ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXII (1976)

# Fastperiodizitätseigenschaften Dirichletscher Reihen

von H. Bauermeister (Göttingen)

**Zusammenfassung.** Es ist bekannt, daß in der Halbebene gleichmäßiger Konvergenz eine gewöhnliche Dirichletreihe

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s},$$

$0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots$, $\lambda_n \to \infty$, $a_n \in C$, eine analytisch-Bohr-fastperiodische Funktion darstellt. Es wird gezeigt, daß die durch $(*)$ dargestellte Funktion $f$ unabhängig von der Lage der Konvergenzabszisse und vom Wachstum der Exponenten in der Beschränktheitshalbebene analytisch-Bohr-fastperiodisch ist.

Ist $r \geqslant 1$ und $f$ in $\{s \mid s \in C,\ \mathrm{Re}\, s > A_f\}$ holomorph bis auf endlich viele Pole und endlichen Geschlechts, und bleibt

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(a+it)|^r dt\right)^{1/r}$$

für ein $a > A_f$ endlich, so ist $f$ in $\{s \mid s \in C,\ \mathrm{Re}\, s > a\}$ analytisch-$B_r$-fastperiodisch.

Weiter wird gezeigt, daß eine Funktion mit absolut summierbarer Dirichletreihe, deren Exponentenmenge höchstens abzählbar viele Häufungspunkte besitzt, genau auf den Geraden Bohr-fastperiodisch ist, auf denen sie beschränkt und gleichmäßig stetig ist.

Es soll das fastperiodische Verhalten von Dirichletreihen längs vertikaler Geraden untersucht werden. Betrachtet werden gewöhnliche Dirichletreihen und solche, wie Maak [7] sie eingeführt hat. Das fastperiodische Verhalten gibt Aufschluß über die Approximierbarkeit der durch die Reihe dargestellten Funktion $f$ mittels eines Summationsverfahrens und ermöglicht es, die Koeffizienten der Reihe durch Mittelwertbildung zu errechnen. Angestrebt ist die folgende Aussage:

Ist $f$ längs einer vertikalen Geraden $G$ in der Supremums – bzw. Mittelwert – „Norm" endlich, dann ist $f$ in der von $G$ begrenzten rechten Halbebene analytisch-Bohr – bzw. Besicovitch-fastperiodisch.

Für gewöhnliche Dirichletreihen ist diese Aussage leicht nachzuweisen. Bei Maaks Dirichletreihen mußten hier zusätzlich einschränkende Voraussetzungen über die Exponenten gemacht werden.

Zunächst sollen einige Bezeichnungen eingeführt werden. Für $-\infty \leqslant \sigma_1 < \sigma_2 \leqslant \infty$ sei der „Streifen"

$$S(\sigma_1, \sigma_2) := \{s \mid s \in C, \sigma_1 < \operatorname{Re} s < \sigma_2\}.$$

$G_\sigma$ sei die Gerade $\{s \mid s \in C, \operatorname{Re} s = \sigma\}$.

Sind $\sigma_1, \sigma_2$ reell, dann setzen wir

$$S[\sigma_1, \sigma_2] := S(\sigma_1, \sigma_2) \cup G_{\sigma_1} \cup G_{\sigma_2}.$$

Zuerst werden gewöhnliche Dirichletreihen untersucht, i.e. Reihen des Typs

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

mit monoton gegen $\infty$ wachsender Folge positiver reeller Exponenten $(\lambda_n)_{n \in N}$ und beliebigen komplexen Koeffizienten $a_n$. (Es können auch endlich viele negative Exponenten zugelassen werden, da sie das fastperiodische Verhalten der Reihe nicht beeinflussen.) Wird mit $\sigma_c$ die Konvergenzabszisse von $(*)$ bezeichnet, dann stellt $(*)$ in $S(\sigma_c, \infty)$ bekanntlich eine holomorphe Funktion $\tilde{f}$ dar, die eine möglicherweise weiter nach links hinaus definierte meromorphe Fortsetzung $f$ besitzt. Sei

$$A_f := \inf\{\xi \mid \xi \in R, \text{ ist in } S[\xi, \infty) \text{ bis auf endlich viele Pole holomorph, und in } S[\xi, \eta], \eta > \xi \text{ beliebig, gelte mit geeignetem } \varrho \text{ gleichmäßig } f(\sigma + it) = O(|t|^\varrho) \text{ für } |t| \to \infty\},$$

$$H_f := \inf\{\xi \geqslant A_f \mid f \text{ ist in } S(\xi, \infty) \text{ holomorph}\}.$$

Es gilt natürlich $A_f \leqslant H_f \leqslant \sigma_c$.

Carlsson [5] hat eine Erweiterung der Perronformel (Perron [8]) zur Integraldarstellung einer Dirichletreihe angegeben, die in der Holomorphiehalbebene gültig ist:

Sei $\beta > H_f$ und $m \in N$ so gewählt, daß

$$f(\sigma + it) = O(|t|^{m-1} + 1) \text{ gleichmäßig in } S[\beta, \infty)$$

gilt. Seien weiter $l \in R$, $l \geqslant 0$ und $l \neq \lambda_n$ für alle $n \in N$ und $a > 0$ beliebig, dann gilt für $s \in S(\beta, a + \beta)$

$$\sum_{\lambda_n < l} a_n e^{-\lambda_n s} (1 - e^{(\lambda_n - l)a})^m - f(s)$$

$$= \frac{m!\, a^m}{2\pi i} \int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} f(z) \frac{e^{l(z-s)}}{(z-s)(z-s+a) \ldots (z-s+ma)} \, dz.$$

Wir wollen nun das Integral auswerten, das durch Verschiebung des Integrationsweges auf die Gerade $G_\gamma$, $\gamma > A_f$ entsteht.

Sei also $\gamma > A_f$ mit der Eigenschaft, daß auf $G_\gamma$ keine Singularität von $f$ liegt. Außerdem sei $m \in N$ so groß gewählt, daß die $O$-Bedingung gleichmäßig in $S[\gamma, \infty)$ erfüllt ist. Seien $z_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$, die Pole von $f$ in $S[\gamma, \infty)$ mit den Hauptteilen

$$k_\nu(s) = \sum_{\varrho=1}^{r_\nu} \frac{a_{\nu\varrho}}{(s-z_\nu)^\varrho}$$

und $T_0 := \max\limits_{\nu=1,\ldots,n} |\mathrm{Im}\, z_\nu| + 1$.

Außerdem wählen wir ein genügend großes $a > 0$ mit $a + \gamma > \beta$. Den Kern wollen wir abkürzen durch

$$j(z, s, a, l, m) := a^m \cdot m! \frac{e^{l(z-s)}}{(z-s)(z-s+a)\ldots(z-s+ma)}$$

und die Variablen $a$, $l$, $m$ unterdrücken.

Setzt man $f_0 := f - \sum\limits_{\nu=1}^{n} k_\nu$, dann gilt, da $k_\nu(\sigma + it) = O(|t|^{-1})$ gleichmäßig für alle $|t| > T_0$ erfüllt ist, in $S(\beta, a+\gamma)$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f_0(z) j(z, s)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} f_0(z) j(z, s)\, dz.$$

Einen Anteil bei der Verschiebung des Integrationsweges liefern nur die Hauptteile von $f$.

So z. B.

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \frac{j(z, s)}{(z-z_\nu)^\varrho}\, dz - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{j(z, s)}{(z-z_\nu)^\varrho}\, dz$$
$$= \frac{1}{(\varrho-1)!} \left. \frac{d^{\varrho-1} j(z, s)}{dz^{\varrho-1}} \right|_{z=z_\nu} =: P_\varrho(z_\nu, s).$$

$P_\varrho(z_\nu, s)$ hat in $s = z_\nu$ einen Pol $\varrho$-ter Ordnung mit dem Hauptteil $(s-z_\nu)^{-\varrho}$ und läßt sich meromorph in $C$ fortsetzen.

Dies ist daran zu erkennen, daß

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{j(z, s)\, dz}{(z-z_\nu)^\varrho} \quad \text{in } S(\gamma, \infty) \text{ holomorph}$$

und

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \frac{j(z, s)\, dz}{(z-z_\nu)^\varrho} = \frac{1}{(s-z_\nu)^\varrho} \quad \text{ist.}$$

Mit $P(z_\nu, s) := \sum_{\varrho=1}^{r} P_\varrho(z_\nu, s)$ ist daher folgendes Lemma erfüllt:

LEMMA 1. *Sei $f$ die in $S(\sigma_c, \infty)$ durch die Reihe $(*)$ dargestellte Funktion. Wählt man $a, \gamma, l, m$ wie oben, dann gilt für $s \in S(\gamma, \gamma+a)$*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f(z) j(z, s)\, dz = \sum_{\lambda_n < l} a_n e^{-\lambda_n s}(1-e^{(\lambda_n - l)a})^m - f(s) + \sum_{\nu=1}^{n} P(z_\nu, s).$$

*$P(z_\nu, s)$ ist meromorph in $C$ fortsetzbar und hat in $z_\nu$, ($\mathrm{Re}\, z_\nu > \gamma$), einen Pol mit demselben Hauptteil wie $f$, $\nu = 1, \ldots, n$. Es gilt gleichmäßig für $\sigma \in [\gamma, \infty)$ und $|t| > T_0$ $P(z_\nu, \sigma+it) = O(|t|^{-1})$.*

Ist $f$ in $S(\gamma, \infty)$ holomorph, so ist $n = 0$ zu setzen, und die Formel geht in die Carlssonsche über.

Bohr [4] hat folgendes gezeigt: Ist

$$l := \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\log n}$$

$\sigma_u$ die Abszisse der gleichmäßigen Konvergenz von $(*)$, $\sigma_B$ die Abszisse der Holomorphie und Beschränktheit der durch $(*)$ dargestellten Funktion $f$, dann sind drei Fälle möglich.

1. Für $l = \infty$ ist $\sigma_u = \sigma_B$.

2. Für $0 < l < \infty$ kann man in der Reihe $(*)$ Klammern setzen, so daß die geklammerte Reihe auf jeder Geraden $G_\sigma$, $\sigma > \max(\sigma_B, \sigma_c)$, gleichmäßig gegen $f$ konvergiert.

3. Für $l = 0$ existiert ein Beispiel mit $\sigma_B = -\infty$ und $\sigma_u = \infty$.

Hier soll gezeigt werden, daß es stets ein Summationsverfahren gibt, mit dem $f$ gleichmäßig in $S[\xi, \infty)$ für $\xi > \sigma_B$ durch die Reihe $(*)$ approximiert wird.

SATZ 2. *Sei $f$ die durch $(*)$ in $S(\sigma_c, \infty)$ dargestellte Funktion. Für $\sigma_0 > H_f$ sei $f$ auf $G_{\sigma_0}$ beschränkt, dann ist $f$ in $S(\sigma_0, \infty)$ analytisch Bohr fastperiodisch mit der Fourierreihe $(*)$.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$, $\sigma_1 > \sigma_0$ und $a > \sigma_1 - \sigma_0$. Es gilt für $l \neq \lambda_n$, $n \in N$,

$$\left| -f(s) + \sum_{\lambda_n < l} a_n e^{-\lambda_n s}(1-e^{(\lambda_n - l)a})^m \right|$$
$$= \frac{m!\,a^m}{2\pi} \left| \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} f(z) \frac{e^{l(z-s)}}{(z-s)\ldots(z+ma-s)}\, dz \right|$$
$$\leqslant \frac{m!\,a^m}{2\pi} e^{l(\sigma_0 - \sigma_1)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(\sigma_0 + iy)|\, dy}{|\sigma_0 + iy - s| \ldots |\sigma_0 + iy - s + ma|}$$

$$\leqslant \frac{m!\,a^m}{2\pi} \sup_{s \in G_{\sigma_0}} |f(s)|\, e^{l(\sigma_0-\sigma_1)} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\big((\sigma_0-\sigma_1)^2+(y-t)^2\big)^{1/2} \ldots \big((\sigma_0-\sigma_1+ma)^2+(y-t)^2\big)^{1/2}}$$

$$\leqslant \frac{m!\,a^m}{2\pi\delta^{m-1}} e^{l(\sigma_0-\sigma_1)} \cdot \pi \cdot \sup_{s \in G_{\sigma_0}} |f(s)|,$$

mit $\delta := \min(\sigma_1-\sigma_0,\ \sigma_0-\sigma_1+a)$.

Da $\sigma_0-\sigma_1 < 0$ ist, läßt sich $l_0 > 0$ so bestimmen, daß die letzte Zeile der Ungleichung für $l > l_0$ kleiner $\varepsilon$ wird. Die Faktoren $(1-e^{(\lambda_n-l)a})^m$ konvergieren für $l \to \infty$ einzeln gegen 1. Daher ist $f$ auf $G_{\sigma_1}$ Bohr-fastperiodisch mit der Fourierreihe $(*)$. Da die Fourierexponenten $-\lambda_n$ alle negativ sind, kann man $f/G_{\sigma_1}$ analytisch-Bohr-fastperiodisch in die Halbebene $S[\sigma_1, \infty)$ fortsetzen, wobei $(*)$ die Fourier-reihe bleibt. Da $\sigma_1 > \sigma_0$ beliebig war, ist $f$ in $S(\sigma_0, \infty)$ analytisch-Bohr-fastperiodisch.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-s\log n}$ ist in $S(0, \infty)$ konvergent; in $S(0, \frac{1}{2})$ aber sicher nicht Bohr-fastperiodisch, da die Parseval-Gleichung wegen der Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\sigma}}$, $0 < \sigma < \frac{1}{2}$, nicht erfüllt sein kann. Daher ist der Begriff der Bohr-Fastperiodizität zur Charakterisierung von Dirichletreihen in ihrer Konvergenzhalbebene schon zu eng. Es soll deshalb untersucht werden, unter welchen Bedingungen, die durch $(*)$ dargestellte Funktion in die größere Klasse der Besicovitch fastperiodischen Funktionen fällt.

In [1] wurde definiert, wann eine holomorphe Funktion analytisch-$B_r$-fastperiodisch heißen soll. Wir wollen hier Funktionen zulassen, die bis auf endlich viele Pole holomorph sind.

DEFINITION 1. Sei $f: S(\alpha, \beta) \to C$ bis auf endliche viele Pole $z_1, \ldots, z_n$ mit den Hauptteilen $k_1, \ldots, k_n$ holomorph und $r \geqslant 1$. $f$ heiße analytisch-$B_r$-fastperiodisch, wenn $f - \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu$ im Sinne der Definition 3.3 in [1] analytisch-$B_r$-fastperiodisch ist.

Diese Definition ist sinnvoll, da auf jeder Geraden $G_\sigma$, $\sigma \in (\alpha, \beta)$, auf der kein Pol von $f$ liegt

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \Big| \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu(\sigma+it) \Big|^r dt = 0 \quad \text{d.h.}$$

$\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu(\sigma+it) \sim 0$ ist. Die Fourierreihe von $f$ kann daher mit dem üblichen Mittelwertintegral berechnet werden, indem man $f$ in einer Umgebung von $z_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$, durch einen endlichen Wert ersetzt.

Satz 3. *Sei $f$ die in $S(\sigma_c, \infty)$ durch $(*)$ dargestellte Funktion, $r \geqslant 1$ und $\sigma_0 > A_f$ mit der Eigenschaft, daß $G_{\sigma_0}$ keinen Pol von $f$ enthält und*

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(\sigma_0+it)|^r dt < \infty$$

*ist, dann ist $f$ in $S(\sigma_0, \infty)$ analytisch -$B_r$-fastperiodisch mit der Fourierreihe $(*)$.*

**Beweis.** Seien $z_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$, die Pole von $f$ in $S(\sigma_0, \infty)$, $k_\nu$ die zugehörigen Hauptteile und $f_0 := f - \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu$. Wir zeigen, daß für jedes $\sigma_1 > \sigma_0$ $f_0$ auf $G_{\sigma_1}$ $B_r$-fastperiodisch mit der Fourierreihe $(*)$ ist. Berücksichtigt man, daß

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f_0(\sigma+it)|^r dt \qquad \text{für alle } \sigma \geqslant \sigma_0$$

endlich ist, so folgt die Behauptung aus [1], Satz 3.5.

Seien $a \in \boldsymbol{R}$, $m \in \boldsymbol{N}$ so gewählt, daß $a > \sigma_1 - \sigma_0$ und $|f(\sigma_0+it)| \leqslant C(|t|^{m-1}+1)$ ist. Für $l \neq \lambda_n$, $n \in \boldsymbol{N}$, $l \geqslant 0$ und $\operatorname{Re} s = \sigma_1$ gilt dann die Darstellung

$$f(s) - \sum_{\lambda_n<l} a_n e^{-\lambda_n s}(1-e^{(\lambda_n-l)a})^m - \sum_{\nu=1}^{n} P(z_\nu, s)$$
$$= -\frac{a^m \cdot m!}{2\pi i} \int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty} f(z) \frac{e^{l(z-s)}}{(z-s)(z-s+a)\ldots(z-s+ma)} dz.$$

Der vom Hauptteil $k_\nu$ herrührende Anteil $P(z_\nu, s)$ läßt sich zerlegen in

$$P(z_\nu, s) = k_\nu(s) + Q(z_\nu, s),$$

wobei $Q(z_\nu, s)$ in $S(\sigma_0 - \varepsilon_\nu, \infty)$ für geeignetes $\varepsilon_\nu > 0$ holomorph ist und für $|t| = |\operatorname{Im} s| \to \infty$ gleichmäßig $O(|t|^{-1})$ erfüllt. D. h. es gilt

$$f_0(s) - \sum_{\lambda_n<l} a_n e^{-\lambda_n s}(1-e^{(\lambda_n-l)a})^m$$
$$= \sum_{\nu=l}^{n} Q(z_\nu, s) - \frac{a^m \cdot m!}{2\pi i} \int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty} \frac{f(z)e^{l(z-s)}}{(z-s)\ldots(z-s+ma)} dz.$$

Nach [1] Hilfssatz 2.6 ist dann

$$(\ast\!\!\ast)\quad \overline{\lim_{T\to\infty}}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|f_0(\sigma_1+it)-\sum_{\lambda_n<l}a_n e^{-\lambda_n(\sigma_1+it)}(1-e^{(\lambda_n-l)a})^m\right|^r dt\right)^{1/r}$$
$$\leqslant \frac{a^m\cdot m!}{2\pi}\cdot K\cdot e^{l(\sigma_1-\sigma_0)}\,\overline{\lim_{T\to\infty}}\left(\frac{1}{4T}\int_{-2T}^{2T}|f(\sigma_0+it)|^r dt\right)^{1/r},$$

$K$ ist hierbei eine nur von $r$ abhängende Konstante $K_r$ multipliziert mit $\left(\min(\sigma_1-\sigma_0,\ \sigma_0-\sigma_1+a)\right)^{-m}$.

Für $l=0$ und $a:=2(\sigma_1-\sigma_0)$ erhält man

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f_0(\sigma_1+it)|^r dt\right)^{1/r}\leqslant\frac{2^m\cdot m!}{2\pi}K_r\cdot\overline{\lim_{T\to\infty}}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(\sigma_0+it)|\,dt\right)^{1/r}.$$

Zu $\varepsilon>0$ kann man $l>0$, $l\neq\lambda_\nu$, $\nu\in\boldsymbol{N}$ so wählen, daß die rechte Seite der Ungleichung ($\ast\!\!\ast$) kleiner als $\varepsilon$ wird. Das bedeutet aber, $f_0$ ist auf $G_{\sigma_1}$ $B_r$-fastperiodisch mit der Fourierreihe ($\ast$). Anwendung von [1], Satz 3.5 vollendet den Beweis.

Als Beispiel zur Illustration des Satzes läßt sich die Riemannsche $\zeta$-Funktion anführen. Deren Dirichletentwicklung $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$ konvergiert bekanntlich in $S(1,\infty)$ absolut. Die $\zeta$-Funktion ist daher in $S(1,\infty)$ analytisch Bohr-fastperiodisch. $\overline{\lim_{T\to\infty}}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\zeta(\sigma+it)|^2 dt\right)^{1/2}$ ist für $\sigma\in(\frac{1}{2},1)$ endlich (Titchmarsh [9]). Deshalb ist $\zeta$ in $S(\frac{1}{2},\infty)$ analytisch $B_2$-fastperiodisch.

Es soll noch untersucht werden, wann eine Dirichletreihe, wie Maak [7] sie definiert hat, Bohr-fastperiodisch ist. Tzeng [10] hat gezeigt, daß eine solche Reihe in ihrer „Konvergenzhalbebene" stets analytisch-$B_2$-fastperiodisch ist. Wolf [11] hat einen Satz bewiesen, der es gestattet bei speziellen Exponentenverteilungen auf Bohr-Fastperiodizität zu schließen.

DEFINITION 2. Sei

$$(0)\qquad \sum_{\lambda>0}a(\lambda)\lambda^{-s}$$

eine formale Reihe, in der $a(\lambda)\in\boldsymbol{C}$ für höchstens abzählbar viele Werte von $\lambda$ von Null verschieden ist. (0) heißt in $S(K,\infty)$, $K>0$, absolut summierbar, wenn es eine Funktion $\gamma:\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{R}\to[0,1]$ gibt mit den Eigenschaften:

1. für jedes $\nu\in\boldsymbol{N}$ ist $\gamma(\nu,\lambda)$ nur für endlich viele $\lambda$ von Null verschieden, und für $\lambda\in\boldsymbol{R}$, $\lambda>0$, mit $a(\lambda)\neq0$ folgt $\lim_{\nu\to\infty}\gamma(\nu,\lambda)=1$.

2. Ist $L \subset S(K, \infty)$ ein Kompaktum, dann konvergiert die Folge

$$\varphi_\nu(u, s) := \sum_{\lambda>0} \gamma(\nu, \lambda) a(\lambda) \lambda^{-s} e^{i\lambda u}$$

für $\nu \to \infty$ gleichmäßig auf $\boldsymbol{R} \times L$. (Man sagt, die Grenzfunktion $\varphi$ besitze eine absolut summierbare Dirichletreihe in $S(K, \infty)$.)

Die hier interessierende Funktionenklasse ist festgelegt durch die

Definition 3. Sei $K > 0$. $\varphi : \boldsymbol{R} \times S(K, \infty) \to \boldsymbol{C}$ gehört zu $D(K)$, wenn $\varphi$ in $S(K, \infty)$ eine absolut summierbare Dirichletreihe besitzt und es zu jedem Tripel $(\vartheta, \sigma_1, \sigma_2)$ mit $0 < \vartheta < \pi/2$, $K < \sigma_1 < \sigma_2$, eine Zahl $C > 0$ gibt, so daß in $\boldsymbol{R} \times S[\sigma_1, \sigma_2]$ für alle $\nu \in \boldsymbol{N}$, $t = \operatorname{Im} s$, gilt

$$|\Gamma(s) \cdot \varphi_\nu(u, s)| \leqslant C e^{-\vartheta|t|}.$$

Aus der Konvergenzforderung an die $\varphi_\nu$ folgt, daß $\varphi$ bzgl. der ersten Variablen eine Bohr-fastperiodische Funktion ist. Deshalb ist die absolut summierbare Dirichletreihe einer Funktion eindeutig bestimmt; d.h. besitzt $\varphi$: $\boldsymbol{R} \times S(K, \infty)$ in $S(K, \infty)$ die absolut summierbare Dirichletreihe $\sum_{\lambda>0} a(\lambda)\lambda^{-s}$ und in $S(K', \infty)$ für $K' \geqslant K$ die Reihe $\sum_{\lambda>0} b(\lambda)\lambda^{-s}$, dann ist $\sum_{\lambda>0} b(\lambda)\lambda^{-s}$ auch in $S(K, \infty)$ absolut summierbar und es gilt für alle, $\lambda > 0$, $a(\lambda) = b(\lambda)$.

Satz 4. *Sei $\varphi \in D(K)$, $K > 0$, mit der absolut summierbaren Dirichletreihe $\sum_{\lambda>0} a(\lambda)\lambda^{-s}$. Diese habe die Eigenschaft, daß der Abschluß von $S_\varphi := \{\log \lambda \mid \lambda > 0, a(\lambda) \neq 0\}$ in $\boldsymbol{R}$ abzählbar ist. $\varphi(u, \cdot)$ ist genau dann in $S(K, \infty)$ analytisch Bohr-fastperiodisch, wenn $\varphi(u, \cdot)$ längs jeder Geraden $G_\sigma$, $\sigma > K$, beschränkt und entweder*

(a) *$S_\varphi$ beschränkt oder,*

(b) *$\varphi(u, \cdot)$ gleichmäßig stetig auf $G_\sigma$ für alle $\sigma > K$ ist.*

Beweis. Um den Satz von Wolf [11] anwenden zu können, muß nur gezeigt werden, daß es zu festem $u \in \boldsymbol{R}$ und $\sigma_0 > K$ eine Folge trigonometrischer Polynome $(\psi_\nu)_{\nu \in \boldsymbol{N}}$, $\psi_\nu$: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{C}$, gibt, die gleichmäßig auf jedem Kompaktum in $\boldsymbol{R}$ gegen $\psi(u, \cdot)/G_{\sigma_0}$ konvergiert und mit geeigneten $M > 0$, $r > 0$, der Abschätzung

$$|\psi_\nu(t)| \leqslant M_r(1 + |t|^r)$$

für alle $\nu \in \boldsymbol{N}$ genügt.

Tzeng [10] hat gezeigt, daß für alle $u \in \boldsymbol{R}$ und $\sigma_1, \sigma_2$ mit $K < \sigma_1 < \sigma_2$ gleichmäßig in $S[\sigma_1, \sigma_2]$ für $|t| \to \infty$

$$\varphi(u, \sigma + it) = O(|t|^{1/2})$$

gilt. Diese Abschätzung ist aber auch gleichmäßig in $u \in \boldsymbol{R}$ wie man dem Beweis des Satzes von Hardy–Ingham–Pólya [6] entnimmt.

Für jedes $s \in S(K, \infty)$ ist $\varphi(\cdot, s)$ Bohr-fastperiodisch auf $\boldsymbol{R}$ mit der Fourierreihe $\sum\limits_{\lambda>0} a(\lambda)\lambda^{-s}e^{i\lambda u}$. Daher gibt es eine Folge von Bochner–Fejérschen Kernen $(K_\nu)_{\nu\in\boldsymbol{N}}$ ($K_\nu$: $\boldsymbol{R}\to\{t\in\boldsymbol{R}|\ t\geqslant 0\}$, siehe Besicovitch [3]) mit der Eigenschaft, daß für jedes $s\in S(K, \infty)$ die Folge $\big(\psi_\nu(\cdot, s)\big)_{\nu\in\boldsymbol{N}}$,

$$\psi_\nu(u, s) := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \varphi(u+\tau, s) K_\nu(\tau)\,d\tau,$$

gleichmäßig auf $\boldsymbol{R}$ gegen $\varphi(\cdot, s)$ konvergiert.

$\psi_\nu(u, \sigma+it)$ ist in $t$ ein trigonometrisches Polynom der Gestalt

$$\psi_\nu(u, s) = \sum_{\lambda>0} \bar{\gamma}(\nu, \lambda) a(\lambda)\lambda^{-s}e^{i\lambda u}.$$

Außerdem gilt in jedem Intervall $[\sigma_1, \sigma_2]$, $K<\sigma_1<\sigma_2$,

$$\begin{aligned}|\psi_\nu(u, \sigma+it)| &\leqslant \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\varphi(u+\tau, \sigma+it)| K_\nu(\tau)\,d\tau \\ &\leqslant C_{\sigma_1,\sigma_2}(|t|^{1/2}+1) \qquad \text{für } \sigma\in[\sigma_1, \sigma_2]\end{aligned}$$

und alle $\nu\in\boldsymbol{N}$, wenn $C_{\sigma_1,\sigma_2}$ so gewählt ist, daß

$$|\varphi(u, \sigma+it)| \leqslant C_{\sigma_1,\sigma_2}(|t|^{1/2}+1) \qquad \text{für } \sigma\in[\sigma_1, \sigma_2] \text{ ist.}$$

Daher ist die Folge $\big(\psi_\nu(u, \cdot)\big)_{\nu\in\boldsymbol{N}}$ in jedem Kompaktum in $S(K, \infty)$ gleichmäßig beschränkt und konvergiert punktweise gegen $\varphi(u, \cdot)$. Aus einem Satz vom Vitalischen Typ (Behnke–Sommer [2], S. 166, Satz 51a) folgt dann die gleichmäßige Konvergenz auf jedem Kompaktum. Somit ist $\varphi(u, \cdot)$ auf jeder Geraden $G_{\sigma_0}$, $\sigma_0 > K$, Bohr fastperiodisch. Da $\varphi(u, \cdot)$ endlichen Geschlechts ist, liefert der Satz von Phragmén–Lindelöf die behauptete analytisch-Bohr-Fastperiodizität.

### Literatur


[1] H. Bauermeister, *Holomorphe im Sinne Besicovitchs fastperiodische Funktionen*, Nachrichten der A. d. W. Göttingen, II. Math.-Phys. Klasse, Nr. 5 (1972).

[2] H. Behnke und F. Sommer, *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*, 3. Auflage, Berlin, Heidelberg, New York 1965.

[3] A. S. Besicovitch, *Almost periodic functions*, Cambridge 1932.

[4] H. Bohr, *A study on the uniform convergence of Dirichlet series and its connection with a problem concerning ordinary polynomials*, Fysiogr. Sallsk. Förh. 21, no. 12 (1951), S. 105–118.

[5] F. Carlsson, *Contribution à la théorie des séries de Dirichlet*, Note I, Archiv f. Mathematik, Astronomi och Fysik, Bd. 16, No. 18 (1922).

[6] G. H. Hardy, A. E. Ingham and G. Pólya, *Theorems concerning mean values of analytic functions*, Royal Math. Soc. London 113 (1934), S. 542–569.

[7] W. Maak, *Dirichletreihen mit Funktionalgleichung*, Nachrichten der A. d. W. Göttingen, II. Math.-Phys. Klasse Nr. 10 (1968).

[8] O. Perron, *Zur Theorie Dirichletscher Reihen*, Journal für Mathematik Bd. 134 (1908), S. 95–134.
[9] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, Oxford 1951.
[10] Ch.-H. Tzeng, *Absolut-summierbare Dirichletreihen*, Diss. Göttingen, 1973.
[11] F. Wolf, *Approximation by trigonometrical polynomials and almost periodicity*, Proc. L. M. S. II, Vol. 44 (1938), S. 100–114.

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

*Reçu par la Rédaction le 12. 11. 1973*