ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXI (1968)

Die 4-Punkt-Invarianten in der projektiven Geraden über einem Schiefkörper

von W. Benz (Waterloo, Ontario)

In ihrer gemeinsam verfaßten Note [1] haben J. Aczél, S. Gołąb, M. Kuczma und E. Siwek alle 4-Punkt-Invarianten in der reellen projektiven Geraden gegenüber der zugehörigen projektiven Gruppe bestimmt. Weiterhin motivieren sie — über eine Funktionalgleichung — den üblicherweise etwas künstlich als Quotient der einfachen Verhältnisse von zwei Punktetripeln eingeführten Doppelverhältnisbegriff. In der vorliegenden Note bestimmen wir alle 4-Punkt-Invarianten in der projektiven Geraden über einem beliebigen Schiefkörper gegenüber der zugehörigen projektiven Gruppe. Dabei ergibt sich eine Motivierung des hier noch künstlicher anmutenden — bekanntlich als Konjugiertenklassen eingeführten — Doppelverhältnisbegriffs. Reduziert man die vorliegenden Betrachtungen auf den Körper der reellen Zahlen, so erfahren die loc. cit. angegebenen Resultate einen neuen Beweis.

§ 1. Die projektive Gerade über einem Schiefkörper und die zugehörige projektive Gruppe. Ist $\mathfrak{L}$ ein Schiefkörper, so heißen genau die Elemente von $\mathfrak{L}$ und ein weiteres neues Symbol ∞ die Punkte der projektiven Geraden $\boldsymbol{P}(\mathfrak{L})$ über $\mathfrak{L}$. Unter der projektiven Gruppe $\Gamma(\mathfrak{L})$ von $\boldsymbol{P}(\mathfrak{L})$ verstehen wir die von den $\boldsymbol{P}(\mathfrak{L})$-Permutationen

$$\sigma_{a,b}(0 \neq a \in \mathfrak{L},\, b \in \mathfrak{L}): \quad z \to \begin{cases} az+b & \text{für} \quad z \neq \infty, \\ \infty & \text{für} \quad z = \infty; \end{cases}$$

$$\varrho: \quad z \to \begin{cases} \dfrac{1}{z} & \text{für} \quad z \neq 0, \infty, \\ \infty & \text{für} \quad z = 0, \\ 0 & \text{für} \quad z = \infty \end{cases}$$

erzeugte Gruppe. Gilt $0 \neq a \in \mathfrak{L}$, $b \in \mathfrak{L}$, so ist

$$z^{\varrho\sigma_{a^{-1},0}\varrho\sigma_{a^{-1},0}\sigma_{a,b}} = \begin{cases} za+b & \text{für} \quad z \neq \infty, \\ \infty & \text{für} \quad z = \infty. \end{cases}$$

Damit enthält $\Gamma(\mathfrak{L})$ auch das Erzeugnis der Abbildungen ϱ und

$$\sigma'_{a,b}(0 \neq a \in \mathfrak{L}, b \in \mathfrak{L}): \quad z \to \begin{cases} za + b & \text{für} \quad z \neq \infty, \\ \infty & \text{für} \quad z = \infty. \end{cases}$$

Lemma. *$\Gamma(\mathfrak{L})$ ist dreifach transitiv auf $P(\mathfrak{L})$. Genau dann ist $\Gamma(\mathfrak{L})$ scharf dreifach transitiv auf $P(\mathfrak{L})$, wenn $\mathfrak{L}$ kommutativ ist.*

Beweis. a) Sind A, B, C verschiedene Punkte, so zeigen wir zunächst, daß ein $\gamma \in \Gamma(\mathfrak{L})$ existiert mit

$$\infty^\gamma = A, \quad 0^\gamma = B, \quad 1^\gamma = C.$$

Ist hierbei $A = \infty$, so leistet offenbar alles die Abbildung $\sigma_{C-B,B}$. Ist $A \neq \infty$, so gilt

$$\tilde{A} \equiv A^{\sigma_{1,-A}\varrho} = \infty.$$

Also haben wir — da ja doch $\sigma_{1,-A}\varrho$ bijektiv ist — $\tilde{B} = B^{\sigma_{1,-A}\varrho} \neq \infty$, $\tilde{C} \equiv C^{\sigma_{1,-A}\varrho} \neq \infty$. Nach dem schon bewiesenen Teil gibt es ein $\tilde{\gamma} \in \Gamma(\mathfrak{L})$ mit

$$\infty^{\tilde{\gamma}} = \tilde{A}, \quad 0^{\tilde{\gamma}} = \tilde{B}, \quad 1^{\tilde{\gamma}} = \tilde{C}.$$

Also überführt $\tilde{\gamma}\varrho\sigma_{1,A}$ resp. $\infty, 0, 1$ in A, B, C.

b) Seien nun A, B, C verschiedene Punkte und ebenso A', B', C'. Seien $\gamma, \delta \in \Gamma(\mathfrak{L})$ nach a) vorhandene Abbildungen mit

$$\infty^\gamma = A, \quad 0^\gamma = B, \quad 1^\gamma = C; \quad \infty^\delta = A', \quad 0^\delta = B', \quad 1^\delta = C'.$$

Dann gilt mit $\mu \equiv \gamma^{-1}\delta \in \Gamma(\mathfrak{L})$

$$A^\mu = A', \quad B^\mu = B', \quad C^\mu = C'.$$

c) Ist $a \neq 0$ aus $\mathfrak{L}$, so ist

$$\lambda_a: \quad z \to \begin{cases} aza^{-1} & \text{für} \quad z \neq \infty, \\ \infty & \text{für} \quad z = \infty \end{cases}$$

wegen $\lambda_a = \sigma_{a,0}\sigma'_{a^{-1},0}$ eine Abbildung aus $\Gamma(\mathfrak{L})$. Diese inneren Automorphismen sind genau die Abbildungen aus $\Gamma(\mathfrak{L})$, die $\infty, 0, 1$ als Fixpunkte besitzen [3]. Die Gesamtheit der Abbildungen $\sigma_{a,b}$ mit $0 \neq a \in \mathfrak{L}$, $b \in \mathfrak{L}$ bildet eine Untergruppe Σ von $\Gamma(\mathfrak{L})$. Da ϱ involutorisch ist, so besteht Γ gerade aus den Elementen

$$\sigma_0, \ \sigma_1\varrho, \ \sigma_2\varrho\sigma_3, \ \sigma_4\varrho\sigma_5\varrho, \ \ldots$$

und

$$\varrho, \ \varrho\tilde{\sigma}_1, \ \varrho\tilde{\sigma}_2\varrho, \ \varrho\tilde{\sigma}_3\varrho\tilde{\sigma}_4, \ \ldots$$

mit allen Kombinationen $\sigma_i, \tilde{\sigma}_i \in \Sigma$.

Alle Abbildungen dieser Gestalt sind aber von der Form (ergänzt durch Sondervereinbarungen für ∞ usf.)

$$z \to (az+b)(cz+d)^{-1}$$

mit $a, b, c, d \in \mathfrak{L}$, wobei die Bijektivität dieser Abbildungen noch eine Bedingung in den a, b, c, d erzwingt. Ist $c = 0$, so liegt

$$z \to azd^{-1} + bd^{-1}$$

mit $a \neq 0$, $d \neq 0$ vor; ist $c \neq 0$, so liegt

$$z \to (b - ac^{-1}d)(cz + d^{-1}) + ac^{-1}$$

mit $b - ac^{-1}d \neq 0$ vor. Die Abbildungen von $\Gamma(\mathfrak{L})$, die ∞ festlassen, haben also die Gestalt

$$z \to azd^{-1} + bd^{-1}$$

mit $a \neq 0$, $d \neq 0$. Soll eine solche Abbildung nun noch $0, 1$ einzeln festlassen, so hat man — wie behauptet — $b = 0$ und $d = a$.

d) Soll nun weiterhin die Identität die einzige Abbildung aus $\Gamma(\mathfrak{L})$ sein, die $\infty, 0, 1$ einzeln festläßt, so muß nach c)

$$aza^{-1} = z$$

für alle $z \in \mathfrak{L}$, $a \in \mathfrak{L} - \{0\}$ sein. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn $\mathfrak{L}$ kommutativ ist.

§ 2. Doppelverhältnisse. Alle 4-Punkt-Invarianten. Sei $\mathfrak{V}$ die Menge aller geordneten Punktequadrupel A, B, C, D, wo A, B, C, D verschieden und aus $\boldsymbol{P}(\mathfrak{L})$ sind. Ist nun $\mathfrak{W} \neq \emptyset$ eine beliebige abstrakte Menge, so nennen wir

$$f\colon\ \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$$

eine 4-Punkt-Invariante, wenn (sei $(A, B, C, D) \in \mathfrak{V}$, $(A', B', C', D') \in \mathfrak{V}$)

$$f(A, B, C, D) = f(A', B', C', D')$$

immer dann gilt, wenn es ein $\gamma \in \Gamma(\mathfrak{L})$ gibt mit

$$A' = A^{\gamma}, \quad B' = B^{\gamma}, \quad C' = C^{\gamma}. \quad D' = D^{\gamma}.$$

Ist nun $(A, B, C, D) \in \mathfrak{V}$, so sei Δ die Menge aller $\delta \in \Gamma$ mit $A^{\delta} = \infty$, $B^{\delta} = 0$, $C^{\delta} = 1$. Unter dem „Doppelverhältnis“ $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}$ verstehen wir dann die Menge aller $x \in \mathfrak{L}$ mit

$$x = D^{\delta}, \quad \delta \in \Delta.$$

Da (s. § 1) die Abbildungen aus $\Gamma(\mathfrak{L})$ die Gestalt

$$z \to (az+b)(cz+d)^{-1}, \quad a, b, c, d \in \mathfrak{L},$$

haben, so bewirkt sukzessive

$$(\alpha)\ A \to \infty\,, \qquad (\beta)\ B \to 0\,, \qquad (\gamma)\ C \to 1$$

bei einer Λ-Abbildung offenbar das Aussehen

$$z \to c(C-A)(C-B)^{-1}(z-B)(z-A)^{-1}c^{-1}$$

mit $0 \neq c \in \mathfrak{L}$. Dabei sind im Falle $\infty \in \{A, B, C\}$ die Differenzen, die formal ∞ enthalten, wegzulassen. Damir ist $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}$ die Konjugiertenklasse von

$$(C-A)(C-B)^{-1}(D-B)(D-A)^{-1}\,.$$

Ist nun f eine beliebige 4-Punkt-Invariante, so gilt also

$$f(A, B, C, D) = f(\infty, 0, 1, x) \qquad \text{für alle } x \in \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}.$$

Damit kennt man die Funktion $f(A, B, C, D)|\mathfrak{B}$, wenn $\psi(x) \equiv f(\infty, 0, 1, x)$ auf $\hat{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L} - \{0, 1\}$ bekannt ist; wir beachten dabei, daß $\psi(x)$ wirklich auf ganz $\hat{\mathfrak{L}}$ erklärt ist, da zu vorgegebenem $x_0 \in \hat{\mathfrak{L}}$ z.B. $(\infty, 0, 1, x_0) \in \mathfrak{B}$ gilt. Da $\psi(x)$ nun noch (wie gezeigt) auf einer Konjugiertenklasse von $\hat{\mathfrak{L}}$ konstant ist, gehen wir zu einer Funktion $\varphi(\xi)$ über, bei der die Menge der Konjugiertenklassen von $\hat{\mathfrak{L}}$ Definitionsbereich ist,

$$\varphi(\xi) \equiv \psi(x) \qquad \text{für} \qquad x \in \xi\,.$$

Damit ist dann

$$f(A, B, C, D) = \varphi\left(\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}\right)$$

eine Funktion vom Doppelverhältnis $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}$.

Da auf der anderen Seite $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}$ eine 4-Punkt-Invariante ist, so hat man alle 4-Punkt-Invarianten nach dem folgenden Verfahren: Sei $\mathfrak{W} \neq \emptyset$ eine beliebige abstrakte Menge, sei $\mathfrak{S}$ die Menge aller Konjugiertenklassen von $\hat{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L} - \{0, 1\}$. Dann sei φ eine beliebige Abbildung von $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{W}$,

$$\varphi\colon\ \mathfrak{S} \to \mathfrak{W};$$

man setze nun

$$f(A, B, C, D) = \varphi\left(\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}\right).$$

Beispiele. 1. Nimmt man speziell $\mathfrak{S} = \mathfrak{W}$ und für φ die Identität von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{W} = \mathfrak{S}$, so hat man

$$f(A, B, C, D) = \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}.$$

2. Ist $\mathfrak{L}$ eine kommutative Erweiterung des kommutativen Körpers $\mathfrak{K}$, ist $\mathfrak{S} = \mathfrak{L} - \{0, 1\}$ und ist $\mathfrak{W}$ — abgesehen vom 1-Element — die Faktorgruppe $\mathfrak{L}^*/\mathfrak{K}^*$, $\mathfrak{L}^*$ bzw. $\mathfrak{K}^*$ die multiplikative Gruppe von $\mathfrak{L}$ bzw. $\mathfrak{K}$, so hat die 4-Punkt-Invariante von $\boldsymbol{P}(\mathfrak{L})$

$$f(A, B, C, D) = \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} \mathfrak{K}^*$$

geometrische Bedeutung: Es liegt die Messung von Kreiswinkeln vor [2], insbesondere die Messung $\bmod \pi$ im Falle $\mathfrak{L}$ bzw. $\mathfrak{K}$ der komplexe bzw. reelle Zahlkörper.

3. Es sei $\mathfrak{L}$ der Körper der komplexen Zahlen, $\mathfrak{K}$ der der reellen Zahlen. Ist $(A, B, C, D) \in \mathfrak{B}$ und

$$f(A, B, C, D) = \varphi\left(\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} 1 & \text{für } \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} \text{ reell,} \\ 0 & \phantom{\text{für } \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}} \text{ nicht reell,} \end{cases}$$

so hat die 4-Punkt-Invariante f geometrische Bedeutung: Sie gibt die konzyklische (bzw. nicht konzyklische) Lage des Quadrupels $(A, B, C, D) \in \mathfrak{B}$ an.

Literaturverzeichnis

[1] J. Aczél, S. Gołąb, M. Kuczma und E. Siwek, *Das Doppelverhältnis als Lösung einer Funktionalgleichung*, Ann. Polon. Math. 9 (1960), S. 183-187.

[2] W. Benz, *Über Möbiusebenen*, Jber. Deutsch. Math. Verein. 63 (1960), S. 1-27.

[3] — *Nichtkommutative Möbiusgeometrie*, Math. Nachr., im Druck.

Reçu par la Rédaction le 20. 12. 1967