem y funkcji $f(x, y)$ w prostokącie R wynika warunek Lipschitza

$$\text{(x)}\qquad |f(x, \bar{y}) - f(x, y)| \leqslant L|\bar{y} - y|,$$

gdzie $(x, \bar{y})$ oraz (x, y) są dowolnymi punktami prostokąta R, a L pewną stałą dodatnią.

Odejmując stronami (dla dwóch kolejnych wartości n) równości (vii) oraz całkując w przedziale $[x_0, x]$, otrzymamy, przy uwzględnieniu warunków początkowych (6), równości

(xi)
$$y_{n+s+2}-y_{n+s+1} = \int_{x_0}^{x} [W_{n+1}(t)-W_n(t)]dt + \int_{x_0}^{x} [f(t, y_{n+s+2})-f(t, y_{n+s+1})]dt,$$

gdzie

$$W_i(x) = \Omega_i(x, y_{i+s+1}) \frac{D^{m+1}[F_i(x, \bar{\eta}_i)-f(x, \eta_i)]}{(m+1)!}.$$

W dalszych rozważaniach ograniczymy zmienność x do wystarczająco małego przedziału $|x-x_0| < h$, takiego aby $hL < 1$. Wprowadźmy oznaczenie

$$\mu(m, k) = \sup_{|x-x_0|<h} |y_m(x)-y_k(x)|.$$

Z równości (xi), uwzględniając (viii), (ix) oraz (x), otrzymamy oszacowanie

$$\mu(n+s+2, n+s+1) \leqslant \frac{hM}{(m+1)!(1-hL)} \prod_{i=0}^{s} [\mu(n+s+2, n+i+1)]^{k_i} + \frac{hM}{(m+1)!(1-hL)} \prod_{i=0}^{s} [\mu(n+s+1, n+i)]^{k_i},$$

gdzie $M = M_1+M_2$.

Nierówność tę możemy zastąpić nierównością

$$\varrho_{n+s+1} \leqslant \frac{hM}{(m+1)!(1-hL)} \prod_{i=0}^{s} [\varrho_{n+s+1}+\varrho_{n+s}+\ldots+\varrho_{n+i+1}]^{k_i} + \frac{hM}{(m+1)!(1-hL)} \prod_{i=0}^{s} [\varrho_{n+s}+\varrho_{n+s-1}+\ldots+\varrho_{n+i}]^{k_i},$$

gdzie $\varrho_k = \mu(k+1, k)$.

Korzystając z faktu, o którym wspominaliśmy na początku pracy, że ciąg liczbowy $\{\varrho_n\}$ monotonicznie dąży do zera, możemy powyższą nierówność zapisać także w postaci równoważnej

$$\varrho_{n+s+1} \leqslant \frac{2hM}{(m+1)!(1-hL)} \prod_{i=0}^{s} [\varrho_{n+s}+\varrho_{n+s-1}+\ldots+\varrho_{n+i}]^{k_i}.$$

Jeśli natomiast uwzględnimy nierówności (2), to wówczas nierówność ta będzie miała postać

(xii)
$$\varrho_{n+s+1} \leqslant C\varrho_n^{k_0}\varrho_{n+1}^{k_1}\ldots\varrho_{n+s}^{k_s},$$

przy czym stała C wyraża się wzorem

$$(8)\qquad C = \frac{2hM}{(m+1)!(1-hL)}\left(\frac{1-hL}{1-3hL}\right)^{m+1}\prod_{i=0}^{s}\left[1-\left(\frac{2hL}{1-hL}\right)^{s-i+1}\right]^{ki}.$$

Na podstawie założenia funkcje $y_0(x), y_1(x), \ldots, y_s(x)$ są dowolne. Przez ich ustalenie ustala się również liczby $\varrho_0, \varrho_1, \ldots, \varrho_{s-1}$.

Niech liczby $\bar{p}_0, \bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_{s-1}$ spełniają równości

$$\varrho_i = C^{-1/m}\left(\frac{2hL}{1-hL}\right)^{\bar{p}_i} \quad \text{dla} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, s-1.$$

Ze wzoru (2) otrzymamy

$$\varrho_s \leqslant C^{-1/m}\left(\frac{2hL}{1-hL}\right)^{\bar{p}_{s-1}+1} = C^{-1/m}\left(\frac{2hL}{1-hL}\right)^{\bar{p}_s}.$$

Mając zdefiniowane liczby $\bar{p}_0, \bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_s$, możemy wyprowadzić wzór określający dowolny wyraz ciągu $\{\varrho_n\}$. Stosując $n+1$ krotnie wzór (xii), otrzymamy

$$\varrho_{n+s+1} \leqslant C^{-1/m}\left(\frac{2hL}{1-hL}\right)^{k_0p_n+k_1p_{n+1}+\ldots+k_sp_{n+s}} = C^{-1/m}\left(\frac{2hL}{1-hL}\right)^{p_{n+s+1}}.$$

W ten sposób wykazaliśmy prawdziwość tezy rozpatrywanego twierdzenia.

2. Wniosek. Jeżeli w założeniach twierdzenia przyjmiemy $s = 0$, tzn. ograniczymy się w każdym kroku iteracyjnym do jednej tylko krzywej, i oprócz tego przyjmiemy $k_0 = m+1$, to wówczas

1° warunki (4) przyjmą postać

$$(4')\qquad D^jF_n(x, y_n(x)) = D^jf(x, y_n(x)) \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, m);$$

2° wzory aproksymacyjne Hermite'a (v) oraz (vi) przejdą w odpowiednie wzory Taylora;

3° nierówności (7), co łatwo wykazać, przyjmą postać

$$(7')\qquad \varrho_{n+1} \leqslant C^{-1/m}\left(\frac{2hL}{1-hL}\right)^{p_n},$$

przy czym $p_n = (m+1)^n\bar{p}_0$, gdzie $\bar{p}_0$ jest stałą zależną od postaci funkcji $y_0(x)$ — zerowego przybliżenia w ciągu kolejnych przybliżeń.

Prace cytowane

[1] R. Zuber, *O pewnym algorytmie rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu* (*I*), Zastosow. Mat. 8 (1966), str. 351-363.

[2] И. С. Березин и Н. П. Жидков, *Методы вычислений*, том 1, Москва 1959.

Praca wpłynęła 27. 1. 1966

Р. ЗУБЭР (Вроцлав)

О БЫСТРО СХОДИМЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ

РЕЗЮМЕ

Одним из методов приближенного решения начальной задачи

$$\text{(i)} \qquad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

является замена задачи (i) некоторой последовательностью начальных задач

$$\text{(ii)} \qquad y' = F_n(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Решения этих новых задач

$$\text{(iii)} \qquad y_0(x), y_1(x), y_2(x), \ldots$$

образуют некоторую последовательность приближенных решений задачи (i). В этой статьи рассматриваются условия обеспечивающие:

1° сходимость последовательных приближений (iii) к решению задачи (i).

2° возможно большую скорость сходимости последовательности (iii).

В статьи доказывается следующая теорема.

Теорема. Пусть $f(x, y)$ и $F_n(x, y)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ непрерывные функции данные на прямоугольнике R,

$$\text{(1)} \qquad R: \quad |x-x_0| \leqslant a, \quad |y-y_0| \leqslant b,$$

имеющие непрерывные частные производные $m+1$ порядка относительно y. Предположим, что частные производные порядка $m+1$ относительно y всех функций $F_n(x, y)$ являются равномерно ограниченными.

Пусть $k_0, k_1, \ldots, k_s$ неотрицательные числа, исполняющие условие

$$k_0+k_1+ \ldots +k_s = m+1.$$

Дальше предположим, что (iii) является последовательностью непрерывных функций на интервале $|x-x_0| \leqslant a$, которых графы проходят через точку (x_0, y_0) и лежат в прямоугольнике R,

$$\text{(2)} \qquad D^r F_n(x, y_{n+i}) = D^r(x, y_{n+i}) \quad (r = 0, 1, \ldots, s_i;\ i = 0, 1, \ldots, s),$$

гве $s_i = k_0+k_1+ \ldots +k_i$ и

$$\text{(3)} \qquad y'_{n+s+1} = F_n(x, y_{n+s+1}).$$

Тогда *существует положительная константа h такая, что величины*

$$\varrho_n = \sup_{|x-x_0|<h} |y_{n+1}(x) - y_n(x)|$$

мажорируются следующим образом

$$\varrho_n \leqslant A\left(\frac{2hL}{1-hL}\right)^{p_n}, \quad n \geqslant s+1, \tag{4}$$

где числа p_n получаются из рекуретной формулы

$$p_n = k_0 p_{n-s-1} + k_1 p_{n-s} + \ldots + k_s p_{n-1}$$

а константа A не зависит от n.

R. ZUBER (Wrocław)

ON FAST CONVERGENT SEQUENCES OF SUCCESSIVE APPROXIMATIONS

SUMMARY

One of the methods of finding an approximate solution of an initial-value problem

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{i}$$

consists in replacing the problem (i) by a sequence of initial-value problems

$$y' = F_n(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{ii}$$

The solutions of these new problems

$$y_0(x), y_1(x), y_2(x), \ldots \tag{iii}$$

form a seqence of approximate solutions of (i).

The purpose of this paper is to present some conditions, which guarantee that:

1° the sequence of successive approximations (iii) is convergent to a solution of problem (i),

2° the speed of convergence of the sequence (iii) is as good as possible.

In the paper is proved the following theorem.

Theorem. Let $f(x, y)$ and $F_n(x, y)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, be continuous functions defined on the rectangle R,

$$R: \quad |x-x_0| \leqslant a, \quad |y-y_0| \leqslant b. \tag{1}$$

and having continuous partial derivatives of $(m+1)$-th order with respect to y.

Moreover, suppose that the partial derivatives of $(m+1)$-th order with respect to y of all functions $F_n(x, y)$ are bounded in common.

Let $k_0, k_1, \ldots, k_s$ be non-negative integers satisfying the condition

$$k_0 + k_1 + \ldots + k_s = m+1.$$

Further, suppose that (iii) is a sequence of continuous functions defined on the interval $|x-x_0| \leqslant a$ and such that the graph of each of them passes trough a given point (x_0, y_0) and lies within the rectangle R,

$$D^r F_n(x, y_{n+i}) = D^r f(x, y_{n+i}) \quad (r = 0, 1, \ldots, s_i;\ i = 0, 1, \ldots, s), \tag{2}$$

where $s_i = k_0+k_1+ \ldots +k_i$ and

$$y'_{n+s+1} = F_n(x, y_{n+s+1}). \tag{3}$$

Then *there exists a positive constant h such that the quantities*

$$\varrho_n = \sup_{|x-x_0|<h} |y_{n+1}(x)-y_n(x)|$$

can be majorized as follows

$$\varrho_n \leqslant A\left(\frac{2hL}{1-hL}\right)^{p_n}, \quad n \geqslant s+1, \tag{4}$$

where the numbers p_n are determined by the reccurence formula

$$p_n = k_0 p_{n-s-1}+k_1 p_{n-s}+ \ldots +k_s p_{n-1}$$

and the constant A does not depend on n.