ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
IX, 2 (1967)

J. MIKUŠ und A. RYBARSKI (Wrocław)

ANGENÄHERTE SCHWINGUNGSFREQUENZFORMELN FÜR KONSERVATIVE SYSTEME (3)

1. In dieser Arbeit untersuchen wir eine gewisse angenäherte Methode, die zur Berechnung der Schwingungsperiode für die Gleichung konservativer Systeme

$$\ddot{y}+g(y) = 0, \quad y = y(t), \tag{1.1}$$

dient. Diese Gleichung ersetzen wir durch eine andere

$$\ddot{y}+g_{\mathrm{ap}}(y) = 0, \tag{1.2}$$

für welche die entsprechende Schwingungsperiode sich exakt berechnen lässt. Dabei soll aber die neue Funktion $g_{\mathrm{ap}}(x)$ in entsprechendem Sinne die vorige $g(x)$ möglicherweise gut approximieren. Die folgenden Metriken legen wir hier als Qualitätskriterium für die erwägte Approximation zugrunde: die L_C^2 Metrik

$$\|g-g_{\mathrm{ap}}\| = \Big\{\int\limits_J (1-x^2)^{-1/2}[g(x)-g_{\mathrm{ap}}(x)]^2 dx\Big\}^{1/2} \tag{1.3}$$

(der Index C bezieht sich hier auf die Tschebyschewsche Gewichtsfunktion $(1-x^2)^{-1/2}$) und die gewöhnliche L^2 Metrik

$$\|g-g_{\mathrm{ap}}\| = \Big\{\int\limits_J [g(x)-g_{\mathrm{ap}}(x)]^2 dx\Big\}^{1/2}. \tag{1.4}$$

Dabei haben wir als Schwingungsintervall das Intervall $J = (-1, +1)$ angenommen, was keine Begrenzung der Allgemeinheit bedeutet. Die Metrik (1.3) wurde schon etliche Male in einer Reihe von Arbeiten zu angenäherten Lösung von Gleichungen der Gestalt (1.1) angewendet ([2], [3], [6]). Jene Metrik stellt eine Grundlage für die bekannte Methode von harmonischer Linearisation nichtlinearer Quasielastizitätscharakteristiken dar ([4], [5]). Die Metrik (1.4) ist in der Theorie von nichtlinearen Schwingungen bisher sehr gering angewendet worden. Sie wurde in der Arbeit [1] angewendet, zwecks angenäherter Lösung der Gleichung

$$\ddot{y}+\mathrm{const}\,\dot{y}+g(y) = \text{gegebene Funktion von } t,$$

in der die gegebene nichtlineare Funktion $g(y)$ durch eine einfachere ersetzt wurde.

Es seien jetzt durch T und T_{ap} die Schwingungsperioden bezeichnet, welche den Gleichungen (1.1) und (1.2) entsprechen. Das Schwingungsintervall $J = (-1, +1)$ wird vorausgesetzt.

In Punkt 3 *der vorliegenden Arbeit beweisen wir, daß die Differenz* $T-T_{\text{ap}}$ *unter gewissen Voraussetzungen, beliebig klein wird, wenn nur die „Abstände"* (1.3) *bzw.* (1.4) *genügend kleine Werte annehmen.*

Daraus folgt, daß man mit Hilfe der beiden Metriken sicher feststellen kann, ob die Ersetzung von (1.1) durch (1.2) nur kleine Veränderung der Schwingungsperiode zufolge hat. In den Punkten 4 und 5 werden manche Charakteristiken der Gestalt $g(x) = x+\varepsilon f(x)$ untersucht, indem die Funktion $g_{\text{ap}}(x)$ als lineare bzw. intervallweise-lineare angesetzt ist. Beide Metriken (1.3) und (1.4) sind dann angewendet; man erweist im allgemeinen, daß (1.3) bessere numerische Ergebnisse liefert.

Es seien nun durch $y(t)$ und $y_{\text{ap}}(t)$ die den Gleichungen (1.1) und (1.2) entsprechenden Lösungen bezeichnet, die die Schwingungen im Intervall $J = (-1, +1)$ beschreiben.

Unter gewissen Voraussetzungen wurde in den Arbeiten [3] *bewiesen, daß die Größe*

$$\max_{\langle 0,T\rangle} |y(t)-y_{\text{ap}}(t)|$$

beliebig klein wird, wenn nur der „Abstand" (1.3) *hinreichend kleine Werte annimmt.*

Für die Metrik (1.4) ist ein entsprechender Satz bisher nicht bewiesen worden.

2. Wir setzen voraus, daß eine meßbare Funktion $v(x)$ im Intervall $J = (-1, +1)$ fast überall positiv und endlich ist. Wir nehmen an, daß die Bedingung

$$\inf_{x\in J} \text{es} \frac{v^2(x)}{1-x^2} \geqslant \frac{1}{m^2} \tag{2.1}$$

erfüllt ist, wo m eine gewisse positive Konstante bedeutet. Durch $V(m)$ sei im weiteren die Klasse von Funktionen bezeichnet, welche obigen Voraussetzungen genügen. Wir sehen, daß die Ungleichung

$$0 < v^{-1}(x) \leqslant m(1-x^2)^{-1/2} < +\infty \tag{2.2}$$

für jede beliebige Funktion $v \in V(m)$ fast überall stattfindet. Es sei nun das Funktional

$$t(v) = \int_J v^{-1}(x)\,dx \tag{2.3}$$

für $v \in V(m)$ eingeführt. Dann gilt das

LEMMA 1. *Das Funktional $t(v)$ ist in der Klasse $V(m)$ positiv und begrenzt, nämlich*

$$0 < t(v) \leqslant \pi m. \tag{2.4}$$

In der Tat, durch Integrieren der Ungleichung (2.2) gewinnen wir direkt die gewünschte Ungleichung (2.4).

Für beliebige Funktionen $v_1, v_2 \in V(m)$ bezeichnen wir im weiteren

$$\delta(v_1, v_2) = \sup_{x \in J} \operatorname{es} |v_1^2(x) - v_2^2(x)|. \tag{2.5}$$

Damit ist die Größe $\delta(v_1, v_2)$ sinngemäß definiert worden, da doch Funktionen der Klasse $V(m)$ fast überall endlich sind. Jetzt beweisen wir das

LEMMA 2. *Für eine beliebige Konstante η, welche der Ungleichung $0 < \eta \leqslant 1$ genügt, gilt die Abschätzung*

$$|t(v_1) - t(v_2)| \leqslant c_1 m \eta^{1/2} + c_2 m^3 \eta^{-1/2} \delta(v_1, v_2), \tag{2.6}$$

wo $v_1, v_2 \in V(m)$ und c_1, c_2 gewisse positive Konstanten sind.

Tatsächlich, auf Grund von Lemma 1 stellt die Differenz $\Delta_{12} = t(v_1) - t(v_2)$ eine endliche Größe dar. Nun, der Kürze halber, führen wir die Bezeichnungen

$$a_1(x) = \frac{v_1^2(x)}{1-x^2}, \qquad a_2(x) = \frac{v_2^2(x)}{1-x^2},$$

ein. Wegen (2.2) haben wir dann fast überall

$$m^{-2} \leqslant a_1(x), \qquad a_2(x) < +\infty. \tag{i}$$

Also gemäß (2.3) können wir schreiben

$$\Delta_{12} = \Big\{ \int\limits_{J-J_\eta} + \int\limits_{J_\eta} \Big\} (1-x^2)^{-1/2} [a_1^{-1/2}(x) - a_2^{-1/2}(x)] dx, \tag{ii}$$

wo J_η das Intervall $(-1+\eta, 1-\eta)$ bedeutet. Andererseits hat man für $x \in J - J_\eta$ eine Abschätzung

$$|a_1^{-1/2}(x) - a_2^{-1/2}(x)| \leqslant a_1^{-1/2}(x) + a_2^{-1/2}(x) \leqslant 2m,$$

woraus die Ungleichung

$$\Big| \int\limits_{J-J_\eta} \dots dx \Big| \leqslant 2m \int\limits_{J-J_\eta} (1-x^2)^{-1/2} dx \leqslant 8m\sqrt{\eta} \tag{iii}$$

folgt, wobei die drei Punkte die Integralfunktion in (iii) symbolisch darstellen.

Gemäß der algebraischen Ungleichung

$$|a_1^{-1/2}-a_2^{-1/2}| \leqslant \tfrac{1}{2}|a_1-a_2|\max\{a_1^{-3/2}, a_2^{-3/2}\},$$

für $a_1, a_2 > 0$, und nach (i) erhält man jetzt die Abschätzung

$$|a_1^{-1/2}(x)-a_2^{-1/2}(x)| \leqslant \frac{m^3}{2}|a_1(x)-a_2(x)| \leqslant \frac{m^3}{2(1-x^2)}\delta(v_1, v_2).$$

Es gilt also

$$\text{(iv)}\qquad \left|\int\limits_{J_\eta} \ldots dx\right| \leqslant \frac{m^3}{2}\delta(v_1, v_2)\int\limits_{J_\eta}(1-x^2)^{-3/2}dx \leqslant \frac{m_3}{2\sqrt{2\eta}}\delta(v_1, v_2).$$

Aus der Formel (ii) und den Ungleichungen (iii), (iv) folgt die Ungleichung (2.6) mit den Werten $c_1 = 8$, $c_2 = 8^{-1/2}$, womit Lemma 2 bewiesen ist. Mit Hilfe des obigen Lemmas formulieren wir den

Satz 1. *Für beliebige Funktionen v_1, v_2 der Klasse $V(m)$ gilt die Ungleichung*

$$\text{(2.7)}\qquad |t(v_1)-t(v_2)| \leqslant cm^2\delta^{1/2}(v_1, v_2),$$

wobei $c = c_1+c_2 = 8+8^{-1/2}$.

Es sei bemerkt, daß unsere Ungleichung im Falle $\delta(v_1, v_2) = 0$ sicher stattfindet. Sei jetzt der Fall $0 < \delta(v_1, v_2) \leqslant m^{-2}$, so braucht man nur in der Ungleichung (2.6) für $\eta = m^2\delta(v_1, v_2)$ anzusetzen. Gilt aber $\delta(v_1, v_2) \geqslant m^{-2}$, so nützen wir die Ungleichung (2.4) aus, womit sich folgendes ergibt

$$|t(v_1)-t(v_2)| \leqslant 2\pi m \leqslant 2\pi m^2\delta^{1/2}(v_1, v_2).$$

Damit ist der Beweis beendet.

Wir bemerken, daß die Größe

$$\text{(2.8)}\qquad \varrho(v_1, v_2) = \delta(v_1, v_2)/\big(1+\delta(v_1, v_2)\big)$$

in der Klasse $V(m)$ eine gewisse Metrik bildet. Es gilt

Satz 2. *Das Funktional $t(v)$ genügt im Funktionalraum $V(m)$ der Hölderschen Ungleichung*

$$\text{(2.9)}\qquad |t(v_1)-t(v_2)| \leqslant cm(1+m^2)^{1/2}\varrho^{1/2}(v_1, v_2),$$

mit dem Exponent gleich $\frac{1}{2}$.

Um das zu beweisen, betrachten wir erst den Fall $\varrho(v_1, v_2) \leqslant (1+m^2)^{-1}$. Dann hat man $\delta(v_1, v_2) \leqslant (1+m^{-2})\varrho(v_1, v_2)$, und zieht man die Ungleichung (2.7) heran, so ergibt sich (2.9). Andererseits, wenn $\varrho(v_1, v_2) \geqslant (1+m^2)^{-1}$ ist, so aus (2.4) erhält man die Abschätzung

$$|t(v_1)-t(v_2)| \leqslant 2\pi m \leqslant 2\pi m(1+m^2)^{1/2}\varrho^{1/2}(v_1, v_2)$$

und die Ungleichung (2.9) gilt stets. Auf diese Weise haben wir Satz 2 bewiesen. Natürlich folgt daraus, daß das Funktional $t(v)$ in der Klasse $V(m)$, in Bezug auf die Größen $\delta(v_1, v_2)$ bzw. $\varrho(v_1, v_2)$ gleichmäßig stetig ist.

3. Es sei vorausgesetzt, daß die Gleichung $\ddot{y}+g(y) = 0$ eine periodische Lösung besitzt, welche die Schwingungen im Intervall $J = (-1, +1)$ beschreibt. Unter den bekannten Bedingungen ist dann die Schwingungsperiode $T(g)$ durch die folgende Formel dargestellt:

$$T(g) = \sqrt{2} \int_J dx \left\{ \int_1^x g(\xi)d\xi \right\}^{-1/2}, \tag{3.1}$$

wo die im Intervall J summierbare Funktion $g(x)$ die Beziehungen

$$\int_x^1 g(\xi)d\xi > 0 \quad \text{für} \quad x \epsilon J, \quad \int_J g(\xi)d\xi = 0 \tag{3.2}$$

erfüllt. Im weiteren werden wir außerdem noch die Ungleichung in der Gestalt

$$\inf_{x \epsilon J} \frac{2}{1-x^2} \int_x^1 g(\xi)d\xi \geqslant \frac{1}{m^2} \tag{3.3}$$

fordern, wo m eine gewisse positive Konstante bedeutet. Durch (3.2) und (3.3) ist eine gewisse Klasse $\Gamma(m)$ vollständig definiert worden. Nun gilt der

Satz 3. *Für beliebige Funktionen g_1 und g_2, welche der Klasse $\Gamma(m)$ angehören, gelten die Ungleichungen*

$$|T(g_1)-T(g_2)| \leqslant 2cm^2 d^{1/2}(g_1-g_2) \tag{3.4}$$

und

$$|T(g_1)-T(g_2)| \leqslant 2cm(1+m^2)^{1/2} r^{1/2}(g_1-g_2), \tag{3.5}$$

wo folgende Bezeichnungen angenommen sind:

$$d(h) = 2\sup_{x \epsilon J} \left| \int_x^1 h(x)dx \right|, \quad r(h) = \frac{d(h)}{1+d(h)}, \quad h = g_1-g_2. \tag{3.6}$$

Zum Beweis genügt es zu bemerken, daß, wenn die Funktion $g(x)$ die Voraussetzungen (3.2) und (3.3) erfüllt, die positive Funktion $v(x) \geqslant 0$, wo

$$v^2(x) = 2\int_x^1 g(\xi)d\xi, \tag{3.7}$$

der Klasse $V(m)$ angehört. Ein Vergleichen der Formeln (3.1), (3.7) mit (2.3) ergibt, daß in unserem Falle die Gleichheit

$$T(g) = 2t(v) \tag{3.8}$$

besteht. Der Satz 3 stellt also einen speziellen Fall der Sätze 1 und 2 dar.

Die Größen $d(g_1-g_2)$ und $r(g_1-g_2)$ bilden gewisse Metriken in der Klasse $\Gamma(m)$. Der Satz 3 stellt fest, daß das *Funktional $T(g)$ im Raume $\Gamma(m)$ der Hölderschen Ungleichung genügt, mit $1/2$ als Exponent, im Bezug auf jene Metriken.* Destomehr ist das Funktional $T(g)$ gleichmäßig stetig.

Jetzt sind die Größen

$$|h| = \int_J |h|\,dx, \qquad \|h\| = \Big\{2\int_J h^2(x)\,dx\Big\}^{1/2}, \tag{3.9}$$
$$[\![h]\!] = 2\Big\{\int_J (1-x^2)^{-1/2}h^2(x)\,dx\Big\}^{1/2}$$

zu betrachten. Man beweist leicht, daß die Bedingung $\int_J h\,dx = 0$ die Ungleichung

$$d(h) \leqslant |h| \tag{3.10}$$

ergibt. Mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung folgt weiter

$$|h| \leqslant \|h\| \leqslant [\![h]\!]. \tag{3.11}$$

Daraus haben wir weiter den

Schluss 1. *Das Funktional $T(g)$ genügt der Hölderschen Ungleichung, mit fester Konstante und dem Exponenten $1/2$, in Bezug auf die Normen $L(J)$, $L^2(J)$ und $L^2_C(J)$.*

Bemerkung. Die Ungleichungen $\|g_1-g_2\| < +\infty$ bzw. $[\![g_1-g_2]\!] < +\infty$ muß man natürlich zusätzlich voraussetzen, womit die Klasse $\Gamma(m)$ in eine Klasseneinteilung splittert.

Unserer Schluß folgt natürlich aus (3.4), mit Hilfe der Abschätzungen (3.10) und (3.11). Diesen Schluß kann man sichtbar stärken, jedoch gehen wir hier nicht darauf ein.

Schluß 2. *Im Raum $\Gamma(m)$ genügt das Funktional $T(g)$ der Hölderschen Ungleichung, im Bezug auf die folgenden Metriken*

$$\frac{|g_1-g_2|}{1+|g_1-g_2|}, \quad \frac{\|g_1-g_2\|}{1+\|g_1-g_2\|}, \quad \frac{[\![g_1-g_2]\!]}{1+[\![g_1-g_2]\!]}, \tag{3.12}$$

mit gemeinsamer Konstante und dem Exponenten $1/2$.

Mit Hilfe von (3.5), (3.10) und (3.11), indem man den monotonischen Verlauf der Funktion $1/(1+s)$ für $s \geqslant 0$ berücksichtigt, kann der Schluß 2 leicht bewiesen werden. Das Funktional $T(g)$ ist also in $\Gamma(m)$ gleichmäßig stetig in Hinsicht auf alle Metriken (3.12).

4. Die bewiesenen Sätze wollen wir jetzt anwenden. Dazu setzen wir an, daß die Funktion $g(x)$ die folgende Gestalt annimmt:

$$(4.1) \qquad g(x) = x+\varepsilon f(x), \quad f(-x) = -f(x) \quad \text{für} \quad -1 \leqslant x \leqslant +1,$$

wobei ε das kleine Parameter bedeutet. Derartige Funktionen werden auch *quasi-lineare ungerade Charakteristiken* genannt.

Es ist leich zu sehen, daß *wenn die Funktion $f(x)$ im Intervall* $(-1, +1)$ *summierbar und für $x = \pm 1$ stetig ist, so gehört die Funktion $g(x)$, für genügend kleine Werte von ε, der Klasse $\Gamma(\sqrt{2})$ an.* In der Tat, mit Hilfe von (4.1) berechnet man

$$2(1-x^2)^{-1}\int_x^1 g\,dx = 1-2\varepsilon(1-x^2)^{-1}\int_x^1 f\,dx.$$

Hinsichtlich der Voraussetzungen, die von der Funktion $f(x)$ gemacht wurden, ist der Ausdruck

$$2(1-x^2)^{-1}\int_x^1 f\,dx$$

im Intervall $(-1, +1)$ eine stetige Funktion, die endliche Grenzwerte für $x \to \pm 1$ annimmt. Dieser Ausdruck ist also im Intervall $(-1, +1)$ hinsichtlich seines absoluten Betrages durch eine gewisse positive Konstante $A_f > 0$ begrenzt. Wir gelangen also zu folgender Ungleichung:

$$\frac{2}{1-x^2}\int_x^1 g\,dx \geqslant 1-|\varepsilon| A_f \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad -1 < x < +1,$$

für beliebige Werte $|\varepsilon| \leqslant \frac{1}{2}A_f^{-1}$, womit unsere Bemerkung erklärt ist.

Der spezielle Fall von (4.1) stellt eine lineare Charakteristik dar:

$$(4.2) \qquad g_{\mathrm{ap}}(x) = (1+\varepsilon l)x,$$

wo l ein neues Parameter bedeutet, as von ε unabhängig ist. Ersetzt man in (1.1) die Funktion (4.1) durch (4.2), so spricht man über Linearisierung der Gleichung (1.1). Für genügend kleine Werte von ε gehören beide Funktionen $g(x)$ und $g_{\mathrm{ap}}(x)$ der Klasse $\Gamma(\sqrt{2})$ an. Aus den vorigen Sätzen folgen nun zwei Ungleichungen:

$$(4.3) \qquad |T(g)-T(g_{\mathrm{ap}})| \leqslant \text{const}\times\|g-g_{\mathrm{ap}}\|^{1/2}$$

und

$$(4.4) \qquad |T(g)-T(g_{\mathrm{ap}})| \leqslant \text{const}\times[\![g-g_{\mathrm{ap}}]\!]^{1/2},$$

wobei wir mit Hilfe von (4.1) und (4.2)

$$(4.5) \qquad \|g-g_{\mathrm{ap}}\| = |\varepsilon|\times\|f-lx\|, \quad [\![g-g_{\mathrm{ap}}]\!] = |\varepsilon|\times[\![f-lx]\!]$$

berechnen. Die obigen Formeln erklären, daß der Fehler der Annäherung $T(g) \approx T(g_{ap})$ für $\varepsilon \to 0$ verschwindet. Das ist aber augenscheinlich, weil $T(g) \to 2\pi$ und $T(g_{ap}) \to 2\pi$ direkt gilt, was unmittelbar aus den exakten Formeln (4.3) und (4.4) folgt. Unsere Ungleichungen kann man jedoch nicht nur zur Abschätzung des Fehlers der Annäherung $T(g) \approx T(g_{ap})$ anwenden. Sie suggerieren gewisse „optimale" Auswahlregeln für die Konstante l, wenn die Funktion f gegeben ist. Man sieht aus (4.3), (4.4) und (4.5), daß ein „optimaler" Wert für l entweder aus der Bedingung

$$(4.6) \qquad \|f - lx\| = \text{minimum},$$

oder aus der Bedingung

$$(4.7) \qquad [\![f - lx]\!] = \text{minimum},$$

zu suchen ist. Die Forderung (4.6) ergibt nach Berechnung die Formel

$$(4.8) \qquad l = \frac{(f, x)}{(x, x)} \equiv \frac{3}{2} \int_{-1}^{+1} x f(x)\, dx.$$

Auf dieselbe Weise erhält man aus (4.7) eine andere Formel:

$$(4.9) \qquad l = \frac{[f, x]}{[x, x]} \equiv \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} f(\sin a) \sin a\, da.$$

Der Kürze halber haben wir in den obigen Formeln gesetzt:

$$(f_1, f_2) = \int_J f_1 f_2\, dx, \qquad [f_1, f_2] = \int_J (1 - x^2)^{-1/2} f_1 f_2\, dx.$$

Nun erhalten wir mit Hilfe der Formeln (4.8) und (4.9) im allgemeinen verschiedene Werte für l. Man fragt, welche Formel bessere numerische Ergebnisse liefert. Wir werden zeigen, daß *für $\varepsilon \to 0$ die Formel* (4.9) *sich als besser erklärt.*

Es ist die Schwingungskreisfrequenz $\omega = 2\pi T^{-1}$ einzuführen. Dann aus (4.2) hat man $\omega_{ap}^2 = 1 + \varepsilon l$, und die Formeln (4.8) und (4.9) liefern uns die folgenden Annäherungen:

$$(4.10) \qquad \omega_{ap}^2 = \frac{3}{2} \int_{-1}^{+1} x g(x)\, dx,$$

$$(4.11) \qquad \omega_{ap}^2 = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} g(\sin a) \sin a\, da,$$

für die Größe $\omega^2 = (2\pi)^2 T^{-2}(g)$. Sogleich erkennt man in (4.11) die gut bekannte erste asymptotische Annäherung, welche man auch mit Hilfe von harmonischer Linearisierung erhält. Darum werden wir im weiteren die Annäherung (4.11) als ω_{as}^2 bezeichnen. Andererseits wird für die Annäherung (4.10) die alte Bezeichnung ω_{ap}^2 gelassen. Es wurde in der Arbeit [5] die folgende Beziehung bewiesen:

$$\omega_{\text{ap}}^2(g) - \omega_{\text{as}}^2 = O(\varepsilon^2) \quad \text{für} \quad \varepsilon \to 0. \tag{4.12}$$

In dieser Arbeit wurde die Funktion $g(x)$ intervallweise stetig angenommen. Die dortigen Erwägungen übertragen sich jedoch direkt auf unseren Fall. Vergleicht man die Formeln (4.10) und (4.11), so hat man, (4.1) wegen, die weitere Beziehung

$$\omega_{\text{ap}}^2 - \omega_{\text{as}}^2 = \text{const} \times \varepsilon, \tag{4.13}$$

wo der Proportionalitätsfaktor im allgemeinen nicht verschwindet.

Jetzt sei vorausgesetzt, daß für irgendeine Charakteristik $g(x)$ der Gestalt (4.1) und für eine gewisse Reihe ε_n, $n = 1, 2, \ldots$, $\varepsilon_n \to 0$, die Annäherung (4.10) der Annäherung (4.11) nicht nachsteht. Streng gesagt heißt das, daß die folgende Ungleichung gilt:

$$|\omega^{(n)2} - \omega_{\text{ap}}^{(n)2}| \leqslant |\omega^{(n)2} - \omega_{\text{as}}^{(n)2}| \quad \text{für} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Dann hat man aus (4.12): $\omega^{(n)} - \omega_{\text{ap}}^{(n)2} = O(\varepsilon_\eta^2)$, und die Triangelungleichung liefert die Beziehung

$$\omega_{\text{ap}}^{(n)2} - \omega_{\text{as}}^{(n)2} = O(\varepsilon_\eta^2). \tag{4.14}$$

Der Ausdruck $\omega_{\text{ap}}^2 - \omega_{\text{as}}^2$ ist aber linear in Bezug auf ε. In Hinsicht auf (4.14) folgt daraus $\omega_{\text{as}}^2 \equiv \omega_{\text{ap}}^2$ identisch, für kleine Werte von ε. Damit haben wir bewiesen, daß wenn $\omega_{\text{as}}^2 \not\equiv \omega_{\text{ap}}^2$ gilt, so steht die Annäherung (4.10) der Annäherung (4.11) nach, wenn ε genügend kleine Werte annimmt.

Für größere Werte von ε betrachten wir das Beispiel mit $g(x) = x + \varepsilon x^3$. Wir wenden die exakten Formeln an:

$$T = 4(1+\varepsilon)^{-1/2} K(k), \quad k^2 = \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)} \quad \text{für} \quad \varepsilon \geqslant 0$$

oder

$$T = 4\sqrt{2}(2+\varepsilon)^{-1/2} K(k), \quad k^2 = \frac{-\varepsilon}{2+\varepsilon} \quad \text{für} \quad \varepsilon \leqslant 0.$$

Durch K haben wir hier das elliptische Integral erster Art bezeichnet. Die angenäherten Formeln (4.10) und (4.11) nehmen in unserem Beispiel die Gestalt

$$\omega_{\text{ap}}^2 = \left(\frac{2\pi}{T_{\text{ap}}}\right)^2 = 1 + \tfrac{3}{5}\varepsilon, \quad \omega_{\text{as}}^2 = \left(\frac{2\pi}{T_{\text{as}}}\right)^2 = 1 + \tfrac{3}{4}\varepsilon,$$

an, unabhängig von den Vorzeichen des ε. In Tafel 1 geben wir etliche numerische Ergebnisse an.

TAFEL 1

ε	T	T_{as}	$e(T_{\mathrm{as}})$	T_{ap}	$e(T_{\mathrm{ap}})$
$-0{,}5$	8,0086	7,948	+0,008	7,510	+0,066
$+1{,}0$	4,7680	4,750	+0,004	4,967	−0,040
$+2{,}0$	4,0043	3,974	+0,008	4,236	−0,055
$+\infty$	$7{,}4163\times\varepsilon^{-1/2}$	$7{,}255\times\varepsilon^{-1/2}$	+0,023	$8{,}111\times\varepsilon^{-1/2}$	−0,986

In dieser Tafel sind die Spalten T, T_{as} und T_{ap} angegeben, mit deren Hilfe der Prozentualfehler der Annäherung $e(T') = (T-T')/T'$ berechnet ist. Außerdem ist eine Zeile mit $\varepsilon\to\infty$ angegeben, welche sich auf asymptotische Verhältnisse bezieht. Die oben gegebenen Formeln liefern nämlich die Beziehungen

$$T\sim 4K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\varepsilon^{-1/2},\qquad T_{\mathrm{as}}\sim\frac{4\pi}{\sqrt{3}}\,\varepsilon^{-1/2},\qquad T_{\mathrm{ap}}\sim 2\pi\sqrt{\tfrac{5}{3}}\,\varepsilon^{-1/2}$$

für $\varepsilon\to\infty$. Nun sehen wir, daß die Linearisierung mit Hilfe der Metrik (1.3) bessere numerische Ergebnisse liefert, als die Linearisierung mit Hilfe der Metrik (1.4).

5. In diesem Punkte wenden wir die bewiesenen Sätze im Falle, wenn die ungerade Funktion $g_{\mathrm{ap}}(x)$ intervallweise linear ist, an, nämlich wenn

$$g_{\mathrm{ap}}(x) = \begin{cases} x & \text{für}\quad 0\leqslant x\leqslant\xi\leqslant 1,\\ k(x-\xi)+\xi & \text{für}\quad \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}\tag{5.1}$$

Dieser Ansatz ist aus der Arbeit [6] direkt angenommen; die Größen k und ξ stellen „freie" Parameter dar. Für $\xi = 0$ erhält man natürlich den früher erwägten Ansatz (4.2).

Wie früher, betrachten wir ungerade quasilineare Charakteristiken $g(x) = x+\varepsilon f(x)$. Wir setzen $k = 1+\varepsilon l$ an und bezeichnen

$$h_\xi(x) = \begin{cases} x-\xi & \text{für}\quad x\geqslant\xi,\\ 0 & \text{für}\quad 0\leqslant x\leqslant\xi,\end{cases}\tag{5.2}$$

wobei $h(-x) = -h(x)$ filt. Dann kann man schreiben

$$g_{\mathrm{ap}}(x) = x+lh_\xi(x).\tag{5.3}$$

Man sieht leicht, daß wenn nur für die Funktion $f(x)$ die Voraussetzung des Punktes 4 gelten und wenn das Parameter l von ε unabhängig ist, dann gehören beide Funktionen $g(x)$ und $g_{\text{ap}}(x)$ zu der Klasse $\Gamma(\sqrt{2})$, für genügend kleine Werte von ε.

Für solche Werte von ε kann man also die Annäherung $T(g) \approx T(g_{\text{ap}})$ betrachten. Wie früher sollen wir hier die Normen $\|f-g_{\text{ap}}\|$ und $[\![g-g_{\text{ap}}]\!]$ untersuchen und für l und ξ die „optimalen" Werte finden. Man hat also die folgenden zwei Aufgaben zu lösen:

$$\|g-g_{\text{ap}}\| = |\varepsilon|\,\|f-lh_\xi\| = \text{minimum}, \tag{5.4}$$

und analog

$$[\![g-g_{\text{ap}}]\!] = |\varepsilon|\,[\![f-lh_\xi]\!] = \text{minimum}. \tag{5.5}$$

Dann sind die Ergebnisse zu prüfen, um festzustellen, welche Norm eine bessere Annäherung $T(g) \approx T(g_{\text{ap}})$ liefert. Nun stellen wir die Berechnungen vor.

Nach elementaren Erwägungen erhält man aus (5.4) die Gleichung

$$l = \frac{(f,\, h_\xi)}{(h_\xi,\, h_\xi)} = \frac{(f,\, h'_\xi)}{(h_\xi,\, 1)}, \tag{5.6}$$

woraus man l und ξ finden soll. Ähnlicherweise bekommen wir aus (5.6) die Gleichung

$$l = \frac{[f,\, h_\xi]}{[h_\xi,\, h_\xi]} = \frac{[f,\, h'_\xi]}{[h_\xi,\, 1]}. \tag{5.7}$$

Wenn jetzt die Werte für l und ξ aus (5.6) oder aus (5.7) gefunden sind, dann ist die Funktion $g_{\text{ap}}(x)$ festgesetzt. Aus (3.1) und (5.3) berechnet man im weiteren:

$$T(g_{\text{ap}}) = 4\sqrt{k}\left\{\pi/2+\sqrt{k}\arcsin\frac{\xi}{c} - \arcsin\frac{\xi}{k+\xi(1-k)}\right\} \tag{5.8}$$

mit $c^2 = (1-\xi)[k+(2-k)\xi]+\xi^2$.

Nun tritt die erste Schwierigkeit hervor. In Hinsicht auf ξ stellen nämlich (5.6) und (5.7) transzendente Gleichungen dar, welche man im allgemeinen nur numerisch lösen kann. Um das zu zeigen, setzen wir im weiteren beispielsweise $f(x) = x^3$. Nach einigen Bechnungen geht dann (5.6) in

$$\xi+2 = \frac{12}{5}\cdot\frac{1-\xi^5}{1-\xi^4} \tag{5.9}$$

über. Für $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ kann man daraus

$$\xi = 0{,}461339\ldots \tag{5.10}$$

finden. (In [6] ist $\xi = 0,4$ angenommen worden). Für l bekommen wir aus (5.6) und (5.10) den Wert

$$l = \frac{(1+\xi)(1+\xi^2)}{1-\xi} = 3{,}286\,629\ldots \tag{5.11}$$

In ähnlicher Weise betrachten wir die Gleichung (5.7). Die Berechnungen sind aber etwas umständlich. Für die Unbekannte ξ bekommt man die Gleichung

$$\xi\eta + 2s(\alpha)\{\eta - (\pi/2-\alpha)\xi\} = \pi/2-\alpha, \tag{5.12}$$

wobei die Bezeichnungen $\xi = \sin\alpha$, $\eta = \cos\alpha$ und

$$s(\alpha) = \Big(\int_\alpha^{\pi/2} \sin^3\alpha d\alpha\Big)^{-1} \int_\alpha^{\pi/2} \sin^4\alpha d\alpha$$

eingeführt sind. Daraus kann man für $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ den Wert

$$\xi = 0{,}495\ldots \tag{5.13}$$

ermitteln. Dann bekommt man für das Parameter l wegen (5.7) die Formel

$$l = \frac{(1-\xi^2)^{1/2} - \frac{1}{3}(1-\xi^2)^{3/2}}{(1-\xi^2)^{1/2} - \pi\xi/2 + \arcsin\xi} = 1{,}870\ldots \tag{5.14}$$

Hier haben wir kurz die Untersuchung der Gleichungen (5.6) und (5.7) vorgeführt. In Tafel 2 sind etliche Ergebnisse angegeben.

TAFEL 2

ε	T	$T_{\text{ap}}^{(1)}$	e_1	$T_{\text{ap}}^{(2)}$	e_2
$-0{,}5$	8,0086	8,054	$-0{,}006$	7,875	$+0{,}017$
$+1{,}0$	4,7680	4,747	$+0{,}004$	4,813	$-0{,}009$
$+2{,}0$	4,0043	3,980	$+0{,}006$	3,977	$+0{,}007$
$+\infty$	$7{,}4163\times\varepsilon^{-1/2}$	$10{,}463\times\varepsilon^{-1/2}$	$-0{,}290$	$10{,}688\times\varepsilon^{-1/2}$	$-0{,}310$

Hier ist die Spalte T direkt aus Tafel 1 genommen. Die Spalte $T_{\text{ap}}^{(1)}$ ist nach den Formeln (5.8), (5.13) und (5.14) berechnet worden. Der Fehler e_1 ist $e_1 = (T - T_{\text{ap}}^{(1)})/T_{\text{ap}}^{(1)}$. Ferner ist die Spalte $T_{\text{ap}}^{(2)}$ mit Hilfe der Formeln (5.8), (5.10) und (5.11) errechnet, worauf die entsprechenden Fehler e_2 kommen.

Wir können jetzt die Spalten für e_1 und e_2 vergleichen; man bemerkt, daß die Fehler e_1 kleiner sind. Die Anwendung der L_C^2-Norm liefert also auch hier bessere numerische Ergebnisse im Vergleich mit der L^2-Norm.

Man soll noch Tafeln 1 und 2 vergleichen. Dabei erhält man höchst zweideutige Resultate. Es scheint, daß der Ansatz (5.1) für quasilineare Charakteristiken der Gestalt $g(x) = x+\varepsilon f(x)$ nicht am glücklichsten angepaßt ist. Zu diesem Problem hoffen wir noch in Zukunft zurückzukommen.

Literaturnachweis

[1] E. J. Ergin, *Transient responce of a non-linear system by a bilinear approximation method*, J. Appl. Mech. 4 (1956), S. 635-641.

[2] Л. В. Канторович, *О дифференциальных уравнениях вида* $x'' = f(x)$, Труды матем. инст. им. В. А. Стеклова 28 (1949), S. 148-151.

[3] A. Krzywicki und A. Rybarski, *On a linearization of an equation of an elastic rod (I)*, Zastosow. Matem. 6 (1962), S. 321-332; *(II)*, ibidem 7 (1964), S. 383-390.

[4] Е. П. Попов и И. П. Пальтов, *Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем*, Москва 1960.

[5] A. Rybarski, *Angenäherte Schwingungsfrequenzformeln für konservative Systeme* (1), Zastosow. Matem. 7 (1964), S. 235-253; (2), ibidem 7 (1964), S. 255-269.

[6] — *Über eine gewisse Linearisationsmethode der Differentialgleichungen vom Pendeltypus*, Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. sci. math, astr. et phys., 6 (1958), S. 175-179.

[7] — *Pewna metoda linearyzacji równań różniczkowych typu równania wahadla*, Zastosow. Matem. 5 (1960), S. 247-259.

[8] — *Linearisation der Differentialgleichungen vom Pendeltypus*, Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. sci. math., astr. et phys., 10 (1962), S. 217-220.

TECHNISCHE HOCHSCHULE WROCŁAW, MATHEMATISCHES INSTITUT
MATHEMATISCHES INSTITUT DER POLNISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Eingegangen am 11. 5. 1965

J. MIKUŠ and A. RYBARSKI (Wrocław)

APPROXIMATE DETERMINATION OF VIBRATION FREQUENCY IN CONSERVATIVE SYSTEMS (3)

SUMMARY

Let $T(g)$ denote the vibration period in the interval $(-1, +1)$ of a conservative system given by the equation $\ddot{y}+g(y) = 0$ (see 3.1). In the paper the continuity of the functional $T(g)$ in certain functional spaces is investigated. It is shown, by appropriate assumptions, that the functional obeys the Hölder condition with respect to the metrics L, L^2 and L_C^2 (see § 3).

As application, a method of approximate determination of $T(g)$ is given consisting in replacing the function g by a function g_{ap} which is linear or piecewise linear. The "free parameters" in the function g_{ap} are chosen so that g_{ap} approximates the function g optimally with respect to L^2 or L^2_C. The norm L^2_C shows in the considered examples better results. It is proved that this holds true for any function $g = x+\varepsilon f$ whenever the parameter ε is sufficiently small.

J. MIKUŚ i A. RYBARSKI (Wrocław)

PRZYBLIŻONE WYZNACZANIE CZĘSTOŚCI DRGAŃ UKŁADÓW ZACHOWAWCZYCH (3)

STRESZCZENIE

Niech $T(g)$ oznacza okres drgań w przedziale $(-1, +1)$ układu zachowawczego, opisanego równaniem $\ddot{y}+g(y) = 0$ (zob. 3.1). W niniejszej pracy bada się ciągłość funkcjonału $T(g)$ w pewnych przestrzeniach funkcyjnych. Przy odpowiednich założeniach pokazano, że funkcjonał ten spełnia warunek Höldera względem metryk L, L^2 i L^2_G (zob. § 3).

Jako zastosowanie, analizowano w pracy metodę przybliżonego obliczania okresu $T(g)$, polegającą na zastąpieniu funkcji g funkcją liniową lub funkcją przedziałami liniową g_{ap}. „Wolne parametry" w funkcji g_{ap} dobiera się tak, by przybliżała ona optymalnie funkcję g w sensie normy L^2 lub L^2_C. W rozważanych przykładach stosowanie normy L^2_C daje lepsze rezultaty. Pokazano, że tak jest zawsze dla funkcji $g = x+\varepsilon f$, jeśli parametr ε jest wystarczająco mały.

Й. МИКУСЬ и А. РЫБАРСКИ (Вроцлав)

ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ (3)

РЕЗЮМЕ

Обозначим через $T(g)$ период колебаний в интервале $(-1, +1)$ консервативной системы заданной уравнением $\ddot{y}+g(y) = 0$(см. 3.1). В работе рассматривается непрерывность функционала $T(g)$ в некоторых функциональных пространствах. Исходя из соответственных предложений, доказано, что этот функционал удовлетворяет условию Гельдера относительно метрик L, L^2 и L^2_C (см. § 3). Как приложение изучается в работе метод приближенного определения периода $T(g)$, в котором функция ∂ заменяется линейной или кусочно — линейной функцией g_{ap}. „Свободные параметры" функции g_{ap} определяются таким образом, чтобы функция g_{ap} в смысле нормы L^2 или L^2_C наилучшим образом аппроксимировала. функцию g. В приведенных примерах норма L^2_C дает лучшие результаты. Доказано, что это справедливо для любой функции $g = x+\varepsilon f$, если параметр ε достаточно мал.
