

L. ŁUKASZEWICZ i P. SZEPTYCKI (Warszawa)

*ELEKTRONOWY INTEGRATOR  
ROWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH ELI*

**1. Wstęp.** Równania Poissona i biharmoniczne występują w bardzo wielu zagadnieniach techniki. Równanie Poissona ma podstawowe znaczenie w teorii skręcania prętów, ugięcia membrany, przewodnictwa cieplnego, potencjału elektrycznego, w hydrodynamice i aerodynamice itd. Równanie biharmoniczne jest podstawowym równaniem teorii ugięcia płyt cienkich. Rozwiązanie tych równań, jak również wielu zagadnień pokrewnych, nastęrcza na ogół wiele trudności; już w przypadkach nieco bardziej skomplikowanych traktowanie ich metodami rachunkowymi zabiera dużo czasu. Aby ominąć te trudności, buduje się elektronowy integrator równań cząstkowych (w skrócie ELI), który pozwoli na stosunkowo łatwe i szybkie znajdowanie rozwiązań wspomnianych równań z dokładnością wystarczającą do większości zagadnień techniki.

Aby ułatwić czytelnikowi zrozumienie zasady integratora, przypominaemy w rozdziałach 2 i 3 niektóre wiadomości o równaniu Poissona i o jego przybliżonym rozwiązywaniu metodą różnic skończonych.

**2. Równanie Poissona.** Dla większej przejrzystości ograniczymy się w tym artykule do zagadnień płaskich. Wszystkie podane rozważania przenoszą się bez istotnych zmian na przestrzeń o trzech i więcej wymiarach.

Dla równania Poissona

$$(2.1) \quad \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

i obszaru  $G$  o brzegu  $\Gamma$  formuluje się następujące zagadnienie: Znaleźć funkcję  $u$  spełniającą we wnętrzu  $G$  równanie (2.1), ciągłą na  $G + \Gamma$  i spełniającą na brzegu  $\Gamma$  warunek

$$(2.2) \quad a(x, y)u(x, y)|_{\Gamma} + b(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = c(x, y),$$

gdzie  $a, b, c$  są funkcjami danymi, a  $\partial u / \partial n$  oznacza pochodną funkcji  $u$  w kierunku normalnym do  $\Gamma$ .

Równanie (2.2) nazywa się *warunkiem brzegowym nałożonym na  $u$* . Gdy  $b=0$ , mówimy o *warunku brzegowym pierwszego rodzaju* lub *zagadnieniu Dirichleta*, gdy  $a=0$  — o *warunku brzegowym drugiego rodzaju* lub *zagadnieniu Neumanna*, wreszcie, gdy  $a \neq 0, b \neq 0$ , o *warunku brzegowym trzeciego rodzaju*.

Wiadomo, że tylko niektóre obszary i warunki brzegowe prowadzą do rozwiązań w postaci analitycznej. Zwykle jest możliwe tylko rozwiązanie numeryczne, które nastęrczą poważne trudności, jeśli wymaga się dużej dokładności lub jeśli trzeba obliczyć wartości  $u$  w wielu punktach. Jedną z najprostszych metod numerycznych i najczęściej chyba stosowaną jest *metoda różnic skończonych* zwana niekiedy *metodą siatek*.

**3. Metoda różnic skończonych.** Metoda różnic skończonych dla funkcji dwu lub więcej zmiennych stanowi naturalne uogólnienie tej metody dla funkcji jednej zmiennej, przypomnimy więc najpierw jej zasadę ograniczając się dla prostoty do podziałów na odcinki o jednakowej długości.

Niech  $f(x)$  będzie funkcją zmiennej rzeczywistej  $x$  określoną w przedziale  $\langle a, b \rangle$ . Podzielmy przedział  $\langle a, b \rangle$  na  $N$  równych odcinków o długości  $h$ . Punkty podziału mają więc współrzędne

$$x_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{N}, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Oznaczmy  $f_i = f(x_i)$ . Iloraz różnicowy pierwszego rzędu funkcji  $f$  w punkcie  $x_i$  określamy wzorem

$$\Delta f_i = \frac{1}{h} (f_{i+1} - f_i).$$

Podobnie definiujemy ilorazy różnicowe wyższych rzędów; np. iloraz różnicowy rzędu drugiego określamy wzorem

$$\Delta^2 f_i = \frac{1}{h} (\Delta f_i - \Delta f_{i-1}) = \frac{1}{h^2} (f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i).$$

Jeśli funkcja  $f$  jest  $n$ -krotnie różniczkowalna w punkcie  $x$ , to

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Delta^n f_i = f^{(n)}(x_i).$$

Widać stąd, że dla dostatecznie małych  $h$  ilorazy różnicowe z dowolną dokładnością aproksymują odpowiednie pochodne. Oszacowanie dokładności tego przybliżenia można znaleźć w pracy Kantorowicza i Krylowa [3].

Idea zastosowania metody różnic skończonych do równań różniczkowych z warunkami brzegowymi polega na zastąpieniu pochodnych występujących w tych równaniach przez odpowiednie ilorazy różnicowe,

dzięki czemu równanie różniczkowe (lub układ równań różniczkowych) sprowadza się do układu równań algebraicznych. W ten sposób otrzymujemy układ równań algebraicznych, w których jako niewiadome występują wartości nieznannej funkcji  $y$  w punktach podziału. Otrzymujemy przy tym, z uwagi na warunek brzegowy, ilość równań równą ilości niewiadomych. Wartości otrzymane z rozwiązania tych równań interpolujemy np. za pomocą wielomianu. Przy dostatecznie małym  $h$  otrzymana w ten sposób funkcja aproksymuje z dowolną dokładnością rozwiązanie ściśle. Oszacowanie dokładności można znaleźć w pracy [3].

Jak już wspomnieliśmy, metoda różnic skończonych dla funkcji dwu lub więcej zmiennych jest prostym uogólnieniem tej metody dla funkcji jednej zmiennej.

Dla uproszczenia ograniczymy się na razie do siatek kwadratowych płaskich. Analogiczne rozważania są słuszne dla siatek przestrzennych oraz dla siatek regularnych płaskich, tzn. siatek trójkątnych, rombów i sześciokątnych.

Przypuśćmy, że w obszarze płaskim  $G$  jest określona funkcja  $f(x, y)$ . Obszar  $G$  pokrywamy siatką kwadratową o boku  $h$ , którą dobieramy dla prostoty tak, by współrzędne jej węzłów były postaci  $(ih, jh)$ , gdzie  $i$  i  $j$  są liczbami całkowitymi.

Oznaczmy  $f_{ij} = f(ih, jh)$ . Podobnie jak w przypadku funkcji jednej zmiennej określamy ilorazy różnicowe pierwszego, drugiego i wyższych rzędów:

$$\Delta_i f_{ij} = \frac{1}{h} (f_{i+1,j} - f_{ij}), \quad \Delta_i^2 f_{ij} = \frac{1}{h^2} (f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 2f_{ij}),$$

$$\Delta_j f_{ij} = \frac{1}{h} (f_{i,j+1} - f_{ij}), \quad \Delta_j^2 f_{ij} = \frac{1}{h^2} (f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{ij}) \dots \text{itd.}$$

Tak samo jak w przypadku jednej zmiennej ilorazy te aproksymują odpowiednie pochodne.

Kombinując ze sobą podane ilorazy różnicowe można budować odpowiedniki różnych operatorów różniczkowych, zwane często *przybliżeniami różnicowymi* tych operatorów. Tak np. przybliżenie różnicowe operatora Laplace'a funkcji  $f$  ma postać

$$\nabla_h^2 f_{ij} = \Delta_i^2 f_{ij} + \Delta_j^2 f_{ij} = \frac{1}{h^2} (f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 4f_{ij}).$$

Jest rzeczą jasną, że przy funkcjach dostatecznie regularnych, przybliżenia różnicowe operatorów różniczkowych aproksymują te operatory; tak np.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \nabla_h^2 f_{ij} = \nabla^2 f(ih, jh).$$

Metoda różnic skończonych pozwala na przybliżone rozwiązywanie np. równania Poissona z różnymi warunkami brzegowymi. Podobnie bowiem jak w przypadku równania zwyczajnego, zastępując pochodne przez odpowiednie ilorazy różnicowe możemy równanie Poissona przybliżyć przez układ równań algebraicznych liniowych

$$(3.1) \quad \nabla_h^2 u_{ij} = f_{ij}.$$

Pozostaje wyrazić warunek brzegowy w różnicach skończonych. Zakładamy, że punkty brzegowe siatki pokrywającej obszar leżą na brzegu obszaru.

Warunek (2.2) można napisać w różnicach skończonych zastępując

$$\begin{array}{llll} a(x, y) & \text{przez} & a_{ij}, & \text{czyli przez } a(ih, jh), \\ b(x, y) & \text{„} & b_{ij}, & \text{„} \text{ „ } b(ih, jh), \\ c(x, y) & \text{„} & c_{ij}, & \text{„} \text{ „ } c(ih, jh), \\ u(x, y) & \text{„} & u_{ij}, & \text{„} \text{ „ } u(ih, jh) \end{array}$$

oraz

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta(x, y) \quad \text{przez} \quad \frac{\Delta u_{ij}}{\Delta n},$$

czyli przez

$$\Delta_i u_{ij} \cos \alpha_{ij} + \Delta_j u_{ij} \cos \beta_{ij},$$

gdzie przez  $\alpha(x, y)$ ,  $\beta(x, y)$  oznaczono kąty, które tworzy wektor normalny do  $\Gamma$  w punkcie  $(x, y)$  z osiami  $x$  i  $y$ , a przez  $\alpha_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$  kąty, które tworzy wektor normalny do  $\Gamma$  w punkcie  $(ih, jh)$  z osiami  $x$  i  $y$ .

Warunek (2.2) przybiera zatem postać

$$(3.2) \quad a_{ij} u_{ij} + b_{ij} (\Delta_i u_{ij} \cos \alpha_{ij} + \Delta_j u_{ij} \cos \beta_{ij}) = c_{ij}.$$

A więc dla każdego punktu leżącego we wnętrzu  $G$  mamy równanie (3.1), dla każdego zaś punktu brzegowego — równanie (3.2), czyli łącznie tyle równań, ile niewiadomych. Z równań tych znajdujemy przybliżone wartości rozwiązań w węzłach siatki pokrywającej obszar  $G$ . Interpolując te wartości, np. za pomocą wielomianów, otrzymujemy rozwiązanie w całym obszarze  $G$ . Można wykazać (por. [3], gdzie podane są również odpowiednie oszacowania), że przy  $h$  zmierzającym do zera otrzymane w ten sposób rozwiązanie jest jednostajnie zbieżne do rozwiązania dokładnego.

**4. Realizacja elektryczna równania Poissona.** Równanie Poissona ma prostą interpretację elektryczną, która stanowi punkt wyjścia dla wielu jego realizacji.

Przypuśćmy, że dany jest obszar płaski  $G$  z przewodnika jednorodnego o przewodności właściwej równej 1. Niech  $u(x, y)$  oznacza potencjał elektrostatyczny w punkcie  $(x, y)$  tego przewodnika. Wektor gęstości

prądu w punkcie  $(x, y)$  jest, jak wiadomo, określony przez wzór wyrażający prawo Ohma:

$$I = -\operatorname{grad} u = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Rozpatrzmy dowolny element powierzchniowy  $s$  obszaru  $G$ . Całkowity prąd dopływający z zewnątrz do elementu  $s$  wynosi

$$I(s) = \iint_s \operatorname{div} I dx dy = \iint_s \nabla^2 u(x, y) dx dy.$$

Oznaczmy przez  $f(x, y)$  gęstość prądu dopływającego do punktu  $(x, y)$ ;

$$f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{s \rightarrow (x, y)} \frac{I(s)}{|s|}.$$

Na mocy twierdzenia o wartości średniej całki otrzymujemy z tych zależności równość

$$\nabla^2 u(x, y) = f(x, y).$$

Równanie Poissona wyraża zatem zależność między potencjałem  $u$  a gęstością prądu dopływającego do obszaru, a mianowicie: laplasjan potencjału w każdym punkcie jest równy gęstości prądu dopływającego z zewnątrz do tego punktu.

Pochodną normalną  $\partial u / \partial n$  w punkcie brzegowym interpretuje się jako gęstość prądu dopływającego z zewnątrz do tego punktu. Warunek brzegowy

$$a(x, y)u|_r + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial n}|_r = c(x, y)$$

oznacza zachodzenie odpowiedniej zależności między potencjałem w punkcie brzegowym a gęstością prądu dopływającego do tego punktu. Np. warunek brzegowy pierwszego rodzaju określa rozkład potencjału na brzegu, warunek drugiego rodzaju — rozkład gęstości prądu dopływającego.

Zupełnie podobnie można interpretować równanie Poissona jako równanie ustalonego rozkładu temperatury w jednorodnym obszarze  $G$  przewodzącym ciepło. Jeśli np. na brzegu obszaru  $G$  dany jest rozkład temperatury  $\varphi(x, y)$  oraz wiadomo, że gęstość ciepła dopływającego z zewnątrz do punktu  $(x, y)$  wnętrza  $G$  jest równa  $f(x, y)$ , to ustalona temperatura  $u$  we wnętrzu  $G$  spełnia równanie  $\nabla^2 u = f(x, y)$  z warunkiem brzegowym  $u|_r = \varphi(x, y)$ . A więc zjawiska fizyczne rozkładu napięć i rozkładu temperatur na obszarze przewodzącym wyrażają się (są opisane) tym samym równaniem. O takich zjawiskach mówimy, że są *podobne* albo też, że np. zjawisko rozkładu napięć jest *elektryczną analogią* rozkładu temperatur.

Analogia polega na tym, że oba te zjawiska są realizacjami tego samego równania, a mianowicie równania Poissona.

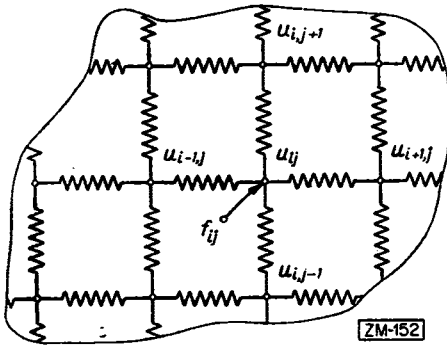
Podaną realizację elektryczną równania Poissona niejednokrotnie wykorzystywano do jego numerycznego rozwiązania. Przy zagadnieniach płaskich postępowano np. w ten sposób, że dla obszaru  $G$ , dla którego należało rozwiązać równanie, wycinano jego model, np. z cynfolii, a następnie przyjmując w odpowiedni sposób wartości napięć i prądów na brzegu mierzono rozkład potencjału we wnętrzu. Do zagadnień przestrzennych używano wanien elektrolitycznych lub rtęciowych o odpowiednim kształcie, w których rozkład napięć mierzono za pomocą odpowiednio zbudowanej sondy.

Metoda ta okazała się niedogodna przede wszystkim ze względu na trudności pomiarowe, tak że wkrótce zastąpiono ją przez metodę polegającą na przejściu od ciągłego przewodnika płaskiego do siatek przewodników skupionych, zwanych w literaturze *siatkami Gierszgorina*.

Z matematycznego punktu widzenia przejściu temu, jak to będzie dalej pokazane, odpowiada przejście od dokładnego równania Poissona do jego przybliżenia różnicowego.

**5. Realizacja elektryczna przybliżeń różniczkowych równania Poissona.** Interpretację elektryczną równania Poissona o różnicach skończonych dla siatek kwadratowych można uzyskać rozpatrując rozkład

potencjałów na siatce oporowej kwadratowej. Schemat wycinka takiej siatki podano na rysunku 1.



Rys. 1. Wycinek siatki oporowej. Prąd doprowadzony z zewnątrz do punktu  $(i, j)$  wynosi  $f_{ij}$

Założmy, że w siatce na rysunku 1 wszystkie opory są jednakowe i równe  $r$ . Węzły siatki numerujemy (obierając odpowiednio układ współrzędnych) parami liczb całkowitych  $i, j$ .

Niech  $u_{ij}$  będzie potencjałem w węźle o współrzędnych  $i, j$ , a  $f_{ij}$  prądem dopływającym do tego węzła z zewnątrz. Prąd dopływający do węzła  $(i, j)$  z węzła  $(i+1, j)$  jest rów-

ny  $(u_{i+1,j} - u_{ij})/r$ . Analogicznie, prądy dopływające z pozostałych sąsiadnych węzłów są odpowiednio równe

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{r}, \quad \frac{u_{i,j-1} - u_{ij}}{r}, \quad \frac{u_{i-1,j} - u_{ij}}{r}.$$

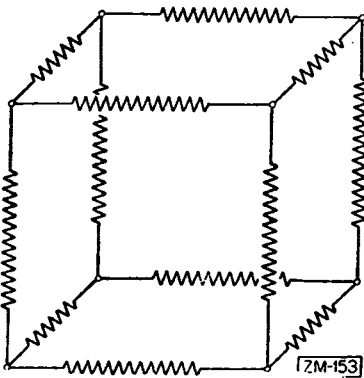
Na mocy prawa Kirchhoffa suma wszystkich prądów dopływających do jednego punktu jest równa zero. Stąd mamy

$$(5.1) \quad \frac{1}{r} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+2} + u_{i,j-2} - 4u_{ij}) = \varphi_{ij}.$$

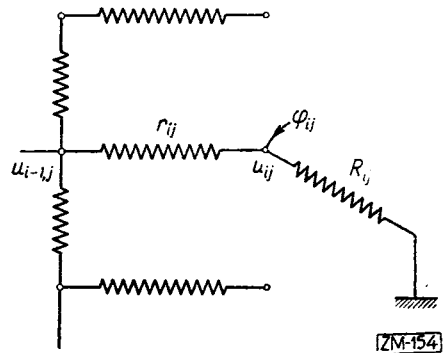
Z porównania wzoru (5.1) ze wzorem (3.1) jest widoczne, że rozkład napięć w węzłach siatki oporowej kwadratowej spełnia przybliżenie różnicowe równania Poissona. Mówimy także, że rozkład napięć w węzłach siatki oporowej jest realizacją elektryczną rozwiązania różnicowego przybliżenia równania Poissona.

Na tym właśnie opierają się analizatory równania Poissona. Ideę takiego analizatora podał w roku 1926 Gierszgorin [1].

Tak samo jak dla przykładu płaskiego, można budować siatki oporowe przestrzenne (rys. 2).



Rys. 2. Elementarny prostopadłościan siatki oporowej przestrzennej



Rys. 3. Realizacja warunków brzegowych

Podobnie jak dla modeli ciągłych (rozd. 4), można dla siatek oporowych podać elektryczną interpretację (realizację) warunków brzegowych. Schemat takiej realizacji w przypadku, gdy brzeg obszaru jest prostopadły do linii siatki, podano na rysunku 3.

Na mocy prawa Kirchhoffa spełnione jest równanie (potencjał ziemi przyjmujemy za zero)

$$(5.2) \quad \frac{u_{ij} - u_{i-1,j}}{r_{ij}} + \frac{u_{ij}}{R_{ij}} = \varphi_{ij}.$$

Porównując równanie (5.2) z warunkiem (3.2) oraz przyjmując  $a_{ij} = 1/R_{ij}$  i  $b_{ij} = 1/r_{ij}$  widzimy, że spełniony jest warunek (3.2). W przypadku  $R_{ij} = \infty$  otrzymuje się warunek brzegowy drugiego rodzaju.

Podamy tu jeszcze, pożyteczną w niektórych zastosowaniach, elektryczną interpretację przejścia od ciągłego przewodnika płaskiego do siatki oporowej.

Zastąpieniu płaskiego przewodnika przez siatkę oporową odpowiada podział tego przewodnika na prostokąty i następnie zastąpienie wartości charakteryzujących własności elektryczne poszczególnych prostokątów przez ich wartości średnie, „skupione” w odpowiednich węzłach siatki (rys. 4).

Tak np. w przypadku przedstawionym na rysunku 4 potencjał w węzle  $(i, j)$  i prąd dopływający do tego węzła odpowiadają prądom i potencjałom średnim dla całego prostokąta. Mamy więc

$$(5.3) \quad u_{ij} = \frac{1}{|S|} \iint_S u(x, y) dx dy,$$

$$(5.4) \quad I_{ij} = \frac{1}{|S|} \iint_S I(x, y) dx dy,$$

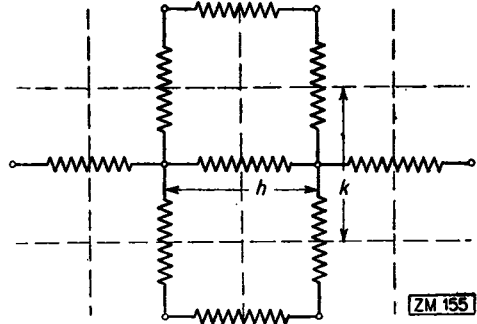
gdzie  $|S|$  oznacza powierzchnię prostokąta.

Opór między węzłami charakteryzuje średni opór między prostokątami. Mamy więc dla oporu między węzłami  $(i, j)$  a  $(i+1, j)$  wzór

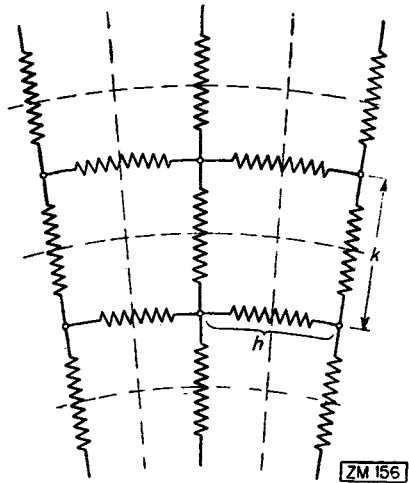
$$(5.5) \quad r = \frac{h}{k} \sigma,$$

gdzie  $\sigma$  oznacza opór między przeciwległymi bokami kwadratu.

Podana tutaj interpretacja pozwala stosunkowo łatwo ustalić wielkości oporów w siatce powstałej przez podział przewodnika płaskiego za pomocą dowolnego układu krzywych ortogonalnych (rys. 5). Potencjały i prądy odpowiadające węzłom, jak również opory wypadkowe między elementami powierzchniowymi, określone są przez te same co poprzednio wzory (5.3), (5.4) i (5.5), gdzie przez  $S$  należy rozumieć powierzchnię odpowiedniego elementu krzywoliniowego, a  $h$  i  $k$  mają



Rys. 4. Zastąpienie przewodnika płaskiego przez elementy skupione siatki oporowej prostokątnej



Rys. 5. Zastąpienie przewodnika płaskiego przez elementy skupione siatki oporowej krzywoliniowej ortogonalnej



znaczenie wskazane na rysunku 5. Jak wynika z tych wzorów, opory i siatki mają na ogół różne wartości.

Analizę siatek krzywoliniowych można przeprowadzić, nie uciekając się do interpretacji fizycznych, na drodze czysto matematycznej, którą można znaleźć w pracy [2]. Droga ta jest jednak bardziej skomplikowana i mniej pogładowa od podanej poprzednio.

**6. Pojemnościowe zasilanie siatek.** Jak wynika z poprzednich rozważań, dla realizacji równania Poissona konieczne jest doprowadzenie prądu o określonej wielkości do poszczególnych węzłów siatki. Ponieważ technicznie jest o wiele łatwiej uzyskać napięcie o wielkości danej z góry, niż prąd, postępujemy w sposób następujący:

Do każdego węzła siatki dołączamy kondensator o pojemności  $c$  (rys. 6), który zasilamy napięciem zmiennym  $F_{ij}$ . Załóżmy na chwilę, że  $F_{ij}$  jest jedynym napięciem zasilającym różnym od zera. Gdy oporność pozorną kondensatora  $C$  jest dostatecznie duża, napięcie w węźle  $u_{ij}$  jest znacznie mniejsze od napięcia zasilającego  $F_{ij}$ . W tych warunkach prąd płynący przez kondensator  $C$  wynosi w przybliżeniu

$$(6.1) \quad f_{ij} = \frac{F_{ij} - u_{ij}}{1/j\omega c} = j\omega c F_{ij},$$

a równanie napięć siatki ma postać

$$(6.2) \quad \nabla_h^2 u_{ij} \approx f_{ij}.$$

Jest to więc, jak poprzednio, przybliżenie różnicowe równania Poissona, gdzie  $f_{ij}$  określone jest równością (6.1).

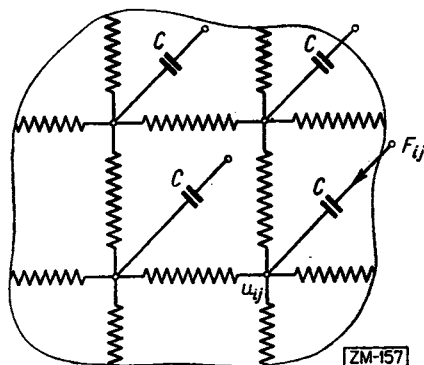
Zasilanie siatek napięciem zmiennym przez kondensatory ma następujące poważne zalety w porównaniu z zasilaniem przez oporniki:

Po pierwsze, przy zasilaniu przez opornik, błąd względny przy zastąpieniu we wzorze (6.1) napięcia  $F_{ij} - u_{ij}$  przez  $F_{ij}$  wyniosłby

$$(6.3) \quad \delta = \left| \frac{u_{ij}}{F_{ij}} \right|.$$

Przy zasilaniu prądem zmiennym przez pojemność, napięcie  $u_{ij}$  jest, jak to wynika z wzoru (6.2), przesunięte w fazie o  $90^\circ$  względem napięcia  $F$ , wobec czego mamy

$$|F_{ij} - u_{ij}| = \sqrt{F_{ij}^2 + u_{ij}^2} \approx |F_{ij}| \left( 1 + \frac{1}{2} \left| \frac{u_{ij}}{F_{ij}} \right|^2 \right),$$

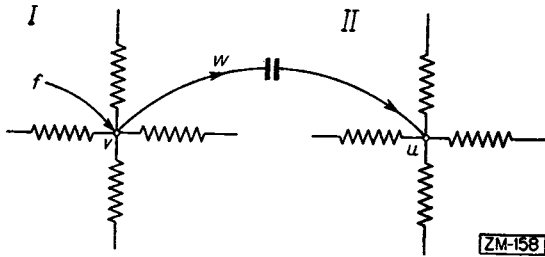


Rys. 6. Zasilanie siatki oporowej przez kondensatory  $C$

a więc błąd względny modułu wynosi teraz

$$(6.4) \quad \delta' = \frac{1}{2} \left| \frac{u_{ij}}{F_{ij}} \right|^2.$$

Pozwala to na przyjęcie stosunku  $u_{ij}/F_{ij}$  znacznie większego niż poprzednio, a więc przy ustalonym  $F_{ij}$  możemy pracować przy znacznie większych napięciach siatki, co jest dużym ułatwieniem technicznym.



Rys. 7. Realizacja równania biharmonicznego

Po drugie, optymalne dobranie oporności zasilającej jest w dużej mierze zależne od kształtu rozpatrywanego obszaru. Przy oporności rzeczywistej lub pojemnościowej i stałej częstotliwości zasilania wymagałoby

to zmian oporników lub kondensatorów w zależności od obszaru. Komplikacji tej można uniknąć stosując zasilanie pojemnościowe ze zmienną częstotliwością zasilania.

Zgodnie z zasadą superpozycji, podane rozważania nie tracą na ważności, jeżeli więcej niż jedno napięcie  $F_{ij}$  jest różne od zera.

Realizacja warunków brzegowych w przypadku siatek oporowo-pojemnościowych przebiega podobnie jak w przypadku siatek oporowych (por. § 5).

**7. Równanie biharmoniczne.** Podobnie jak to opisano w poprzednim rozdziale, można zbudować prostą realizację elektryczną przybliżenia różnicowego równania biharmonicznego z warunkiem brzegowym Naviera. Równanie to ma postać

$$(7.1) \quad \nabla^2 \nabla^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f(x, y),$$

$$(7.1') \quad u|_r = \varphi(x, y), \quad \nabla^2 u|_r = \psi(x, y).$$

Można je sprowadzić do następującego układu dwóch równań:

$$(7.2) \quad \nabla^2 w = f(x, y), \quad w|_r = \psi(x, y),$$

$$(7.2') \quad \nabla^2 u = w(x, y), \quad u|_r = \varphi(x, y).$$

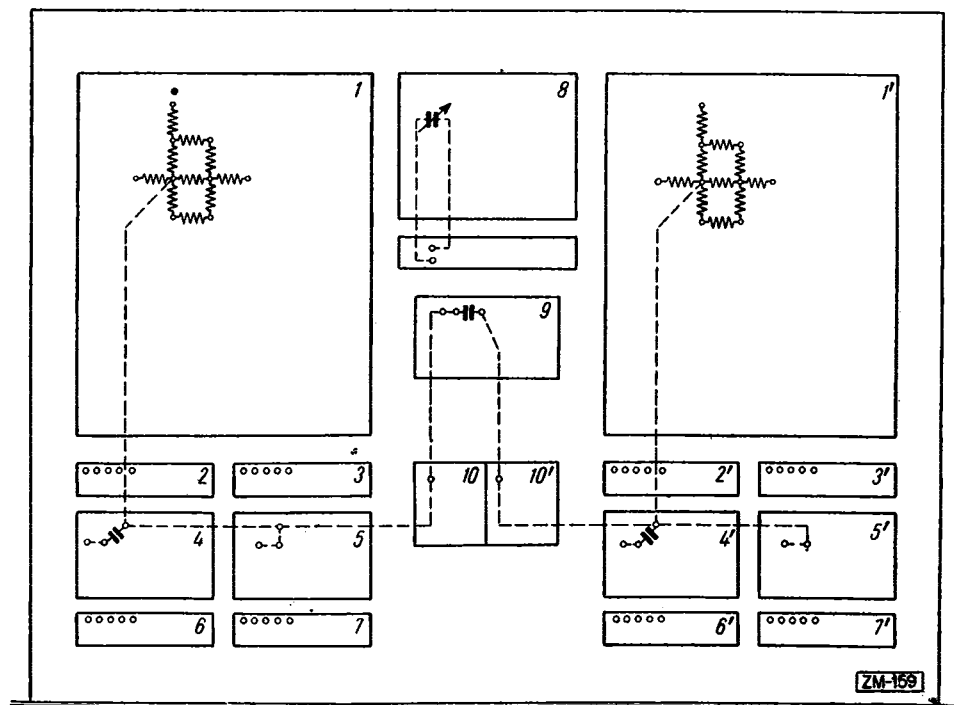
Rozpatrzmy dwie siatki oporowe połączone w sposób wskazany na rysunku 7. Na siatce *I* przyjmujemy warunek brzegowy oraz funkcję zasilającą odpowiadające równaniu (7.2), a na siatce *II* warunek brzegowy

odpowiadający równaniu (7.2'). Jest widoczne, że wtedy rozkład napięć w węzłach siatki  $II$  spełnia równanie (7.1) z warunkami brzegowymi (7.1').

W ten sposób, za pomocą dwóch siatek oporowych, można zbudować prostą i bezpośrednią realizację równania biharmonicznego z warunkiem brzegowym Naviera.

**8. Budowa ELI.** ELI pracuje na poprzednio opisanym zasadzie realizacji elektrycznej przybliżeń różnicowych równania Poissona. Zastosowano oporniki regulowane (potencjometry) oraz zasilanie pojemnościowe. W odróżnieniu od aparatów znanych z literatury, ELI pozwala na zmianę częstotliwości zasilania; zalety takiego rozwiązania podaliśmy poprzednio.

Schemat blokowy ELI jest przedstawiony na rysunku 8.



Rys. 8. Schemat blokowy połączeń ELI. Dla przejrzystości na tablicach 1 i 1' zaznaczono tylko kilka potencjometrów, a na pozostałych tablicach tylko po kilka gniazdek. Zaznaczono również połączenia odpowiadające tylko dwóm węzłom

ELI składa się z tablic, a mianowicie (rys. 8) tablic potencjometrów 1 i 1'; dzielników napięć 2, 2', 3, 3', 6, 6', 7, 7', tablic zasilania 4, 4', 5, 5', tablicy zmiennych pojemności 8, tablicy łączeniowej 9 do równania

biharmonicznego oraz tablicy do szycia<sup>1)</sup> 10. (Używa się jej również do przeprowadzania pomiarów).

Na tablicach 1 i 1' rozmieszczono zmienne oporniki (potencjometry). W skrajnych pozycjach gałki potencjometru opór jest odpowiednio zero i nieskończoność (przerwanie połączenia), co umożliwi identyfikowanie (zszywanie) punktów oraz „krajanie” siatki oporowej.

Węzły siatek połączone są poprzez kondensatory z gniaздkami tablic 4 i 4' oraz bezpośrednio z gniaздkami tablic 5 i 5'. Każdemu węzłowi odpowiada para gniaздek połączonych na krótko.

Tablice dzielników napięć składają się z gniaздek (około 120 gniaздek na każdej tablicy), do których są doprowadzone napięcia o odpowiednio rozłożonych wartościach. Chcąc np. zasilić danym napięciem pewien określony węzeł siatki przez kondensator, łączymy gniaздо tablicy 4 (4') odpowiadające temu węzłowi z odpowiednim gniaздkiem tablicy 2 (2') lub 6 (6'). Podobnie możemy zasilać węzły siatki bezpośrednio, łącząc odpowiednie gniaздka tablicy 5 (5') z gniaздkami dzielnika napięć 3 (3') lub 7 (7').

Tablica 8 zawiera 60 kondensatorów o regulowanej pojemności, które można łączyć szeregowo lub równoległe z kondensatorami tablicy 9.

Tablice 9 używa się przy rozwiązywaniu równania biharmonicznego. Przez zwarcie lewej pary gniaздek (por. rys. 8) uzyskuje się połączenie przez kondensator odpowiadających sobie węzłów tablic 1 i 1'.

Tablica 10 składa się z pojedynczych gniaздek połączonych bezpośrednio z węzłami na tablicach 1 i 1'. Tablica ta służy do szycia ze sobą poszczególnych części siatek oraz do pomiarów napięć w węzłach siatek.

**9. Sposób użycia.** Na wstępie podamy parę uwag o modelowaniu obszarów za pomocą siatek oporowych. Czynność ta odgrywa bodajże najważniejszą rolę przy rozwiązywaniu tą metodą równania Poissona.

Siatka taka powinna w miarę możliwości spełniać następujące wymagania:

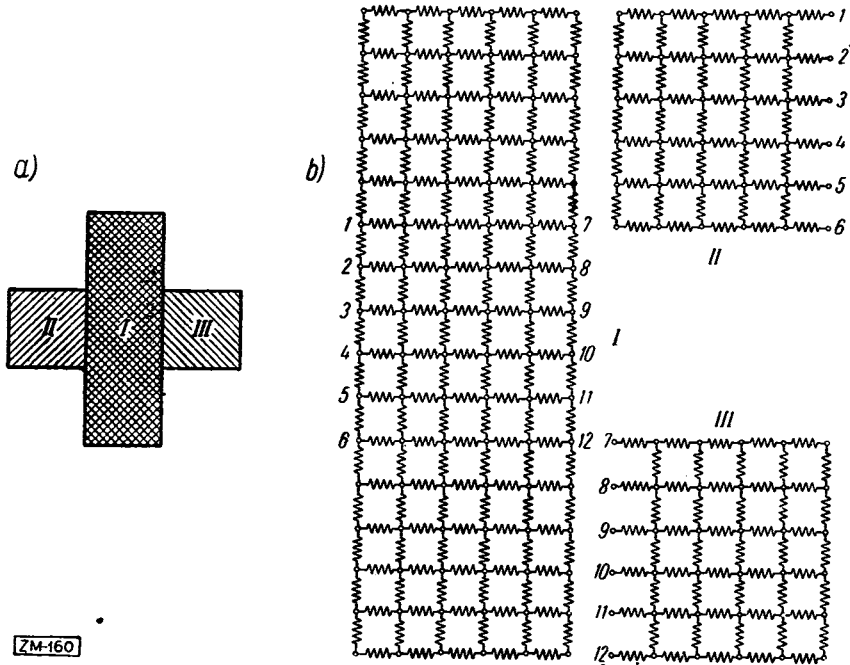
- 1° powinna możliwie dobrze aproksymować rozpatrywany obszar;
- 2° powinna dawać optymalne wykorzystanie wszystkich elementów (oporników) stojących do dyspozycji.

Warunek pierwszy niejednokrotnie skłania do użycia siatek krzywo liniowych.

Aby spełnić warunek drugi, stosuje się często metodę tzw. „krajania i szycia”. Metoda ta polega na cięciu obszaru na części, które po dogodnym rozmieszczeniu ich na siatce łączy się ze sobą (szyje).

<sup>1)</sup> Operacje szycia i krajania dokładniej wyjaśniamy w rozdziale 9.

Przykład ilustrujący metodę krajania i szycia podano na rysunku 9. Modelowany obszar ma kształt krzyża (rysunek 9a). Ponieważ tablice ELI'ego są prostokątne, więc przy modelowaniu geometrycznie podobnym pozostałoby wiele oporów niewykorzystanych. Dlatego rozbijamy krzyż na części *I*, *II* i *III*, które modelujemy oddzielnie jak na rysunku 9b i zszywamy, to znaczy zwieramy punkty oznaczone tymi samymi numerami.



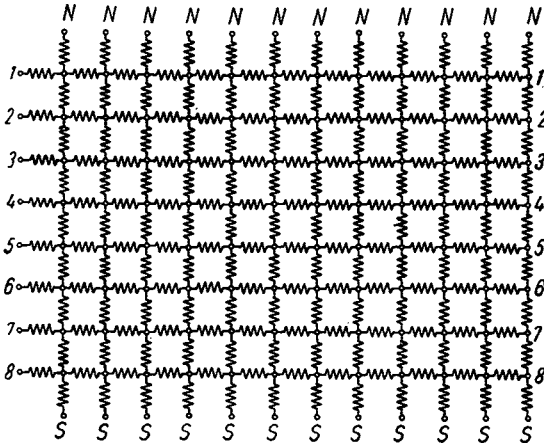
Rys. 9. Modelowanie krzyża

Szycie umożliwia również modelowanie powierzchni rozwijalnych i zakrzywionych. Na rysunku 10 pokazano modelowanie sfery. Wszelkie punkty oznaczone tym samym znakiem są odpowiednio zwarte. Punkty  $N, N, \dots$  odpowiadają biegunowi północnemu, a punkty  $S, S, \dots$  — południowemu. Linie  $NS$  odpowiadają południkom, a linie  $11, 22, \dots$  — równoleżnikom. Opory między punktami na południkach są jednakowe, na równoleżnikach zaś zależą od numeru równoleżnika.

ELI jest przeznaczony w zasadzie do bezpośredniego rozwiązywania równania Poissona w różnicach skończonych z różnymi warunkami brzegowymi. Równanie to z odpowiednimi warunkami brzegowymi rozwiązujemy następująco:

Najpierw w podany sposób modelujemy potrzebny obszar na siatce oporowej. Funkcję prawej strony równania realizujemy przez doprowa-

dzenie do gniazdek tablic 4 i 4' odpowiednich napięć z dzielników 2, 2' i 6, 6'. W podobny sposób realizujemy warunki brzegowe drugiego i trzeciego rodzaju. Warunek pierwszego rodzaju realizujemy przez doprowadzenie do gniazdek tablicy 5 i 5' odpowiednich napięć z dzielników 3, 3',



ZM 161

Rys. 10. Modelowanie sfery

7 i 7'. Rozwiązanie uzyskuje się z pomiaru rozkładu napięć na tablicy pomiarowej 10.

Równanie biharmoniczne z warunkiem brzegowym typu Naviera rozwiązuje się w ten sposób, że rozpatrywany obszar modeluje się jednocześnie na tablicach 1 i 1' używając przy tym współrzędnych prostokątnych o jednakowych oczkach siatki. Poszczególne węzły siatek łączymy następnie za pośrednictwem kondensatorów posługując się przy tym tablicą 9 na rysunku 8. Funkcję po

prawej stronie równania (7.1) oraz warunki brzegowe realizuje się w podobny sposób jak w przypadku równania Poissona.

Mogąc szybko i bezpośrednio znajdować przybliżenia rozwiązań równań Poissona i biharmonicznego z odpowiednimi warunkami brzegowymi, możemy drogą pośrednią rozwiązywać zagadnienia pokrewne. Jako pierwszy przykład można podać znajdowanie wartości i funkcji własnych przybliżeń różnicowych operatora Laplace'a. Wartości i funkcje własne operatora Laplace'a znajduje się metodą kolejnych przybliżeń.

Ciąg przybliżający funkcję własną operatora Laplace'a w różnicach skończonych określa się za pomocą wzoru rekurencyjnego

$$(9.5) \quad \nabla_n^2 u_n = u_{n-1}, \quad u_n|_r = 0,$$

gdzie  $u_0$  jest dowolną funkcją różną od zera. Dalsze funkcje własne znajduje się w podobny sposób, przyjmując za  $u_0$  dowolną funkcję różną od zera, ortogonalną do poprzednio znalezionej funkcji własnej. Wartości własne można znaleźć np. ze wzoru

$$\lambda = \frac{\sum_{i,j} \nabla_h^2 u_{ij} u_{ij}}{\sum_{i,j} u_{ij}^2}.$$

Zupełnie podobne rozumowanie jest prawdziwe dla operatora biharmonicznego w różnicach skończonych.

Metoda kolejnych przybliżeń pozwala rozwiązywać także inne równania, niekiedy bardziej skomplikowane. Jako przykład można podać równanie płyty cienkiej swobodnie podpartej na podłożu sprężystym. Równanie to ma postać

$$\nabla^2 \nabla^2 u = ku + f, \quad u|_r = \varphi, \quad \nabla^2 u|_r = \psi.$$

Okazuje się, że dla dostatecznie małych  $k$  ciąg przybliżeń, określony przez równanie

$$(9.6) \quad \nabla^2 \nabla^2 u_n = ku_{n-1} + f, \quad u_n|_r = \varphi, \quad \nabla^2 u_n|_r = \psi,$$

jest zbieżny do rozwiązania.

Jako przykład równania nieliniowego, które można rozwiązać metodą kolejnych przybliżeń, można podać równanie Fermiego-Thomasa dla obszarów ograniczonych:

$$\nabla^2 u = f(u), \quad u|_r = \varphi(x, y).$$

Przy pewnych ograniczeniach nałożonych na funkcję  $f$  ciąg określony przez wzór rekurencyjny

$$(9.7) \quad \Delta^2 u_n = f(u_{n-1}), \quad u_n|_r = \varphi(x, y)$$

jest zbieżny do rozwiązania.

Podane poprzednio przykłady stosowania metody kolejnych przybliżeń można z łatwością przetłumaczyć na język ELI'ego. Znajdowanie tu ciągów przybliżających rozwiązanie określonych równaniami (9.5), (9.6) i (9.7) sprowadza się do kolejnego rozwiązywania tego samego równania z tym samym warunkiem brzegowym przy różnych funkcjach zasilających.

**10. Dyskusja błędów.** W tym rozdziale podajemy źródła błędów w rozwiązywaniu przybliżeń różnicowych równania Poissona oraz pewne metody poprawiania rozwiązań. Pomijamy dyskusję błędów spowodowanego zastąpieniem równania Poissona przez jego przybliżenie różnicowe. Pewne dane dotyczące tego błędu znaleźć można w pracy [3].

Błąd w rozwiązaniu uzyskanym za pomocą ELI w porównaniu z rozwiązaniem dokładnym przybliżenia różnicowego równania Poissona wynika zasadniczo z czterech źródeł:

- 1° niedokładności siatki oporowej,
- 2° użycia przybliżonego wzoru (6.2),
- 3° istnienia pojemności rozproszonych między poszczególnymi węzłami a ziemią,
- 4° niedokładności urządzenia pomiarowego i zasilającego.

Błąd wynikający z przyczyn podanych w 1° jest, jak wynika z rachunku, mniejszy od 1%.

Błąd spowodowany przez istnienie pojemności rozproszonych można przez odpowiedni dobór częstotliwości zasilania uczynić mniejszym od liczby danej z góry, w tym przypadku 0,2%.

Błąd spowodowany niedokładnością urządzenia pomiarowego i zasilającego ELI jest nie większy niż 0,5%.

Łącznie dokładność mieści się więc w granicach od 1% do 2%. Dla zwiększenia dokładności rozwiązania można stosować metodę kolejnego poprawiania rozwiązania.

Jeśli na przykład  $u_{ij}$  jest rozwiązaniem przybliżonym równania Poissona uzyskanym za pomocą ELI, to w celu znalezienia przybliżonej różnicy  $\xi_{ij}$  między rozwiązaniem dokładnym  $u_{ij}$  a rozwiązaniem  $\bar{u}_{ij}$  (tj.  $\xi_{ij} = u_{ij} - \bar{u}_{ij}$ ) rozwiązujemy równanie

$$\nabla_h^2 \xi_{ij} = f_{ij} - \nabla_h^2 \bar{u}_{ij},$$

przy czym  $\nabla_h^2 \bar{u}_{ij}$  jest wartością dokładną laplasjanu w różnicach skończonych, uzyskaną np. za pomocą arytmetru, z warunkiem brzegowym  $\xi|_r = 0$ . Otrzymujemy wówczas rozwiązanie raz poprawione

$$u_1 = \bar{u} + \xi.$$

Tak samo można znaleźć dalsze poprawki, np. drugą poprawkę znajdujemy z równania

$$\nabla_h^2 \xi_2 = f - \nabla_h^2 u_1$$

z warunkiem brzegowym zerowym.

Można wykazać, że przy podanym sposobie poprawiania błędy poszczególnych rozwiązań w stosunku do rozwiązania dokładnego maleją tak, jak kolejne wyrazy postępu geometrycznego o ilorazie mniejszym od jedności.

#### Prace cytowane

[1] С.А. Гершгорин, *Об электрических сетках для приближенного решения уравнения Лапласа*, Журнал прикладной физики 4(1929), стр. 29.

[2] А.И. Гутенмахер, *Электрические модели*, Москва-Ленинград 1949.

[3] Л.В. Канторович и В.И. Крылов, *Приближенные методы высшего анализа*, Москва-Ленинград 1950.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

*Praca wpłynęła dnia 10. 5. 1955 r.*



Л. ЛУКАШЕВИЧ и П. ШЕПТЫЦКИЙ (Варшава)

**ЭЛЕКТРОННЫЙ ИНТЕГРАТОР ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

РЕЗЮМЕ

Описана построенная в Математическом Институте ПАН машина, которая работает по принципу аналогии и предназначена для быстрого нахождения решений разностных аппроксимаций уравнения Пуассона с граничными условиями первого, второго и третьего рода, а также бигармонического уравнения с граничным условием Навье. Употребляя соответствующие математические методы, напр. итерацию, можно распространить применение этой машины на многие другие родственные проблемы. Устройство машины исходит из принципа электрических сеток, распределение потенциалов в которых удовлетворяет интересующее нас уравнение.

Количество предоставляемых в распоряжение узлов — около 500; вытекающие из неточности элементов машины погрешности не превышают 1%-2%.

---

L. ŁUKASZEWICZ and P. SZEPTYCKI (Warszawa)

**ELECTRONIC INTEGRATOR OF DIFFERENTIAL EQUATIONS ELI**

SUMMARY

The paper contains a description of a computer, now under construction at the Mathematical Institute of the Polish Academy of Sciences, working on the analogy principle and serving for the swift solution of difference approximations of the Poisson equation with the boundary condition of the first, second and third kind, and of the biharmonic equation with the boundary condition of Navier. By using suitable mathematical methods, e.g. iteration, the applicability range of the machine can be extended to numerous cognate problems. The construction of the computer is based on the principle of resistor networks in which the node voltages satisfy the differential equation in question.

The number of nodes at our disposal is about 500, errors resulting from inaccuracy in the elements of the machine do not exceed 1%-2%.

---