ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XX (1968)

# Über die Skalarkomitanten der geometrischen Objekte

von A. Zajtz (Kraków)

Es sei $\Omega$ ein geometrisches Objekt mit der Transformationsregel

$$\Omega' = \Phi(\Omega, g), \quad g \in G, \tag{1}$$

wo $G = L_n^s$ die volle Differentialgruppe (vgl. [2]).

Die Skalarkomitante von $\Omega$ nennt man jede Funktion $K(\Omega)$, die hinsichtlich der Transformationen (1) der Argumente invariant ist (vgl. [1]), d.h.

$$K\big(\Phi(\Omega, g)\big) = K(\Omega) \tag{2}$$

für je $\Omega, g$ gilt. Wir sagen, ein System von Skalarkomitanten

$$\Sigma = \big(K_1(\Omega), \ldots, K_s(\Omega)\big) \tag{3}$$

sei ein volles System derjenigen Komitanten, wenn jede Skalarkomitante von $\Omega$ als Funktion von $K_1, \ldots, K_s$ dargestellt werden kann.

Das Problem der Bestimmung der Skalarkomitanten eines angegebenen Objektes ist in der Theorie der geometrischen Objekte und besonders in der Differentialgeometrie (hier heißen sie die „Invarianten") sehr wichtig. In dieser Abhandlung wollen wir eine allgemeine Formel auf ein volles System (3) der Skalarkomitanten des Objektes (1) angeben. Dabei kann $\Omega$ ein ganz beliebiges Objekt sein, aber vom praktischen Standpunkt selbverständlich nicht für alle Objekte fordert ihre Anwendung nur die geringen Rechnungen. Zu Objekten, für die diese Formel fast unmittellbar explicite Form eines Systems (3) ergibt gehören die linearen homogenen geometrischen Objekte des Typus $J$ (vgl. [5]). Die Bedeutung solcher Begriffe wie „Generator", „charakteristisches Objekt" u.s.w. nach der vorhergehenden Arbeit [6].

**1.** Die Skalarkomitante heißt trivial falls sie eine Konstante ist. Die Existenz der nichttrivialen Skalarkomitanten ist mit der Transitivität des Objektes eng verbunden. Wie in der Arbeit [4] vom Autor gezeigt wurde nur das nichttransitive geometrische Objekt besitzt nichttriviale Skalarkomitanten.

Nach (2) sind die Urbilder der Werte $K(\Omega)$ entweder die einzelnen Transitivfasern des Objektes $\Omega$ oder Vereinigungen derer. Jeder Transitivfaser entspricht genau ein Wert der Funktion $K(\Omega)$. Es bezeichne $\chi_\Omega$ die Menge aller Transitivfasern des $\Omega$ und $M$ den Wertebereich der $K(\Omega)$. Nach obigen gibt es eine Abbildung

$$k\colon \chi_\Omega \to M \tag{4}$$

des $\chi_\Omega$ auf ganzes $M$, die der Faser $F_{\Omega_0} \in \Omega_0$ den Wert $K(\Omega_0)$ zuordnet, d.h. ist

$$k(F_\Omega) \overset{\mathrm{df}}{=} K(\Omega)\,. \tag{5}$$

Umgekehrt, jede Abbildung (4), wo $M$ eine Menge ist, bestimmt eindeutig eine Komitante $K(\Omega)$ mit $M$ als Wertebereich; ihre Werte sind durch die (umgekehrte) Gleichung (5) bestimmt.

Hilfssatz 1. *Jede umkehrbare Abbildung* (4) *bestimmt in obenerwähnter Weise eine Skalarkomitante $\Sigma(\Omega)$, die voll* (*im Sinne des vollen Systems*) *ist, und umgekehrt stellt $\Sigma(\Omega)$ ein volles System* (3) *dar, so ist* (4) *eineindeutig.*

Beweis. Es sei (4) umkehrbar; setzen wir

$$\Sigma(\Omega) = k(F_\Omega)\,, \qquad \Sigma \in M\,. \tag{6}$$

Die umkehre Abbildung $k^{-1}\colon M \to \chi_\Omega$ kann man so ausdrücken

$$F_\Omega = k^{-1}(\Sigma)\,, \qquad \Sigma \in M\,. \tag{7}$$

$S(\Omega)$ sei eine Skalarkomitante und $s\colon \chi_\Omega \to M_S$ die zu (4) analoge Abbildung. Es ist

$$S(\Omega) = s(F_\Omega) \tag{8}$$

woraus man nach Einsetzung (7) erhält

$$S(\Omega) = s\big(k^{-1}(\Sigma)\big)\Big|_{\Sigma=\Sigma(\Omega)}\,,$$

d.h. ist $S$ eine Funktion von $\Sigma$. Da $S$ beliebig ist, so ist $\Sigma$ voll, w.z.b.w.

Umgekehrt, es sei $\Sigma(\Omega)$ voll und sei $s\colon \chi_\Omega \to N$ beliebige eineindeutige Abbildung. Laut der Vollständigkeit des $\Sigma(\Omega)$ ist die durch (8) definierte Skalarkomitante $S$ eine Funktion von $\Sigma$; es sei $S = \varphi(\Sigma)$. Daher und aus (6) und (8) haben wir

$$s(F_\Omega) = \varphi\big(k(F_\Omega)\big)\,.$$

Da $s$ eineindeutig ist, so muß auch $k$ (nb. auch $\varphi$) das solche sein, w.z.b.w.

Aus diesem Hilfssatz erhält man unmittelbar den folgenden

Satz 1. *Ein System* (3) *von Skalarkomitanten ist dann und nur dann voll, wenn alle Urbilder von $\Sigma$* (*die Durchschnitte der Urbilder der $K_1, \ldots, K_s$*) *die einzelnen Transitivfasern des Objektes $\Omega$ sind.*

**2.** Setzen wir nun voraus, daß das Objekt (1) homogen (vgl. [6]) ist. $H$ sei eine festgelegte stationäre Untergruppe des $\Omega$ und $\theta$ ihr charakteristisches Objekt mit der Transformationsregel

$$\theta' = \Psi(\theta, g)\,, \qquad g \in G\,. \tag{9}$$

Es sei $\Gamma$ ein spezieller Generator des $\Omega$, dessen alle Punkte die stationäre Untergruppe $H$ besitzen. Analogerweise wie in der vorhergehenden Arbeit können wir die Regel (1) zur ihr äquivalenten Gestalt

$$\Omega = \hat{\Phi}(\Gamma, \mathcal{K})\,, \qquad \mathcal{K} \in G/H \tag{10}$$

zurückführen, in der $\mathcal{K}$ die Elemente des Nebenklassenraumes $G/H$ sind. Die Formel (10) kann man als eine parametrische Darstellung betrachten mit Hilfe derer jedem Paar $(\Gamma_0, \mathcal{K}_0)$ von einem Punkt des $\Gamma$ und einer Nebenklasse $\mathcal{K}_0 = g_0 H$, eineindeutig ein Punkt $\Omega$ zugeordnet ist.

Im Wertebereich des Objektes $\theta$ gibt es ein Punkt $\mathring{\theta}$ mit $H$ als stationäre Untergruppe; wir können also analoge Darstellung für $\theta$ aufschreiben

$$\theta = \hat{\Psi}(\mathring{\theta}, \mathcal{K})\,, \qquad \mathcal{K} \in G/H\,. \tag{11}$$

Die Umkehrungen: der Funktion (10) nach $\Gamma$ und der (11) nach $\mathcal{K}$ geben die Formeln

$$\Gamma = \hat{\Phi}_1^{-1}(\Omega, \mathcal{K}) \tag{12}$$

und

$$\mathcal{K} = \hat{\Psi}^{-1}(\mathring{\theta}, \theta) \tag{13}$$

derer rechte Seiten den Identitäten

$$\hat{\Phi}_1^{-1}\big(\hat{\Phi}(\Gamma, \mathcal{K}), \mathcal{K}\big) = \Gamma\,, \qquad \hat{\Psi}^{-1}\big(\mathring{\theta}, \hat{\Psi}(\mathring{\theta}, \mathcal{K})\big) = \mathcal{K} \tag{14}$$

für beliebiges $\mathcal{K} \in G/H$ und jeden Punkt von $\Gamma$ genügen.

Es besitze das Objekt $\Omega$ $n$ Komponenten; wir definieren folgendermaßen ein System $\Sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ von $n$ Funktionen der Argumente $\Omega, \theta$:

$$\Sigma(\Omega, \theta) = \hat{\Phi}_1^{-1}\big(\Omega, \hat{\Psi}^{-1}(\mathring{\theta}, \theta)\big) \tag{15}$$

(die Funktion $\hat{\Phi}_1^{-1}$ besteht im Grunde aus $n$ Bestandfunktionen $\tilde{\Phi}_{1(i)}^{-1}$, $i = 1, \ldots, n$, d.h. wird $\sigma_i = \hat{\Phi}_{1(i)}^{-1}\,(\ldots)$ für $i = 1, \ldots, n$).

Nun wollen wir zeigen, daß $\Sigma(\Omega, \theta)$ eine gemeinsame Skalarkomitante der Objekte $\Omega, \theta$ darstellt.

Nach Einsetzung (13) in (12) erhält man die Identität

$$\Gamma = \hat{\Phi}_1^{-1}\big(\Omega, \hat{\Psi}^{-1}(\mathring{\theta}, \theta)\big) = \Sigma(\Omega, \theta) \tag{16}$$

für je $\Omega, \theta$. Dies besagt, daß $\Sigma(\Omega, \theta)$ auf jeder Transitivfaser $F_{\Omega_0}$ und für beliebiges $\theta$ denselben Wert $\Gamma_0 \in F_{\Omega_0}$ annimmt.

Bei der Koordinatensystemtransformation, die mit einem Element $g \in G$ erzeugt ist, haben wir nach (1) und (9) $\Omega' = \Phi(\Omega, g)$, $\theta' = \Psi(\theta, g)$, was mit Hilfe der Formeln (10) und (11) auch in der Form

$$\Omega' = \hat{\Phi}(\Gamma, \lambda)\,, \quad \theta' = \hat{\Psi}(\mathring{\theta}, \lambda) \tag{17}$$

aufgeschrieben werden kann, wo $\lambda = gH$ und $\Gamma \in F_\Omega$. Es gilt nach (14) und (17)

$$\begin{aligned}\Sigma(\Omega', \theta') &= \hat{\Phi}_1^{-1}\big(\Phi(\Omega, g), \hat{\Psi}^{-1}(\mathring{\theta}, \Psi(\theta, g))\big)\\ &= \hat{\Phi}_1^{-1}\big(\hat{\Phi}(\Gamma, \lambda)\,, \hat{\Psi}^{-1}(\mathring{\theta}, \hat{\Psi}(\mathring{\theta}, \lambda))\big)\\ &= \hat{\Phi}_1^{-1}\big(\hat{\Phi}(\Gamma, \lambda), \lambda\big) = \Gamma = \Sigma(\Omega, \theta)\,.\end{aligned}$$

Wir haben damit förmlich übergeprüft, daß die Funktion (15) hinsichtlich der Transformationen (1) und (9) der Objekte $\Omega$, $\theta$ invariant ist, d.h. eine Skalarkomitante darstellt (obgleich diese Folgerung könnte man schon aus (16) und der dort stehenden Bemerkung erhalten).

Da $\theta$ transitiv ist, so sind die Transitivfasern des Vereinigungsobjektes $(\Omega, \theta)$ von der Gestalt $(F_\Omega, \theta)$, wo $F_\Omega$ beliebige Transitivfaser von $\Omega$ ist, und damit sind sie eineindeutig durch die Punkte von $\Gamma$ bestimmt. Für $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$ ist nach (16) $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$, d.h. den verschiedenen Transitivfasern des Objektes $(\Omega, \theta)$ entsprechen verschiedene Werte von $\Sigma$, seine Urbilder sind also die einzelnen Transitivfasern und auf Grund des Satzes 1 stellt (15) ein volles System von Skalarkomitanten dieser Objekte dar. Es gilt damit der folgende

SATZ 2. *Das Funktionensystem* (15) *bestimmt ein volles System von Skalarkomitanten des homogenen Objektes* (1) *und eines Hilfsobjektes $\theta$ — des charakteristiechen Objektes der stationären Untergruppe von $\Omega$. Nach Ausdrückung $\theta$ als Funktion von $\Omega$* (¹) *und nach Einsetzung dieser in* (15) *erhält man ein volles Skalarensystem des Objektes $\Omega$.*

Wir können auch eine zu (15) analoge Formel angeben, die unmittelbar die Skalarkomitanten von $\Omega$ bestimmt. Auf jeder Transitivfaser kann man die Funktion $\hat{\Phi}(\Gamma, \mathcal{K})$ nach $\mathcal{K}$ entwirren, was gibt $\mathcal{K} = \hat{\Phi}_\Gamma^{-1}(\Omega)$. Nach Einsetzung dieses in (12) erhält man $\Gamma = \hat{\Phi}_1^{-1}\big(\Omega, \hat{\Phi}_\Gamma^{-1}(\Omega)\big)$ und nach der Annahme

$$\Sigma(\Omega) = \hat{\Phi}_1^{-1}\big(\Omega, \hat{\Phi}_\Gamma^{-1}(\Omega)\big) \tag{18}$$

(in der Formel sind $\Omega$ und $\Gamma$ aus derselben Transitivfaser!) besitzt die Funktion $\Sigma(\Omega)$ folgende Eigenschaft: Auf jeder Transitivfaser $F$ nimmt

(¹) in jeder Transitivfaser abgesondert. Das ist möglich, denn $\theta$ jedem transitiven Unterobjekt von $\Omega$ äquivalent ist (vgl. [6]).

sie denselben Wert $\Gamma \in F$. Auf analoge Weise wie vorher folgert man, daß $\Sigma$ eine Skalarkomitante darstellt und überdies sind seine Urbilder die einzelnen Transitivfasern. Zusammenfassend erhält man den folgenden

SATZ 3. *Die Formel* (18) *bestimmt ein volles Skalarensystem des homogenen Objektes* (1) ([2]).

Bemerkung. Ist das Objekt (1) nichthomogen, so können wir ein volles System (3) folgendermaßen konstruieren: In der obenangegebenen Weise bestimmen wir diejenigen Systeme auf jedem homogenen Unterobjekt $\Omega_i$ $(i \in I)$, ihre Vereinigung

$$\Sigma = \{\Sigma_{(i)}(\Omega) \text{ für } \Omega \in \Omega_i\}_{i \in I}$$

stellt ein volles Skalarensystem des ganzen Objektes $\Omega$ (die Bedingung für die Urbilder von $\Sigma$ ist hier erfüllt).

**3.** Es sei $\Omega$ ein lineares homogenes Objekt des Typus $J$ mit der Transformationsregel

$$\Omega' = F(J)\Omega\,, \qquad J = \mathrm{Det}(\partial \xi^{i'}/\partial \xi^{i})\,, \tag{19}$$

wo $F$ eine nichtsinguläre Matrix $n$-ter Ordnung bedeutet und $\Omega$ einspaltige Matrix $\begin{bmatrix}\omega_1\\ \vdots \\ \omega_n\end{bmatrix}$ der Komponenten dieses Objektes darstellt. In diesem Fall wird $G = \mathrm{GL}(n)$-lineare Gruppe und $H$ eine Untergruppe unimodulärer Gruppe $\mathrm{SL}(n)$. Als charakteristisches Hilfsobjekt $\theta$ nehmen wir eine gewöhnliche Dichte vom Gewicht $-1$ $(\theta' = J\theta)$. Der Formel (10) entspricht hier (nicht genau in bezug auf $\mathcal{K}$ aber jetzt ist es nicht wesentlich): $\Omega = F(J)\Gamma$ und daher der (12) entspricht $\Gamma = F^{-1}(J)\Omega$. Analogerweise als (11) und (13) ist hier $\theta = J\mathring{\theta}$ und $J = \theta/\mathring{\theta}$ woraus für $\mathring{\theta} = 1$ folgt $J = \theta$. Schließlich der Formel (15) entspricht in diesem Fall die folgende

$$\Sigma(\Omega, \theta) = F^{-1}(\theta)\Omega\,,$$

die in der Arbeit [5] dem Autor als Standpunkt diente.

## Literaturverzeichnis

[1] J. Aczél und S. Gołąb, *Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte*, Warszawa 1960.

[2] J. Haantjes and G. Laman, *On the definition of geometric objects*, Indagationes Math. 15 (1953), S. 208-215.

([2]) Diese Formel könnte man auch mit der Methode von S. Topa aus der Dissertation [3] leicht bekommen. Wie es uns scheint, ist die Formel (15) zur praktischen Anwendung bequemer.

[3] S. Topa, *Uogólnienie pojęcie funkcji jednorodnej i jej związek z teorią układów równań różniczkowych cząstkowych liniowych 1-go rzędu z jedną funkcją niewiadomą*, Disertation.

[4] A. Zajtz, *Primitive geometrische Objekte*, Zeszyty Naukowe UJ, im Druck.

[5] — *Klassifikation der linearen homogenen geometrischen Objekte des Typus J mit messbarer Transformationsregel*, Zeszyty Naukowe UJ, im Druck.

[6] — *Über die Aquivalenz der geometrischen Objekte*, Ann. Polon. Math. diesies Heft, S. 41-50.

*Reçu par la Rédaction le 11. 10. 1965*