ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
LII (1990)

Sur les propriétés complémentaires des solutions de l'équation de translation

par ZENON MOSZNER (Kraków)

Résumé. En considérant l'équation de translation (1), où $F: \Gamma \times S \to \Gamma$, Γ étant un ensemble arbitraire et S un groupe arbitraire ou un demi-groupe des éléments non-négatifs d'un groupe archimédien ou un groupe avec zéro, on donne les conditions pour qu'une solution F satisfasse à la condition d'identité, soit transitive, presque-transitive, simplement transitive, univalente par rapport à la première variable, effective, disjointe au point ou pour que S opère par F sur Γ d'une manière libre.

Soit $S = G$ le groupe arbitraire, noté multiplicativement, ou $S = G^+ = \{x \in G: x \geqslant e\}$ pour un groupe G linéairement ordonné et archimédien, où e est l'élément neutre de G. On sait ([6] et [8]) que chaque solution $F: \Gamma \times S \to \Gamma$, où Γ est un ensemble arbitraire non vide, de l'équation de translation (de transformation)

$$F(F(\alpha, x), y) = F(\alpha, x \cdot y), \tag{1}$$

remplissant la condition

$$\bigwedge_{\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma} \big(O(\alpha_1) \cap O(\alpha_2) \neq \emptyset \Rightarrow O(\alpha_1) \subset O(\alpha_2) \text{ ou } O(\alpha_2) \subset O(\alpha_1)\big), \tag{2}$$

où $O(\alpha) := F(\alpha, S)$, est de la forme

$$F(\alpha, x) = g_k\big(g_k^{-1}(f(\alpha)) \cdot x\big) \quad \text{pour } f(\alpha) \in \Gamma_k, \tag{3}$$

où

1° $f: \Gamma \to \Gamma$ est une fonction telle que

$$f(f(\alpha)) = f(\alpha),$$

2° $\{\Gamma_k\}_{k \in K}$ est une décomposition de l'ensemble $f(\Gamma)$ aux ensembles Γ_k non vides, disjoints et tels qu'il existe pour chaque k de K une décomposition invariante $\{W_{ik}\}_{i \in I_k}$ d'un intervalle J_k de G pour lequel $S \subset J_k$ et la puissance $\overline{\overline{I}}_k$ de I_k soit égale à $\overline{\overline{\Gamma}}_k$,

3° $g_k: J_k \to \Gamma_k$ est une fonction définie par $g_k(x) = h_k(W_{ik})$ pour x de W_{ik}, où $h_k: \{W_{ik}\}_{i \in I_k} \to \Gamma_k$ est une bijection.

Remarquons que g_k^{-1} n'est pas la fonction inverse à la fonction g_k (la fonction g_k n'est pas nécessairement univalente), $g_k^{-1}(f(\alpha))$ désigne l'image réciproque de l'ensemble $\{f(\alpha)\}$.

La famille $\{W_{ik}\}_{i\in I_k}$ est une décomposition invariante de J_k si et seulement si

$$J_k = \bigcup_{i\in I_k} W_{ik}, \quad W_{ik} \neq \emptyset, \quad \bigwedge_{i_1\neq i_2} W_{i_1k} \cap W_{i_2k} = \emptyset, \quad \bigwedge_{i_1\in I_k} \bigwedge_{x\in S} \bigvee_{i_2\in I_k} W_{i_1k}\cdot x \subset W_{i_2k}.$$

Il résulte de 1° et (3) que $f(\Gamma_k) = \Gamma_k$ et $F(\Gamma_k, S) = \Gamma_k$.

Si S forme un groupe, la condition (2) est toujours remplie, donc dans ce cas (3) donne chaque solution de (1). Dans le cas où $S = G^+$, la formule (3) ne donne pas toutes les solutions de (1) (voir [1]).

Si S est un groupe G, on a $J_k = G$ et chaque décomposition invariante de G est la famille des classes d'équivalence à droit du groupe G par rapport à un sous-groupe G_k([6]). Dans la suite nous désignerons cette famille par G/G_k (ce n'est pas un groupe quotient puisque G_k n'est pas en général normal!).

Si $S = G^+$, chaque décomposition invariante de J_k est de la forme suivante ([9]):

(i) il existe un élément u de la complétion de G tel que tous les ensembles $\{x\} \subset \Delta_k := \{x \in J_k\colon\ x \,\rfloor\, u\}$, où $\rfloor\; = \;\leqslant$ ou $\rfloor\; = \;<$, forment les composantes de cette décomposition (peut-être $\Delta_k = \emptyset$),

(ii) les autres composantes de la décomposition considerée sont les restrictions à l'ensamble $\tilde{J}_k = J_k \setminus \Delta_k$ des classes de la famille G/G_k, pour un sous-groupe G_k de G.

On considère dans beaucoup d'applications des solutions spéciales de l'équation de translation remplissant des conditions complémentaires ([5]), comme

I. *Condition d'identité*: $\bigwedge_{\alpha\in\Gamma} F(\alpha, e) = \alpha$.

II. *Transitivité*: $\bigwedge_{\alpha,\beta\in\Gamma} \bigvee_{x\in S} F(\alpha, x) = \beta$.

III. *Presque-transitivité*: $\bigwedge_{\alpha,\beta\in\Gamma} \bigvee_{x\in S} \big(F(\alpha, x) = \beta$ ou $F(\beta, x) = \alpha\big)$.

IV. *Transitivité simple*; c'est-à-dire transitivité et univalence de $F(\alpha, x)$ par rapport à la variable x pour chaque α de Γ.

V. *Univalence de F (α, x) par rapport à la variable* α pour chaque x de S.

VI. *Effectivité*, c'est-à-dire l'application $S \ni x \to F(\cdot, x) \in \Gamma^\Gamma$ est univalente.

VII. *S opère par F d'une manière libre sur Γ:*

$$\bigwedge_{x\in S}\{\bigvee_{\alpha\in\Gamma}(F(\alpha,x)=\alpha)\Rightarrow x=e\}.$$

VIII. *$F(\alpha,x)$ est disjointe au point α_0* ([2]):

$$\bigwedge_{x,y\in S}[F(\alpha_0,x)=F(\alpha_0,y)\Rightarrow\bigwedge_{\alpha\in\Gamma}F(\alpha,x)=F(\alpha,y)].$$

Le but de cette note est de donner des conditions équivalentes aux propriétés plus haut et concernant les paramètres des solutions de la forme (3). Les paramètres qui sont ici utilisés sont: f, K, Γ_k, Δ_k et G_k.

Nous supposons dans la suite que $G\neq\{e\}$. Dans le cas où $G=\{e\}$ les conditions qu'on cherche sont évidentes.

Posons dans la suite $N:=\bigcap_{k\in K}\bigcap_{a\in G}a^{-1}G_k a$.

Le tableau plus bas nous donne ces conditions équivalentes (sauf VI(b) et VIII(b), où nous avons seulement l'implication, et sauf IV(b)).

(a) Cas où $S=G$	Propriété	(b) Cas où $S=G^+$
$f=\mathrm{id}\vert_\Gamma$	I	$f=\mathrm{id}\vert_\Gamma$
$f=\mathrm{id}\vert_\Gamma$ et $\bar{K}=1$	II	$f=\mathrm{id}\vert_\Gamma$ et $K=\{k_0\}$ et $\Delta_{k_0}=\emptyset$ et $G_{k_0}\neq\{e\}$
$f=\mathrm{id}\vert_\Gamma$ et $\bar{K}=1$	III	$f=\mathrm{id}\vert_\Gamma$ et $\bar{K}=1$
$f=\mathrm{id}\vert_\Gamma$ et $\bar{K}=1$ et $\bigwedge_{k\in K}G_k=\{e\}$	IV	impossible
$f=\mathrm{id}\vert_\Gamma$	V	$f=\mathrm{id}\vert_\Gamma$ et $\bigwedge_{k\in K}(\Delta_k=\emptyset$ ou $G_k=\{e\})$
$N=\{e\}$	VI	$\Rightarrow$ $\bigvee_{k\in K}\Delta_k\neq\emptyset$ ou $N=\{e\}$ $\not\Leftarrow$
$\bigwedge_{k\in K}G_k=\{e\}$	VII	$\bigwedge_{k\in K}G_k=\{e\}$
$G_k=N$ pour k tel que $f(\alpha_0)\in\Gamma_k$	VIII	$\Rightarrow$ $G_k=N$ pour k tel que $f(\alpha_0)\in\Gamma_k$ $\not\Leftarrow$

Remarque. Les conditions équivalentes à VI et VIII dans le cas (b) sont plus compliquées (voir [3] et [4]).

Démonstrations des théorèmes du tableau.

Les théorèmes I(a)–VI(a) sont démontrés dans [7].

Ad VII(a). Supposons que S opère par F d'une manière libre sur Γ et pour chaque k de K prenons un α_k de Γ_k tel que $g_k^{-1}(\alpha_k) = G_k$. Il en résulte que pour les x de G_k:

$$F(\alpha_k, x) = g_k\big(g_k^{-1}(f(\alpha_k))\,x\big) = g_k\big(g_k^{-1}(\alpha_k)\,x\big) = g_k(G_k\, x) = g_k(G_k) = \alpha_k,$$

donc l'implication $F(\alpha_k, x) = \alpha_k \Rightarrow x = e$ peut avoir lieu seulement si $G_k = \{e\}$, c.q.f.d.

Supposons à présent que $G_k = \{e\}$ pour chaque k de K et que pour un α_0 de Γ et pour un x de G, on ait $F(\alpha_0, x) = \alpha_0$, d'où

$$f(\alpha_0) = f\big(F(\alpha_0, x)\big) = F\big(F(\alpha_0, x), e\big) = F(\alpha_0, x) = \alpha_0,$$

puisque d'après (3): $f(\alpha) = F(\alpha, e)$. Il en résulte que

$$f(\alpha_0) = \alpha_0 = F(\alpha_0, x) = g_k\big(g_k^{-1}(\alpha_0)\,x\big) \quad \text{pour } f(\alpha_0) \in \Gamma_k,$$

d'où

$$g_k^{-1}(\alpha_0) = g_k^{-1}(\alpha_0)\,x.$$

Il existe un $a(\alpha_0)$ de G tel que $g_k^{-1}(\alpha_0) = G_k\, a(\alpha_0)$, d'où puisque $G_k = \{e\}$, on a: $a(\alpha_0) = a(\alpha_0)\,x$. Il en résulte que $x = e$, c.q.f.d.

Ad VIII(a). Supposons que F est disjointe en α_0 et soit $f(\alpha_0) \in \Gamma_k$. On a

$$\begin{aligned} F(\alpha_0, x) &= g_k\big(g_k^{-1}(f(\alpha_0))\,x\big) = g_k\big(G_k a(\alpha_0)\,x\big) = g_k\big(G_k\, a(\alpha_0)\big) \\ &= g_k\big(g_k^{-1}(f(\alpha_0))\,e\big) = F(\alpha_0, e) \end{aligned}$$

pour $x \in a^{-1}(\alpha_0)\, G_k\, a(\alpha_0)$, où $g_k^{-1}(f(\alpha_0)) = G_k\, a(\alpha_0)$ pour un $a(\alpha_0)$ de G. Il en résulte que pour $x \in a^{-1}(\alpha_0)\, G_k\, a(\alpha_0)$ on a

$$\bigwedge_{\alpha \in \Gamma} F(\alpha, x) = F(\alpha, e),$$

donc $x \in \{x \in G\colon \bigwedge_{\alpha \in \Gamma} F(\alpha, x) = F(\alpha, e),\} = N$ (voir [7]). De là

$$a^{-1}(\alpha_0)\, G_k\, a(\alpha_0) \subset N = \bigcap_{k \in K} \bigcap_{a \in G} a^{-1} G_k\, a,$$

donc $a^{-1}(\alpha_0)\, G_k\, a(\alpha_0) = N$, alors $G_k = N$, q.e.d.

Inversement, si $G_k = N$, où $f(\alpha_0) \in \Gamma_k$, la relation $F(\alpha_0, x) = F(\alpha_0, y)$ nous donne

$$g_k\big(g_k^{-1}(f(\alpha_0))\,x\big) = F(\alpha_0, x) = F(\alpha_0, y) = g_k\big(g_k^{-1}(f(\alpha_0))\,y\big),$$

d'où pour $g_k^{-1}(f(\alpha_0)) = G_k\, a(\alpha_0)$:

$$G_k\, a(\alpha_0)\, x = G_k\, a(\alpha_0)\, y.$$

Par conséquent, $xy^{-1} \in a^{-1}(\alpha_0)\, G_k\, a(\alpha_0) = N$. Il en résulte que

$$\bigwedge_{\alpha\in\Gamma} F(\alpha, xy^{-1}) = F(\alpha, e),$$

d'où pour chaque α de Γ

$$F(\alpha, x) = F\big(F(\alpha, xy^{-1}), y\big) = F\big(F(\alpha, e), y\big) = F(\alpha, y),$$

c.q.f.d.

Ad I(b). La démonstration est évidente, d'après (3).

Ad II(b). Supposons que F est transitive et passons à la démonstration „ad absurdum".

Si $f \neq \mathrm{id}|_\Gamma$, on a $f(\Gamma) \neq \Gamma$ et aucun élément de $\Gamma \setminus f(\Gamma)$ ne peut être une valeur de F.

Si $\bar{K} > 1$, donc si $k_1, k_2 \in K$ et $k_1 \neq k_2$, on a $\Gamma_{k_1} \cap \Gamma_{k_2} = \emptyset$, d'où $F(\Gamma_{k_1}, S) \cap \Gamma_{k_2} = \emptyset$, donc la contradiction avec la transitivité.

Si $K = \{k_0\}$ et $\Delta_{k_0} \neq \emptyset$,

$$g_{k_0}(\Delta_{k_0}) \cap F\big(\Gamma_{k_0} \setminus g_{k_0}(\Delta_{k_0}), S\big) = \emptyset,$$

d'où aussi la contradiction avec la transitivité.

Si $K = \{k_0\}$, $\Delta_{k_0} = \emptyset$ et $G_{k_0} = \{e\}$, pour aucun α de Γ, $F(\alpha, e)$ ne peut être la valeur de la fonction $F(\beta, \cdot)$, où $\beta = F(\alpha, u)$ pour un $u > e$, donc aussi la contradiction.

Supposons maintenant que $f = \mathrm{id}|_\Gamma$, $K = \{k_0\}$, $\Delta_{k_0} = \emptyset$ et $G_{k_0} \neq \{e\}$ et soient α et β des éléments de Γ. Posons

$$g_{k_0}^{-1}(\alpha) = G_{k_0}\, a(\alpha) \cap \tilde{J}_{k_0} = G_{k_0}\, a(\alpha) \cap J_{k_0} \qquad \text{et} \qquad g_{k_0}^{-1}(\beta) = G_{k_0}\, a(\beta) \cap J_{k_0}$$

et soit $y \in G_{k_0}$ tel que $y \geqslant a(\alpha)\, a^{-1}(\beta)$. Posons de plus $x = a^{-1}(\alpha)\, y a(\beta)$. On a $x \geqslant e$ et

$$\begin{aligned} F(\alpha, x) &= g_{k_0}\big(g_{k_0}^{-1}(f(\alpha))\, x\big) = g_{k_0}\big(G_{k_0}\, a(\alpha)\, x \cap J_{k_0} x\big) \\ &= g_{k_0}\big(G_{k_0}\, y a(\beta) \cap J_{k_0} x\big) = g_{k_0}\big(G_{k_0}\, a(\beta) \cap J_{k_0} x\big) = \beta, \end{aligned}$$

d'où F est transitive.

Ad III(b). Supposons que F soit presque-transitive et que $f \neq \mathrm{id}|_\Gamma$ ou $\bar{K} > 1$.

Dans le premier cas, il existe un élément α_0 de $\Gamma \setminus f(\Gamma)$ tel que pour tout x de S on ait $F(\alpha_0, x) \neq \alpha_0$, ce qui est impossible.

Dans le deuxième cas, il existe des indices k_1 et k_2 de K tels que $k_1 \neq k_2$. Pour $\alpha_1 \in \Gamma_{k_1}$ et $\alpha_2 \in \Gamma_{k_2}$ il n'existe pas x de S tel que $\alpha_2 = F(\alpha_1, x)$, puisque $F(\alpha_1, x) \in \Gamma_{k_1}$, ou bien $\alpha_1 = F(\alpha_2, x)$, puisque $F(\alpha_2, x) \in \Gamma_{k_2}$, on a alors aussi la contradiction.

Soit à présent $f = \mathrm{id}|_\Gamma$, $K = \{k_0\}$ et α, β de Γ. Considérons $g_{k_0}^{-1}(\alpha)$ et $g_{k_0}^{-1}(\beta)$. Les deux cas suivants sont possibles:

(A) $$\bigvee_{u,v\in J_{k_0}} \left(u\in g_{k_0}^{-1}(\alpha) \text{ et } v\in g_{k_0}^{-1}(\beta) \text{ et } u\leqslant v\right)$$

ou

(B) $$\bigwedge_{u,v\in J_{k_0}} \left(u\in g_{k_0}^{-1}(\alpha) \text{ et } v\in g_{k_0}^{-1}(\beta) \Rightarrow u > v\right).$$

Dans le cas (A) nous avons: $u^{-1}v\in S$ et puisque $uu^{-1}v\in g_{k_0}^{-1}(\alpha)u^{-1}v$,

$$F(\alpha, u^{-1}v) = g_{k_0}\left(g_{k_0}^{-1}(\alpha)u^{-1}v\right) = g_{k_0}(uu^{-1}v) = g_{k_0}(v) = \beta.$$

Dans le cas (B): $v^{-1}u\in S$ et

$$F(\beta, v^{-1}u) = g_{k_0}\left(g_{k_0}^{-1}(\beta)v^{-1}u\right) = g_{k_0}^{-1}(vv^{-1}u) = g_{k_0}(u) = \alpha,$$

ce qui achève la démonstration.

Ad IV(b). Supposons que la fonction F de la forme (3) soit transitive simplement. Dans ce cas $f = \mathrm{id}|_\Gamma$, $K = \{k_0\}$, $\Delta_{k_0} = \emptyset$ et $G_{k_0} \neq \{e\}$. D'après 3° et (ii), il existe $\alpha\in\Gamma$ tel que $g_{k_0}^{-1}(\alpha) = G_{k_0}\cap J_{k_0}$. Pour x, y de G_{k_0}, $x\neq y$, nous avons

$$\begin{aligned} F(\alpha, x) &= g_{k_0}\left(g_{k_0}^{-1}(\alpha)x\right) = g_{k_0}(G_{k_0}x\cap J_{k_0}x) = g_{k_0}(G_{k_0}\cap J_{k_0}x) \\ &= g_{k_0}(G_{k_0}y\cap J_{k_0}y) = F(\alpha, y), \end{aligned}$$

ce qui nous donne la contradiction avec l'univalence de $F(\alpha,\cdot)$.

Ad V(b). Supposons que $F(\cdot, x)$ soit univalente pour chaque x de S et que $f\neq \mathrm{id}|_\Gamma$ ou il existe un k_0 de K tel que $\Delta_{k_0}\neq\emptyset$ et $G_{k_0}\neq\{e\}$.

Dans le premier cas il existe des α_1, α_2 de Γ tels que $\alpha_1\neq\alpha_2$ et $f(\alpha_1) = f(\alpha_2)$, alors $F(\alpha_1, e) = F(\alpha_2, e)$; $F(\cdot, e)$ ne peut pas donc être univalente.

Dans le deuxième cas nous pouvons supposer que $f = \mathrm{id}|_\Gamma$. Soient x_0 de Δ_{k_0} et a de G_{k_0} tels que $x_0a\notin\Delta_{k_0}$. Posons $\alpha_1 = g_{k_0}(x_0)$ et $\alpha_2 = g_{k_0}(x_0a)$. Nous avons $\alpha_1\neq\alpha_2$ et

$$F(\alpha_1, a) = g_{k_0}\left(g_{k_0}^{-1}(\alpha_1)a\right) = g_{k_0}(x_0a) = g_{k_0}\{g_{k_0}^{-1}[g_{k_0}(x_0a)]a\} = F(\alpha_2, a),$$

donc $F(\cdot, a)$ n'est pas univalente.

Supposons à présent que $f = \mathrm{id}|_\Gamma$ et

$$\bigwedge_{k\in K}[\Delta_k = \emptyset \text{ ou } G_k = \{e\}]$$

et que $\alpha\neq\beta$, $\alpha\in\Gamma_k$, $\beta\in\Gamma_l$, $x\in S$. Si $k\neq l$:

$$F(\alpha, x) = g_k\left(g_k^{-1}(\alpha)x\right) \neq g_l\left(g_l^{-1}(\beta)x\right) = F(\beta, x).$$

Supposons donc que $k = l$. Puisque $\alpha\neq\beta$, alors

(4) $$g_k^{-1}(\alpha)\cap g_k^{-1}(\beta) = \emptyset.$$

Si $\Delta_k = \emptyset$, $g_k^{-1}(\alpha)$ et $g_k^{-1}(\beta)$ sont les restrictions à J_k des classes de G/G_k, donc (4) nous donne

$$[g_k^{-1}(\alpha)x] \cap [g_k^{-1}(\beta)x] = \emptyset \tag{5}$$

et de là,

$$F(\alpha, x) = g_k(g_k^{-1}(\alpha)x) \neq g_k(g_k^{-1}(\beta)x) = F(\beta, x). \tag{6}$$

Si $\Delta_k \neq \emptyset$, on a $G_k = \{e\}$ et $g_k^{-1}(\alpha)$ et $g_k^{-1}(\beta)$ n'ont qu'un seul point et de là (4) nous donne (5). Il en résulte, comme plus haut, que (6) a lieu, q.e.d.

Ad VI(b). Supposons que F est effective et que

$$\bigwedge_{k \in K} \Delta_k = \emptyset \quad \text{et} \quad N \neq \{e\}.$$

Soit x de $N \cap S$ tel que $x \neq e$. Puisque

$$N = \bigcap_{k \in K} \bigcap_{a \in G} a^{-1} G_k a = \bigcap_{k \in K} G_k$$

(G est abélien dans notre cas, donc G_k sont normaux) nous avons

$$\bigwedge_{k \in K} \bigwedge_{a \in G} x \in a^{-1} G_k a.$$

Il en résulte que pour chaque α de Γ:

$$\begin{aligned} g_k^{-1}(f(\alpha))x &= (G_k a(\alpha) \cap J_k)x = a(\alpha)(a^{-1}(\alpha) G_k a(\alpha) x \cap a^{-1}(\alpha) J_k x) \\ &= a(\alpha)(a^{-1}(\alpha) G_k a(\alpha) \cap a^{-1}(\alpha) J_k x) \subset G_k a(\alpha) \cap J_k = g_k^{-1}(f(\alpha)), \end{aligned}$$

d'où

$$F(\alpha, x) = g_k(g_k^{-1}(f(\alpha))x) = g_k(g_k^{-1}(f(\alpha))) = F(\alpha, e),$$

donc la contradiction avec l'effectivité de F.

Ad VII(b). Supposons que S opère par F d'une manière libre sur Γ et pour chaque k de K prenons d'après 3° et (ii) un α_k de Γ_k tel que $g_k^{-1}(\alpha_k) = G_k \cap \tilde{J}_k$. Nous avons pour chaque x de $S \cap G_k$:

$$\begin{aligned} F(\alpha_k, x) &= g_k(g_k^{-1}(f(\alpha))x) = g_k(g_k^{-1}(\alpha_k)x) = g^k((G_k \cap \tilde{J}_k)x) \\ &= g_k((G_k x) \cap (\tilde{J}_k x)) = g_k(G_k \cap \tilde{J}_k x) = \alpha_k, \end{aligned}$$

puisque $\tilde{J}_k x \subset \tilde{J}_k$, donc d'après la supposition faite $x = e$, d'où $G_k = e$.

Supposons à présent que $G_k = \{e\}$ pour chaque k de K et que pour un α_0 de Γ et pour un x de S on ait $F(\alpha_0, x) = \alpha_0$. Nous avons comme dans la démonstration de VII(a)

$$\alpha_0 = g_k(g_k^{-1}(\alpha_0)x). \tag{7}$$

L'ensemble $g_k^{-1}(\alpha_0)$ n'a pas qu'un point. En effet, cela est évident si $g_k^{-1}(\alpha_0) \in \Delta_k$. Dans le cas contraire nous avons

$$g_k^{-1}(\alpha_0) = G_k a(\alpha_0) \cap \tilde{J}_k = \{e\} a(\alpha_0) \cap \tilde{J}_k = \{a(\alpha_0)\}$$

pour un $a(\alpha_0)$ de G.

Il résulte de cela et de (7) que

$$g_k^{-1}(\alpha_0) = g_k^{-1}(\alpha_0)\,x$$

d'où $x = e$, c.q.f.d.

Ad VIII(b). Supposons que F soit disjointe en α_0 et que $f(\alpha_0) \in \Gamma_k$ et $G_k \neq N$ $(= \bigcap_{l \in K} G_l$, puisque G est abélien dans notre cas). Dans ce cas $G_k \neq \{e\}$, puisque dans le cas contraire $N = \{e\}$, donc $G_k = N$.

Puisque $G_k \neq N$ il existe p de K et a de S tels que $a \in G_k$ et $a \notin G_p$. Soit b un élément de l'intervalle $S \cap \tilde{J}_k \cap \tilde{J}_p$ tel que $g_k^{-1}(f(\alpha_0))b \subset \tilde{J}_k$ et posons $x = b$ et $y = ab$. Puisque $x^{-1}y = a \in G_k$ les ensembles $g_k^{-1}(f(\alpha_0))x$ et $g_k^{-1}(f(\alpha_0))y$ sont contenus dans la même classe de G/G_k, d'où

$$F(\alpha_0, x) = g_k\big(g_k^{-1}(f(\alpha_0))x\big) = g_k\big(g_k^{-1}(f(\alpha_0))y\big) = F(\alpha_0, y).$$

Soit α arbitraire de Γ_p. Puisque $x^{-1}y = a \notin G_p$ les ensembles $g_p^{-1}(f(\alpha))x$ et $g_p^{-1}((f(\alpha))y$ ne sont pas contenus dans la même classe de G/G_p, donc

$$F(\alpha, x) = g_p\big(g_p^{-1}(f(\alpha))x\big) \neq g_p\big(g_p^{-1}(f(\alpha))y\big) = F(\alpha, y),$$

alors nous avons une contradiction.

Nous donnerons à présent un exemple de la solution F de (1) remplissant VI(b) et VIII(b) et étant en même temps ni disjointe en α_0 ni effective. Prenons pour ce but $G := (R, +)$, $K = \{k_0\}$, $G_{k_0} = Z =$ l'ensemble des nombres entiers, $\Gamma = \Gamma_{k_0} := [-2, 1)$, $J_{k_0} := [-2, +\infty)$, $\Delta_{k_0} := [-2, 0)$, $f = \mathrm{id}|_\Gamma$,

$$g_{k_0}(x) := \begin{cases} x & \text{pour } x \text{ de } [-2, 0), \\ x - [x] & \text{pour } x \text{ de } [0, +\infty) \end{cases}$$

et posons $F(\alpha, x) = g_{k_0}(g_{k_0}^{-1}(\alpha) + x)$. Cette fonction satisfait à (1), parce qu'elle a la forme (3). Elle remplit la condition VIII(b) puisque G est abélien et $\bar{K} = 1$, donc $N = G_{k_0}$, mais elle n'est pas disjointe en $\alpha_0 = 0$. En effet, pour $x = 0$ et $y = 1$ nous avons

$$F(0,0) = g_{k_0}\big(g_{k_0}^{-1}(0) + 0\big) = 0 = g_{k_0}\big(g_{k_0}^{-1}(0) + 1\big) = F(0, 1),$$

mais

$$F(-2, 0) = g_{k_0}\big(g_{k_0}^{-1}(-2) + 0\big) = -2 \neq -1 = g_{k_0}\big(g_{k_0}^{-1}(-2) + 1\big) = F(-2, 1).$$

F remplit aussi évidemment VI(b), n'étant pas en même temps effective, puisque $F(\cdot, 3) = F(\cdot, 4)$ (remarque de A. Mach).

Les conditions équivalentes aux propriétés I–VI dans le cas où S forme un groupe avec 0 $(S = G \cup \{0\}$, où G est un groupe arbitraire, $0 \notin G$ et $\bigwedge_{x \in S} x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0)$ sont données et démontrées dans [7]. Nous allons démontrer que

1° la solution de (1) sur $G \cup \{0\}$ ne peut jamais posséder la propriété VII,

2° la propriété VIII est dans ce cas équivalente à la condition

$$[(G_k = N \text{ pour } k \text{ tel que } f(\alpha_0) \in \Gamma_k) \text{ et } (f(\alpha_0) \neq F(\alpha_0, 0)] \tag{8}$$

$$\text{ou} \quad [\bigwedge_{l \in K} G_l = G \text{ et } \bigwedge_{\alpha \in \Gamma} F(\alpha, 0) = f(\alpha)].$$

Démonstrations. Ad 1°. Remarquons que $F(F(\alpha, 0), 0) = F(\alpha, 0)$, donc $F(\alpha, 0) = \alpha$ pour α de $F(\Gamma, 0)$. Si nous posons dans VII: $x = 0$ et α de $F(\Gamma, 0)$ nous aurons

$$F(\alpha, 0) = \alpha \Rightarrow 0 = e,$$

mais cette implication n'a pas lieu.

Ad 2°. Supposons que F soit disjointe au point α_0 et que $f(\alpha_0) \in \Gamma_k$. En raisonnant comme dans la démonstration VIII(a) nous constatons que $G_k = N$.

Supposons à présent pour la démonstration "ad absurdum" que $f(\alpha_0) = F(\alpha_0, 0)$ et que

$$\bigvee_{p \in K} G_p \neq G \quad \text{ou} \quad \bigvee_{\bar{\alpha} \in \Gamma} F(\bar{\alpha}, 0) \neq f(\bar{\alpha}).$$

Dans le premier cas, puisque $F(\alpha_0, e) = F(\alpha_0, 0)$ on a $F(\alpha_0, x) = F(\alpha_0, 0)$, d'où $F(\alpha_0, x) = F(\alpha_0, e)$ pour chaque x de G. Pour chaque α tel que $f(\alpha) \in \Gamma_p$ il existe un $\bar{x}$ de G tel que $F(\alpha, \bar{x}) \neq F(\alpha, e)$. Nous avons donc une contradiction avec la disjonction de F au point α_0.

Dans le deuxième cas nous avons

$$F(\alpha_0, e) = F(\alpha_0, 0) \quad \text{et} \quad F(\bar{\alpha}, e) \neq F(\bar{\alpha}, 0),$$

donc aussi une contradiction.

Supposons à présent la condition (8). Remarquons d'abord que si $\bigwedge_{l \in K} G_l = G$, alors on a

$$N = \bigcap_{p \in K} \bigcap_{a \in G} a^{-1} G_p a = G = G_l$$

pour chaque l de K, d'où $G_k = N$.

On sait de la démonstration de VIII(a) que la condition $G_k = N$ pour $f(\alpha_0) \in \Gamma_k$ entraîne

$$\bigwedge_{x, y \in G} [F(\alpha_0, x) = F(\alpha_0, y) \Rightarrow \bigwedge_{\alpha \in \Gamma} (F(\alpha, x) = F(\alpha, y))].$$

Il suffit donc de démontrer cette implication pour $x \in G$ et $y = 0$. Supposons donc que $F(\alpha_0, x) = F(\alpha_0, 0)$. Il en résulte que $F(\alpha_0, 0) \in \Gamma_k$ et puisque $F(F(\alpha_0, 0), u) = F(\alpha_0, 0)$ pour tout $u \in G$, on a $\Gamma_k = \{F(\alpha_0, 0)\}$. De là $f(\alpha_0) = F(\alpha_0, e) = F(\alpha_0, 0)$, donc d'après la supposition faite nous avons

$$\bigwedge_{l \in K} G_l = G \quad \text{et} \quad \bigwedge_{\alpha \in \Gamma} F(\alpha, 0) = f(\alpha).$$

Il en résulte que

$$F(\alpha, x) = F(\alpha, e) = f(\alpha) = F(\alpha, 0)$$

pour chaque α de Γ, ce qui achève la démonstration.

Remarquons enfin que les conditions démontrées nous permettent de construire des exemples des solutions de (1) qui ont quelquesunes des propriétés I–VIII.

Travaux cités

[1] A. Dąbrowska, *Równanie translacji na półgrupie elementów dodatnich grupy archimedesowskiej (L'équation de translation sur le demi-groupe des éléments positifs d'un groupe archimédien)*, Rocznik Nauk.-Dydakt. WSP w Rzeszowie 6/50 (1982), 23–32.

[2] M. A. Mc. Kiernan, *On iteration groups and related functional equations*, Aequationes Math. 32 (1986), 37–46.

[3] A. Mach, *Sur les solutions disjointes de l'équation de translation*, Ann. Polon. Math. (sous presse).

[4] —, *Sur l'effectivité des solutions de l'équation de translation*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej (sous presse).

[5] Z. Moszner, *The translation equation and its application*, Demonstratio Math. 6 (1973), 309–327.

[6] —, *Structure de l'automate plein, réduit et inversible*, Aequationes Math. 9 (1973), 46–59.

[7] —, et J. Tabor, *L'équation de translation sur une structure avec zéro*, Ann. Polon. Math. 31 (1976), 255–264.

[8] —, *Solution générale de l'équation de translation sur un demi-groupe*, Rocznik Nauk.-Dydakt. WSP w Krakowie z. 69, Travaux Math. 9 (1979), 97–104.

[9] —, *Décompositions invariantes du demi-groupe des éléments non négatifs du groupe archimédien*, Tensor 34 (1980), 8–10.

Reçu par la Rédaction le 20.09.1987