ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XLVI (1985)

Une remarque sur les solutions bornées d'une équation différentielle avec pilotage

par Z. Mikołajska (Kraków)

À la mémoire de Franciszek Leja

Résumé. Dans la note présente nous allons démontrer une condition suffisante pour l'existence d'un pilotage borné $\{u_1 = \varphi_1(t), u_2 = \varphi_2(t)\}$ tel que chaque solution $y(t)$ de l'équation $y' = f(t, y, \varphi_1(t), \varphi_2(t))$ avec la condition initiale $|y(0)| < k$ reste bornée pour $t \in [0, \infty)$.

Envisageons l'équation différentielle

$$y'(t) = f\big(t, y(t), u_1, u_2\big) \tag{1}$$

où $f(t, y, u_1, u_2)$ est de classe C^1 par rapport à (t, y, u_1, u_2). Nous allons donner une condition suffisante pour l'existence d'un pilotage borné $u_1 = \varphi_1(t)$, $u_2 = \varphi_2(t)$ tel que chaque solution $\big(y(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t)\big)$ de l'équation (1) avec la condition initiale

$$|y(0)| < k \tag{2}$$

reste bornée pour $t \in [0, \infty)$.

Remarque. Il est évident qu'il suffit de donner des conditions sur $f(t, y, u_1, u_2)$ sous lesquelles il existe un pilotage $\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t)\big)$ tel que

$$\begin{aligned} f\big(t, k, \varphi_1(t), \varphi_2(t)\big) &< 0 \quad \text{pour } 0 \leqslant t < \infty, \\ f\big(t, -k, \varphi_1(t), \varphi_2(t)\big) &> 0 \quad \text{pour } 0 \leqslant t. \end{aligned} \tag{3}$$

1. Hypothèses H. Supposons que

$$\begin{vmatrix} f_{u_1}(t, k, u), & f_{u_2}(t, k, u) \\ f_{u_1}(t, -k, u), & f_{u_2}(t, -k, u) \end{vmatrix} > 0 \tag{1.1}$$

pour $0 \leqslant t < \infty$, $\|u\| \leqslant R$ $(R > 0)$

$$f(0, k, 0, 0) < 0, \quad f(0, -k, 0, 0) > 0, \tag{1.2}$$

(1.3) $$f_t(t,k,u)\{f_{u_1}(t,-k,u)u_2-f_{u_2}(t,-k,u)u_1\}-$$
$$-f_t(t,-k,u)\{f_{u_1}(t,k,u)u_2-f_{u_2}(t,k,u)u_1\}<0$$
pour $R > \|u\| > 0$.

THÉORÈME T. *Les hypothèses H étant admises:*

(I) *il existe une constante* $r > 0$, $r \leqslant R$, *telle que chaque solution du système*

(1.4) $$\begin{aligned} f(t,k,u_1,u_2) &= f(0,k,u_1^0,u_2^0),\\ f(t,-k,u_1,u_2) &= f(0,-k,u_1^0,u_2^0), \end{aligned}$$

avec $\|u^0\| \leqslant r$ *et avec la condition initiale* $\varphi_1(0) = u_1^0$, $\varphi_2(0) = u_2^0$ *existe pour* $0 \leqslant t < \infty$ *et satisfait à l'inégalité*

(1.5) $$\|\varphi(t)\| < r \quad \textit{pour } 0 \leqslant t < \infty.$$

(II) *Pour le pilotage* $u_1 = \varphi_1(t)$, $u_2 = \varphi_2(t)$ *ainsi défini sont satisfaites les inégalités* (3), *c'est-à-dire que chaque solution* $y(t)$ *de l'équation* (1) *avec la condition* (2) *et avec le pilotage* $\varphi(t)$ *satisfaisant à* (1.4) *reste bornée pour* $0 \leqslant t < \infty$ *et*

$$|y(t)| < k \quad \textit{pour } 0 \leqslant t < \infty.$$

Démonstration. De la continuité de $f(t, y, u)$ il résulte qu'il existe une constante $r > 0$ telle que

(1.6) $$\begin{aligned} f(0,k,u_1,u_2) &< 0 \quad \text{pour } \|u\| \leqslant r,\\ f(0,-k,u_1,u_2) &> 0 \quad \text{pour } \|u\| \leqslant r. \end{aligned}$$

Envisageons (u_1^0, u_2^0) tel que $\|u^0\| \leqslant r$ et la solution $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ du système d'équations différentielles

(1.7) $$\begin{aligned} \varphi_1'(t) &= \frac{-f_t(t,k,\varphi)f_{u_2}(t,-k,\varphi)+f_t(t,-k,\varphi)f_{u_2}(t,k,\varphi)}{f_{u_1}(t,k,\varphi)f_{u_2}(t,-k,\varphi)-f_{u_2}(t,k,\varphi)f_{u_1}(t,-k,\varphi)},\\ \varphi_2'(t) &= \frac{-f_t(t,-k,\varphi)f_{u_1}(t,k,\varphi)+f_t(t,k,\varphi)f_{u_1}(t,-k,\varphi)}{f_{u_1}(t,k,\varphi)f_{u_2}(t,-k,\varphi)-f_{u_2}(t,k,\varphi)f_{u_1}(t,-k,\varphi)}, \end{aligned}$$

avec la condition initiale

(1.8) $$\varphi_1(0) = u_1^0, \quad \varphi_2(0) = u_2^0.$$

Envisageons la fonction composée

$$f\big(t,k,\varphi_1(t),\varphi_2(t)\big) \stackrel{\text{df}}{=} \sigma_1(t), \quad f\big(t,-k,\varphi_1(t),\varphi_2(t)\big) \stackrel{\text{df}}{=} \sigma_2(t).$$

On a $\sigma_1(0) < 0$, $\sigma_2(0) > 0$

$$\begin{aligned} \sigma_1'(t) &= f_t(t,k,\varphi)+f_{u_1}(t,k,\varphi)\varphi_1'+f_{u_2}(t,k,\varphi)\varphi_2',\\ \sigma_2'(t) &= f_t(t,-k,\varphi)+f_{u_1}(t,-k,\varphi)\varphi_1'+f_{u_2}(t,-k,\varphi)\varphi_2'. \end{aligned}$$

Posons par définition

$$D(t)=\begin{vmatrix} f_{u_1}(t,\,k,\,\varphi), & f_{u_2}(t,\,k,\,\varphi) \\ f_{u_1}(t,\,-k,\,\varphi), & f_{u_2}(t,\,-k,\,\varphi)\end{vmatrix}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\sigma_1'(t)=\frac{1}{D(t)}\{&f_t(t,\,k,\,\varphi)f_{u_1}(t,\,k,\,\varphi)f_{u_2}(t,\,-k,\,\varphi)-\\ &-f_t(t,\,k,\,\varphi)f_{u_2}(t,\,k,\,\varphi)f_{u_1}(t,\,-k,\,\varphi)-\\ &-f_{u_1}(t,\,k,\,\varphi)f_t(t,\,k,\,\varphi)f_{u_2}(t,\,-k,\,\varphi)+\\ &+f_{u_1}(t,\,k,\,\varphi)f_t(t,\,-k,\,\varphi)f_{u_2}(t,\,k,\,\varphi)-\\ &-f_{u_2}(t,\,k,\,\varphi)f_t(t,\,-k,\,\varphi)f_{u_1}(t,\,k,\,\varphi)+\\ &+f_{u_2}(t,\,k,\,\varphi)f_t(t,\,k,\,\varphi)f_{u_1}(t,\,-k,\,\varphi)\}=0,\end{aligned}$$

d'où il vient

$$\gamma_1(t)=f\big(t,\,k,\,\varphi_1(t),\,\varphi_2(t)\big)=\text{const}=f(0,\,k,\,u^0)<0.$$

D'une façon analogue on obtient

$$\sigma_2(t)=f\big(t,\,-k,\,\varphi_1(t),\,\varphi_2(t)\big)=\text{const}=f(0,\,-k,\,u^0)>0.$$

Ainsi nous avons démontré que la solution $(\varphi_1,\,\varphi_2)$ du système (1.7) avec la condition (1.8) satisfait à (1.4) et à (3). Il rèste à prouver que le pilotage $u_1=\varphi_1(t)$, $u_2=\varphi_2(t)$ est défini dans $[0,\,\infty)$ et satisfait à (1.5). Supposons que $r\leqslant R$. On a donc $D(t)>0$ pour $t\geqslant 0$ tels que $\|\varphi\|\leqslant r$. On a

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(\varphi_1^2+\varphi_2^2)'&=\varphi_1\varphi_1'+\varphi_2\varphi_2'\\ &=\frac{1}{D(t)}\{-f_t(t,\,k,\,\varphi)f_{u_2}(t,\,-k,\,\varphi)\varphi_1+\\ &\quad+f_t(t,\,-k,\,\varphi)f_{u_2}(t,\,k,\,\varphi)\varphi_1-\\ &\quad-f_t(t,\,-k,\,\varphi)f_{u_1}(t,\,k,\,\varphi)\varphi_2+f_t(t,\,k,\,\varphi)f_{u_1}(t,\,-k,\,\varphi)\varphi_2\}\\ &=\frac{1}{D(t)}\{f_t(t,\,k,\,\varphi)[f_{u_1}(t,\,-k,\,\varphi)\varphi_2-f_{u_2}(t,\,-k,\,\varphi)\varphi_1]-\\ &\quad-f_t(t-k,\,\varphi)[f_{u_1}(t,\,k,\,\varphi)\varphi_2-f_{u_2}(t,\,k,\,\varphi)\varphi_1]\}.\end{aligned}$$

En vertu de (1.3) on a donc

$$\tfrac{1}{2}\{\varphi_1^2+\varphi_2^2\}'<0 \quad \text{pour } t\geqslant 0 \text{ tel que } \|\varphi\|\leqslant r,\ 0\leqslant t<\infty,$$

et par suite $\|\varphi\|<r$ pour $0\leqslant t<\infty$.

Le théorème T est ainsi démontré. Dans la suite allons donner un simple exemple de l'application du théorème T.

2. EXEMPLE E. Envisageons le cas où

$$f(t, y, u_1, u_2) \overset{\text{df}}{=} a(t)[(y-\alpha)u_1 + (y-\beta)u_2] - y, \tag{2.1}$$

(2.2) $a(t)$ est une fonction de classe C^1 pour $0 \leqslant t < \infty$,

$$a(t) \cdot a'(t) > 0 \quad \text{pour } 0 \leqslant t < \infty, \tag{2.3}$$

(2.4) les constantes α, β satisfont à l'inégalité $\beta < \alpha$.

Dans le cas envisagé on a

$$\begin{vmatrix} f_{u_1}(t, k, u_1, u_2), & f_{u_2}(t, k, u_1, u_2) \\ f_{u_1}(t, -k, u_1, u_2), & f_{u_2}(t, -k, u_1, u_2) \end{vmatrix}$$

$$= a^2(t) \begin{vmatrix} k-\alpha, & k-\beta \\ -k-\alpha, & -k-\beta \end{vmatrix} = -a^2(t)[(k-\alpha)(k+\beta) - (k-\beta)(k+\beta)]$$

$$= -a^2(t)[k^2 + (\beta-\alpha)k - \alpha\beta - k^2 + (\beta-\alpha)k + \alpha\beta]$$

$$= -a^2(t) \cdot 2(\beta-\alpha)k > 0$$

c'est-à-dire que (1.1) est satisfaite. Envisageons $f(0, k, 0, 0)$ et $f(0, -k, 0, 0)$. On a $f(0, k, 0, 0) = -k < 0$, $f(0, -k, 0, 0) = k > 0$. C'est-à-dire que (1.2) est satisfaite. Démontrons (1.3)

$$\begin{aligned} f_t(t, k, u_1, u_2)[f_{u_1}(t, -k, u_1, u_2)u_2 - \\ -f_{u_2}(t, -k, u_1, u_2)(t, -k, u_1, u_2)u_1] - \\ -f_t(t, -k, u_1, u_2)[f_{u_1}(t, k, u_1, u_2)u_2 - f_{u_2}(t, k, u_1, u_2)u_1] \\ = 2a'(t) \cdot a(t)(\beta-\alpha)(u_1^2 + u_2^2) < 0 \quad \text{pour } u_1^2 + u_2^2 > 0 \end{aligned}$$

(cf. (2.2), (2.3), (2.4)). On peut donc appliquer le théorème T. Dans le cas envisagé on peut facilement évaluer r. On vérifie aisémant que r doit satisfaire à l'inégalité suivante:

$$0 < r < \min\left\{\frac{k}{|a(0)|[|k-\alpha| + |k-\beta|]}, \frac{k}{|a(0)|[|k+\alpha| + |k+\beta|]}\right\}. \tag{2.5}$$

Dans le cas où la condition (2.5) est satisfaite, on a

$$\begin{aligned} f(0, k, u_1, u_2) &= a(0)[(k-\alpha)u_1 + (k-\beta)u_2] - k \\ &\leqslant |a(0)|[|k-\alpha| + |k-\beta|]r - k < 0, \\ f(0, -k, u_1, u_2) &= -a(0)[(k+\alpha)u_1 + (k+\beta)u_2] + k \\ &\geqslant -|a(0)|[|k+\alpha| + |k+\beta|]r + k > 0. \end{aligned}$$

Reçu par la Rédaction le 28.12.1983