COLLOQUIUM MATHEMATICUM

XXVI DÉDIÉ À M. WŁADYSŁAW ŚLEBODZIŃSKI 1972

НЕГОЛОНОМНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ В ПОДВИЖНОМ РЕПЕРЕ

Н. И. КОВАНЦОВ (КИЕВ)

Геометрии неголономных многообразий посвящена уже довольно обширная литература (см., например, [1], [2], [5]-[8]). Термин „неголономный" связывают с системами уравнений в полных дифференциалах, которые не допускают интегральных многообразий заданной размерности $n > 1$ (голономных многообразий). Так как, однако, любая система уравнений Пфаффа при выполнении определенных условий на коэффициенты и при числе уравнений, не превышающем числа искомых функций, допускает одномерные интегральные многообразия, то совокупность таких многообразий естественно избрать объектом специального рассмотрения. Этой совокупности приписывают название *неголономного многообразия*. Такое многообразие во многом ведет себя как соответствующее голономное многообразие, а из-за того, что условия интегрируемости не выполнены, — число инвариантов и инвариантных образов у него оказывается большим, чем у многообразия голономного.

Общая теория неголономных многообразий включает в себя такие, часто рассматриваемые независимо друг от друга вещи, как неголономные поверхности Д. М. Синцова, системы неголономных поверхностей Г. Т. Георгиу, риманова геометрия, теория пространств с фундаментально-групповой связностью и т. д. Теория неголономных многообразий имеет своей отправной точкой геометрию обычных многообразий, вложенных в обычные однородные пространства (таким многообразием может быть, в частности, и все пространство), она начинает свое развитие всякий раз, когда интегрируемая система уравнений, задающих многообразие, заменяется системой неинтегрируемой (не допускающей решения заданной размерности).

Некоторое время назад мы посвятили геометрии неголономных многообразий ряд своих работ, рассмотрев в них лишь самые общие, первоначальные вопросы. В работе [3], беря *разные* способы задания поверхности в трехмерном евклидовом пространстве интегрируемыми системами дифференциальных уравнений и переходя от этих уравнений к уравнениям неинтегрируемым, мы указали на *разные* аспекты в геометрии таких поверхностей, в общем случае не совпадающие между собой. Все такие аспекты необходимо совпадают при выполнении условий полной интегрируемости уравнений. Мы ограничились рассмотрением лишь тех случаев, когда поверхность задавалась или уравнением в прямоугольной декартовой системе координат, или коэффициентами двух квадратичных форм. Записывая деривационные уравнения такой поверхности, мы относили ее тем самым к некоторому естественному реперу. Преобразование независимых переменных влечет за собой и преобразование репера.

В [4] подобные рассмотрения перенесены на обобщенные пространства, при этом каждое из последних задается некоторой системой геометрических объектов. Задание компонент объекта как функций от какого-то числа независимых переменных определяет подвижной репер пространства, который меняется при замене этих переменных. Каждая дифференциальная окрестность текущей точки пространства порождает некоторую группу преобразований, параметрами которой являются соответствующие производные от функций, определяющих преобразование независимых переменных. Геометрия каждого обобщенного пространства (риманова, аффинно-связного, поверхности в евклидовом пространстве и т.д.) в каждой дифференциальной окрестности текущей точки становится теорией инвариантов указанной группы.

В предлагаемой ниже работе мы задаем самое общее пространство представлений той или иной группы преобразований с помощью системы базисных форм. Если эти формы удовлетворяют уравнениям структуры группы — имеем само однородное пространство (голономное), при невыполнении уравнений структуры — пространство неголономное.

Формы задают не только пространство, но и подвижной репер его. Замена репера ведет к замене и форм при тех же самых переменных, от которых зависят коэффициенты форм. Геометрия каждой дифференциальной окрестности текущей точки пространства (таковым может быть и вложенное в пространство неголономное многообразие) оказывается теорией инвариантов соответствующей группы преобразований, причем параметрами группы теперь уже являются не только частные производные функций, определяющих переход от одних переменных (входящих в коэффициенты форм) к другим, но и вторичные параметры (параметры стационарной подгруппы точки) и их производные соответствующего порядка.

Переменные, входящие в коэффициенты базисных форм, могут быть независимыми, но могут быть и связаны некоторым числом не вполне интегрируемых уравнений Пфаффа. В этом последнем случае рассмотрения оказываются более общими и позволяют охватить, в частности, и теорию неголономных поверхностей Д. М. Синцова. В конце работы мы выписываем в явном виде условия, которым должны удовлетворять коэффициенты форм для того, чтобы неголономное многообразие было неголономной поверхностью Д. М. Синцова.

1. Общие уравнения. Пусть S_n — n-мерное однородное пространство с транзитивно действующей в нем фундаментальной группой G_r. Пространство S_n отнесено к неподвижному реперу T_0, пусть в этом репере $x^i (i = 1, \dots, n)$ — координаты его текущей точки. Пусть T — подвижной репер пространства с вершинами $M_a(x_a^i)$, $a = 1, \dots, k$.

Инфинитезимальное смещение репера T определяется дифференциалами

$$dx_a^i = f_{a\alpha}^i(x_\beta^j)\,\omega^\alpha, \tag{1}$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, \dots, r, \qquad i, j, k, \dots = 1, \dots, n, \qquad a, b, c, \dots = 1, \dots, k$$

где ω^α — базисные формы группы, удовлетворяющие структурным уравнениям (суммирование по сочетаниям β, γ)

$$D\omega^\alpha = c_{\beta\gamma}^\alpha [\omega^\beta \omega^\gamma] \tag{2}$$

(D — символ внешнего дифференцирования, [ ] — символ внешнего умножения). Число существенных координат x_a^i, очевидно, равно порядку группы r. Если число переменных $x_a^i (nk)$ больше r, то между этими переменными имеют место $nk - r$ соотношений, оставляющих независимыми лишь r переменных. Так, подвижной репер в трехмерном евклидовом пространстве определяется четырьмя некомпланарными точками. Следовательно, число nk равняется 12. Однако между координатами этих точек имеют место 6 соотношений — у всех реперов длины ребер и углы между ними должны быть одинаковыми.

Формы ω^α могут быть выражены через x_b^j, dx_a^i:

$$\omega^\alpha = F_i^{a\alpha}(x_b^j)\,dx_a^i. \tag{3}$$

Равенства (2) непосредственно получаются из (3). Функции $f_{a\alpha}^i$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$f_{b\beta}^j \frac{\partial f_{a\gamma}^i}{\partial x_b^j} - f_{b\gamma}^j \frac{\partial f_{a\beta}^i}{\partial x_b^j} = c_{\gamma\beta}^\alpha f_{a\alpha}^i. \tag{4}$$

Для каждой конкретной группы G_r, представленной как группа преобразований в пространстве S_n, и для каждого выбора подвижного репера функции $f_{a\alpha}^i$ вполне определены. Во всех наших дальнейших рассуждениях, относящихся как к голономным, так и неголономным многообразиям, функции $f_{a\alpha}^i$ будут предполагаться заданными, и именно удовлетворяющими уравнениям (4).

Положим теперь

$$\omega^a = \lambda_i^a(u^j)du^i. \tag{5}$$

Если формы $\lambda_i^a du^i$ удовлетворяют уравнениям структуры (2), то уравнения (1) вполне интегрируемы. Интегрируя их, получим

$$x_a^i = \varphi_a^i(u^1, \ldots, u^n, C^1, \ldots, C^r), \tag{6}$$

где $C^1, \ldots, C^r$ — произвольные постоянные интегрирования. Их число определяется, разумеется, не числом координат x_a^i, а порядком группы G_r. Для каждой совокупности значений $u^1, \ldots, u^n$ получим r-параметрическое семейство реперов, составляющих класс реперов группы. Реперы, соответствующие разным значениям u^i, могут не принадлежать одному классу. Фиксировав постоянные, получаем поле реперов. Каждая вершина репера описывает пространство S_n. Мы можем выбрать любую из вершин в качестве „начала" репера. Пусть таковой будет M_1.

Подвергнем репер T преобразованию стационарной подгруппы точки M_1 (перейдем от репера T к реперу T'). Уравнения (1) заменятся следующими

$$dx_a'^i = f_{aa'}^i(x_b'^j)\,\omega^{a'} \qquad (x_1'^i = x_1^i), \tag{7}$$

где

$$\omega^{a'} = H_s^{a'}(p^q)dp^s + Q_\beta^{a'}(p^q)\,\omega^\beta, \qquad s, q, \ldots, = 1, \ldots, r-n.$$

Здесь p^q — параметры, определяющие преобразование стационарной подгруппы (вторичные параметры; u^i — главные параметры). При $du^i = 0$ формы ω'^a становятся вторичными формами.

Геометрия пространства S_n в каждой дифференциальной окрестности точки M_1 есть теория инвариантов некоторой группы $\Gamma^1, \Gamma^2, \ldots$ преобразований, действующей в пространстве $S^1, S^2, \ldots$ соответствующего объекта. Такими инвариантами могут быть как конечные, так и дифференциальные инварианты. Поскольку группа транзитивна, то никаких точечных инвариантов в окрестности нулевого порядка мы не будем иметь. Начнем поэтому непосредственно с окрестности первого порядка. Из дальнейшего будет ясно, что мы понимаем под группами $\Gamma^1, \Gamma^2, \ldots$ и пространствами $S^1, S^2, \ldots$

2. Окрестность первого порядка. Пусть $d_i u^j - n^2$ дифференциалов, определяющих n направлений в пространстве переменных u^j, а по формулам (1) — и в пространстве S_n. Все такие направления исходят из точки (собственно, говоря о направлении, мы имеем в виду лишь наличие соответствующих дифференциалов du^j).

Перейдем от переменных u^i к переменным $u^{i'}$ по формулам

$$u^{i'} = u^{i'}(u^1, \ldots, u^n). \tag{8}$$

Введем обозначения

$$(9) \qquad \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^{i}} = t_i^{i'}.$$

Через $t_{i'}^{i}$ будем обозначать элементы матрицы, обратной матрице $(t_i^{i'})$. Обозначим

$$(10) \qquad \frac{\partial p^s}{\partial u^i} = p_i^s, \qquad \frac{\partial p^s}{\partial u^{i'}} = p_{i'}^s$$

и положим

$$(11) \qquad \omega^{a'} = \lambda_{i'}^{a'} du^{i'}.$$

Группа Γ^1, определяющая геометрию первой дифференциальной окрестности точки M_1, есть группа, задаваемая следующими конечными уравнениями:

$$(12) \qquad \lambda_{i'}^{a'} = H_s^{a'} p_{i'}^s + Q_\beta^{a'} \lambda_i^\beta t_{i'}^i, \qquad d_i u^{j'} = t_j^{j'} d_i u^j.$$

То, что равенства (12) действительно определяют группу преобразований, очевидно, — переходя от репера T' к реперу T'' и от переменных $u^{i'}$ к переменным $u^{i''}$, мы от равенств (12) перейдем к равенствам

$$(13) \qquad \lambda_{i''}^{a''} = H_s^{a''} p_{i''}^s + Q_\beta^{a''} \lambda_i^\beta t_{i''}^i, \qquad d_i u^{j''} = t_j^{j''} d_i u^j,$$

где $t_j^{j''}, p_{i''}^s, H_s^{a''}, Q_\beta^{a''}$ имеют соответствующие значения. При этом $p_{i''}^s$ — параметры, соответствующие переходу от репера T к реперу T''.

Обратное преобразование запишется в виде

$$(14) \qquad \lambda_i^a = H_{s'}^a p_i^{s'} + Q_{\beta'}^a \lambda_{i'}^{\beta'} t_i^{i'}, \qquad d_i u^j = t_{j'}^j d_i u^{j'}$$

с соответствующими значениями входящих сюда коэффициентов. Тождественное преобразование получается при значениях параметров

$$(15) \qquad p_0^s, \qquad t_i^{i'} = \delta_i^{i'}, \qquad p_{i'}^s = 0.$$

Пространство S^1, в котором действует группа Γ^1, отнесено к координатам $\lambda_i^\beta, d_i u^j$ (размерность его $n_1 = rn + n^2$), параметрами преобразования являются $p^s, p_{i'}^s, t_{i'}^i$ (число их $r_1 = r - n + (r-n)n + n^2$). Величины $\lambda_{i'}^{a'}, d_i u^{j'}$ — координаты преобразованной точки пространства S^1.

При построении геометрии первой дифференциальной окрестности мы можем в случае необходимости увеличивать размерность пространства S^1, вводя новые переменные (векторы, тензоры и т.д.).

3. Окрестности второго и более высоких порядков. Продифференцируем теперь равенства (12) по $u^{k'}$:

$$\lambda^{\alpha'}_{i'k'} = \frac{\partial H^{\alpha'}_s}{\partial p^q} p^q_{k'} p^s_{i'} + H^{\alpha'}_s p^s_{i'k'} + \frac{\partial Q^{\alpha'}_\beta}{\partial p^q} p^q_{k'} \lambda^\beta_i t^i_{i'} + Q^{\alpha'}_\beta \lambda^\beta_{ij} t^j_{k'} t^i_{i'} + Q^{\alpha'}_\beta \lambda^\beta_i t^i_{i'k'}, \tag{16}$$

$$d_{ik} u^{j'} = t^{j'}_j d_{ik} u^j + t^{j'}_{je} d_i u^j d_k u^e.$$

Здесь

$$p^s_{i'k'} = \frac{\partial^2 p^s}{\partial u^{i'} \partial u^{k'}}, \qquad \lambda^\beta_{ij} = \frac{\partial \lambda^\beta_i}{\partial u^j}, \qquad \lambda^{\alpha'}_{i'k'} = \frac{\partial \lambda^{\alpha'}_{i'}}{\partial u^{k'}},$$

$$t^{j'}_{jk} = \frac{\partial^2 u^{j'}}{\partial u^j \partial u^k}, \qquad t^i_{i'k'} = \frac{\partial^2 u^i}{\partial u^{i'} \partial u^{k'}}.$$

$d_{ik} u^j$ — вторые дифференциалы, каждый из которых берется в двух направлениях (последние могут совпадать).

Присоединим равенства (16) к равенствам (12). Мы получим конечные уравнения группы Γ^2 с параметрами

$$p^s,\ p^s_{i'},\ t^i_{i'},\ p^s_{i'k'},\ t^i_{i'k'}. \tag{17}$$

Порядок этой группы

$$r_2 = r - n + n(r-n) + n^2 + \frac{rn(n+1)}{2} + \frac{n^2(n+1)}{2}$$

(учли симметрию параметров $p^s_{i'k'}$, $t^i_{i'k'}$ по нижним индексам). Группа Γ^2 действует в пространстве S^2 переменных

$$\lambda^\alpha_i,\ d_i u^j,\ \lambda^\alpha_{ij},\ d_{ij} u^k. \tag{18}$$

Размерность этого пространства

$$n_2 = rn + n^2 + rn^2 + \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{rn(n-1)}{2}$$

(учли симметрию величин $d_{ij} u^k$ по нижним индексам и то обстоятельство, что частные производные λ^α_{ij} связаны $rn(n-1)/2$ условиями, вытекающими из (2); для ссылок будем обозначать эти не выписанные условия символом *).

Как и ранее, размерность пространства S^2 может быть повышена добавлением новых переменных, преобразующихся с участием параметров $t^i_{i'j'}$.

Таким же образом может быть построена геометрия любой окрестности точки M_1. Пространство S^3, например, кроме переменных (18), содержит также переменные $\lambda^\alpha_{ijk} = \partial \lambda^\alpha_i / \partial u^j \partial u^k$, связанные условиями, которые получатся, если продифференцировать условия *, и переменные $d_{ijk}u^l$ (третьи дифференциалы, каждый из которых берется в трех направлениях).

4. Неголономные многообразия. Предположим теперь, что формы λ_i^a, входящие в равенства (5), не удовлетворяют уравнениям структуры (2). В этом случае уравнения (1) не имеют решения (6). Полагая, однако,

$$u^i = u^i(t), \tag{19}$$

где $u^i(t)$ — произвольные функции параметра t, удовлетворяющие необходимым условиям интегрируемости (которые могут понадобиться в дальнейшем), мы приведем уравнения (1) к виду

$$\frac{dx_a^i}{dt} = f_{aa}^i(x_b^j)\lambda_k^a(u^j(t))\frac{du^k}{dt}. \tag{20}$$

Это — система обыкновенных дифференциальных уравнений. Интегрируя ее, получим

$$x_a^i = \psi_a^i(t, c^1, \ldots, c^r). \tag{21}$$

Пришли к k r-параметрических семейств кривых в пространстве S_n. Для каждого значения t и c^a имеем репер. При фиксированном t и переменных c^a имеем класс реперов группы G_r. Реперы, соответствующие различным значениям t, могут не принадлежать одному классу.

Впредь под интегральными кривыми системы (20) мы будем понимать исключительно кривые, описанные точкой M_1.

Разумеется, интегральные кривые системы (20) (или, что то же, системы [I]) мы можем получить и в том случае, когда эта система вполне интегрируема. Совокупность таких кривых в этом последнем случае будет менее общей, чем в случае ее неинтегрируемости (после подстановки в (I) форм (5)). Систему интегральных кривых уравнений (I) в случае полной интегрируемости этих уравнений мы называем однородным пространством, или еще — голономным пространством с фундаментальной группой G_r. И в том, и в другом случае интегральные кривые размещаются в пространстве S_n с заданной в нем группой G_r.

Геометрия неголономного пространства в каждой дифференциальной окрестности строится точно так же, как и геометрия пространства голономного: в первой дифференциальной окрестности — это теория инвариантов группы (12) с переменными λ_i^a, $d_i u^j$ и параметрами p_i^s, $t_i^{i'}$. В этой окрестности геометрии обоих пространств (голономного и неголономного, соответствующих одной и той же группе G_r) ничем не отличаются друг от друга.

Во второй окрестности к уравнениям (12) прибавляются уравнения (16), к переменным λ_i^a, $d_i u^j$ — переменные λ_{ik}^a, $d_{ik}u^j$, а к параметрам — p^s_{ik}, t^j_{ik}. Теперь, однако, переменных λ^a_{ik} больше, чем в голономном случае, так как теперь они не связаны условиями интегрируемости (2). Тем самым и инвариантов у неголономного пространства во второй окрестности оказывается больше, чем у голономного.

Подобным образом можно получить геометрию неголономных пространств и в окрестностях более высокого порядка.

Инварианты голономного пространства могут быть геометрически истолкованы в терминах геометрии однородного пространства S_n, причем каждый такой инвариант в принципе может иметь бесчисленное множество истолкований. Некоторые из этих истолкований могут быть определенным образом перенесены на неголономное пространство — именно те из них, которые не связаны с интегрируемостью уравнений (I). Каждое из истолкований есть некоторое геометрическое определение инварианта.

Не всегда разные определения одного и того же инварианта голономного пространства приводят к одному и тому же инварианту при перенесении их на пространство неголономное. Происходит определенное расщепление свойств геометрических образов голономного пространства.

Точкой неголономного (как и голономного) пространства мы считаем точку $M'(u^1, \ldots, u^n)$ дифференцируемого многообразия Ω_n, на котором задано поле геометрического объекта $\lambda^a_i(u^j)$. Все инварианты пространства в точке — это инварианты в точке M'. Интегральные кривые пространства — это все кривые пространства S_n, которые соотвестствуют всем же кривым многообразия Ω_n, проходящим через точку M'. Все кривые пространства S_n, соответствующие одной и той же кривой (19), преобразованиями группы G_r в S_n могут быть переведены друг в друга.

Инвариант пространства, соответствующий точке M', есть инвариант всей совокупности кривых пространства S_n, которые отвечают точке M' (соответствуют всем кривым (19), проходящим через точку M'). Все инвариантные понятия, которые могут быть сопоставлены с точкой M', есть понятия, которые можно приписать такой системе интегральных кривых.

Неголономное пространство, определяемое системой линейных форм $\lambda^a_i du^i$, есть не что иное, как пространство с фундаментально-групповой связностью. Пространство S_n есть касательное однородное пространство. Мы считаем, таким образом, все касательные пространства совмещенными друг с другом. Пользуясь терминологией, взятой из проективной геометрии, мы можем считать, что имеем дело с ∞^r полей точек, имеющих одного носителя. Связность определяется равенствами (I), определяющими положение репера $x^i_a + dx^i_a$, близкого к реперу x^i_a. Считая, что реперы принадлежат к двум касательным пространствам, соответствующим точкам $M'(u^i)$ и $M'+dM'$ (u^i+du^i) и называя соответственными точки пространства S_n, имеющие одинаковые координаты относительно этих реперов, получаем соответствие между касательными пространствами, или, что то же, — преобразование пространства S_n, принадлежащее группе G_r. Это соответствие (это преобразование) и определяет связность.

5. Более общие рассмотрения. Более общие рассмотрения мы получим, если будем считать формы ω^a заданными не от n, а от большего числа N переменных $u^a (a=1,\dots,N)$, связанных, однако, $N-n$ дифференциальными уравнениями:

(22) $$\omega^a = \lambda_a^a(u^b)du^a, \qquad a, b, \dots = 1, \dots, N,$$

(23) $$\theta_a^{a^*}(u^b)du^a = 0, \qquad a^*, b^*, \dots = 1, \dots, N-n.$$

Если последняя система уравнений (23) вполне интегрируема, то, выразив $N-a$ переменных u^a через остальные переменные, мы сведем вопрос к предыдущему случаю. При отсутствии полной интегрируемости такое сведение невозможно. Выразив, однако, $N-n$ дифференциалов du^a через остальные n дифференциалов du^i

$$du^{a^*} = L_i^{a^*}(u^a)du^i,$$

мы можем представить формы ω^a в виде:

(24) $$\omega^a = \bar{\lambda}_i^a(u^b)du^i, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Переменные u^a, входящие в систему (23), мы по своему произволу можем разбить на независимые (их n) и искомые. Независимые переменные будем называть голономными и полагать внешние дифференциалы от их обычных дифференциалов развными нулю. Искомые переменные — переменные неголономные, внешние дифференциалы от их „обычных" дифференциалов (в действительности эти дифференциалы таковыми не являются, а есть лишь некоторые линейные формы) будут определяться равенствами (23). Например, если мы примем за голономные переменные первые n переменных u^i, то из (23) находим

(24′) $$du^{a^*} = h_i^{a^*}(u^b)du^i.$$

В таком случае

(25) $$D(du^i) = 0,$$
$$D(du^{a^*}) = \left(\frac{\partial h_i^{a^*}}{\partial u^j} + \frac{\partial h_i^{a^*}}{\partial u^{b^*}} h_j^{b^*}\right)[du^j du^i].$$

Внешний дифференциал формы ω^a зависит от того, какие переменные приняты за голономные и какие — за неголономные. Это обстоятельство не оказывает влияния на геометрию пространства, так как от него не зависят инварианты и инвариантные понятия, определяемые в этой геометрии.

От переменных u^a можно перейти к переменным $u^{b'}$

$$u^{b'} = u^{b'}(u^1, \dots, u^N), \qquad b' = 1, \dots, N. \tag{26}$$

Отсюда

$$du^{b'} = \frac{\partial u^{b'}}{\partial u^a} du^a. \tag{27}$$

Величина $D(du^{b'})$ уже не зависит от нас, она определяется сделанным разбиением переменных u^a на голономные и неголономные. Принимая новые переменные, например, $u^{i'}(i' = 1, \dots, n)$ за независимые, мы уже не можем полагать в общем случае $D(du^{i'}) = 0$.

Исследование геометрических свойств пространства S_n проводится точно так же, как и в случае, кагда $N = n$.

В первой дифференциальной окрестности мы имеем ту же самую группу (12), где теперь символами $p^s_{i'}$, $t^i_{i'}$ обозначены следующие величины:

$$\begin{aligned} p^s_{i'} &= \left(\frac{\partial p^s}{\partial u^i} + \frac{\partial p^s}{\partial u^{a^*}} L^{a^*}_i\right) \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}, \\ t^{i'}_i &= \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i} + \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^{a^*}} L^{a^*}_i. \end{aligned} \tag{28}$$

Символы λ^a_i должны быть теперь заменены символами $\overline{\lambda}^a_i$, определяемыми равенствами

$$\overline{\lambda}^a_i = \lambda^a_i + \lambda^a_{a^*} L^{a^*}_i. \tag{29}$$

Во второй дифференциальной окрестности имеем, кроме равенств (12), еще и равенства (16), в которых параметры $p^s_{i'k'}$, $t^{i'}_{jl}$ определяются формулами

$$\begin{aligned} p^s_{i'k'} = {} & \left(\frac{\partial^2 p^s}{\partial u^i \partial u^k} + \frac{\partial^2 p^s}{\partial u^i \partial u^{a^*}} L^{a^*}_k + \frac{\partial^2 p^s}{\partial u^k \partial u^{a^*}} L^{a^*}_i + \frac{\partial^2 p^s}{\partial u^{a^*} \partial u^{b^*}} L^{a^*}_i L^{b^*}_k + \right. \\ & \left. + \frac{\partial p^s}{\partial u^{a^*}} \left(\frac{\partial L^{a^*}_i}{\partial u^k} + \frac{\partial L^{a^*}_i}{\partial u^{b^*}} L^{b^*}_k\right)\right) \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^k}{\partial u^{k'}} + \left(\frac{\partial p^s}{\partial u^i} + \frac{\partial p^s}{\partial u^{a^*}} L^{a^*}_i\right) \times \\ & \times \left(\frac{\partial^2 u^i}{\partial u^{i'} \partial u^{k'}} + \frac{\partial^2 u^i}{\partial u^{i'} \partial u^{a^*}} L^{a^*}_{k'}\right), \\ t^{i'}_{jl} = {} & \frac{\partial^2 u^{i'}}{\partial u^j \partial u^l} + \frac{\partial^2 u^{i'}}{\partial u^j \partial u^{a^*}} L^{a^*}_l + \frac{\partial^2 u^{i'}}{\partial u^l \partial u^{a^*}} L^{a^*}_j + \frac{\partial^2 u^{i'}}{\partial u^{a^*} \partial u^{b^*}} L^{a^*}_j L^{b^*}_l + \\ & + \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^{a^*}} \left(\frac{\partial L^{a^*}_j}{\partial u^l} + \frac{\partial L^{a^*}_j}{\partial u^{b^*}} L^{b^*}_l\right). \end{aligned} \tag{30}$$

Далее, вместо величин λ^{β}_{ik} мы должны взять величины

$$\bar{\lambda}^a_{ik} = \lambda^a_{ik} + \lambda^a_{ia^*} L^{a^*}_k + \lambda^a_{ka^*} L^{a^*}_i + \lambda^a_{a^*b^*} L^{a^*}_i L^{b^*}_k + + \lambda^a_{a^*}\left(\frac{\partial L^{a^*}_i}{\partial u^k} + \frac{\partial L^{a^*}_i}{\partial u^{b^*}} L^{b^*}_k\right). \tag{31}$$

Аналогичные уравнения получим в последующих окрестностях. Если в (23) положить

$$u^a = u^a(u^{1'}, \ldots, u^{N'}) \tag{32}$$

(обращаем (26)), то эти равенства примут вид

$$\theta^{a'^*}_{a'}(u^{b'})du^{a'} = 0, \tag{33}$$

$$a', b', \ldots = 1, \ldots, N, \quad a'^*, b'^*, \ldots = 1, \ldots, N-n.$$

Отсюда

$$du^{a'^*} = L^{a'^*}_{i'}(u^{a'})du^{i'}, \quad i' = 1, \ldots, n. \tag{34}$$

Теперь при необходимости могут быть найдены величины $t^i_{i'}$, $t^{ij}_{i'}$, ...

Инварианты пространства S_n будут выражаться через $\bar{\lambda}^a_i$, $\bar{\lambda}^a_{ij}$, $d_i u^k$, $d_{ij}u^k$, ... Количество инвариантов в каждой дифференциальной окрестности такое же, как и в случае $N = n$. Действительно, при $N = n$, $\lambda^a_{ijk} = \lambda^a_{ikj}$, $d_{ij}u^k = d_{ji}u^k$ и т.д. (имеет место симметрия по нижним индексам, у λ^a ... — начиная со второго). При $N > n$ этой симметрии в общем случае нет, а потому число величин λ^a_{ijk}, $d_{ij}u^k$, ... становится больше. Но настолько же больше становится и число параметров $t^{i'}_{ij}$, p^s_{ik}, ..., которые теперь также несимметричны по нижним индексам.

Примечание. Вместо конечных уравнений (26) можно было бы брать дифференциальные

$$du^{b'} = P^{b'}_a(u^{1'}, \ldots, u^{N'}, u^1, \ldots, u^N)du^a, \tag{35}$$

$$a, b, \ldots, a', b', \ldots = 1, \ldots, N.$$

При интегрируемости последней системы уравнений мы возвращаемся к предыдущему случаю, при неинтегрируемости оказываемся вынужденными ввести новые переменные *дополнительно* к прежним — кроме u^i в наши формулы будут входить и $u^{i'}$.

6. Неголономные поверхности Д. М. Синцова. Точно так же, как это делается в случае всего пространства, строится геометрия любого вложенного в него геометрического образа. Так, прибавляя к уравнениям (1), (22) и (23) уравнения

$$T^{h^*}_i(u^a)du^i = 0, \quad h^* = 1, \ldots, n-m, \tag{36}$$

получают геометрию m-мерного неголономного многообразия, вложенного в пространство, которое определено коэффициентами уравнений (22) и (23). Инварианты многообразия находятся точно так же, как и ранее, лишь теперь число независимых переменных равняется m (за таковые можно принять $u^1, \ldots, u^m$). Все рассматриваемые ранее теории голономных и неголономных многообразий, теории смешанных (голономных и неголономных) переменных, теории пространств с фундаментально-групповой связностью охватываются описанной схемой.

Возьмем, в частности, теорию неголономных поверхностей Д. М. Синцова, укажем их место в нашей схеме и найдем условие, выделяющее эти поверхности из всех неголономных поверхностей евклидова пространства.

Пусть E_3 — трехмерное евклидово пространство, отнесенное к прямоугольной декартовой системе координат x, y, z. Пусть

$$dz = a(x, y, z)dx + b(x, y, z)dy \tag{37}$$

— уравнение в полных дифференциалах. Если

$$\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial z} b - \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial z} a \equiv 0, \tag{38}$$

то уравнение (37) вполне интегрируемо. Интегрируя его, получим однопараметрическое семейство поверхностей

$$z = \varphi(x, y, C). \tag{39}$$

Через каждую точку некоторой области пространства E_3 проходит поверхность семейства (39). Поверхности (39) голономны. Инварианты и инвариантные образы каждой такой поверхности определенным образом выражаются через функции a, b, их производные и, в соответствующих случаях — через дифференциалы $dx, dy, d^2x, d^2y, \ldots$ В каждой точке x, y, z пространства инварианты и инвариантные образы — свои. Мы можем говорить, что это есть инварианты и инвариантные образы или поверхности, проходящей через указанную точку, или системы интегральных кривых уравнения (37), также проходящих через эту точку.

Если тождество (38) не выполнено, то уравнение (37) не вполне интегрируемо. В этом случае через каждую точку пространства можно также провести систему интегральных кривых уравнения (37). Из функций a, b, их производных и дифференциалов $dx, dy, d^2x, d^2y, \ldots$ можно, как и в голономном случае, образовать инварианты (инвариантность — относительно ортогональных преобразований пространства E_3) и построить инвариантные образы. Эти инварианты и инвариантные образы следует приписать совокупности интегральных кривых уравнения (37). Такую совокупность Д. М. Синцов и называет неголономной поверхностью в точке x, y, z.

В каждой точке x, y, z пространства E_3 все интегральные кривые, проходящие через нее, касаются одной и той же плоскости. Эта плоскость определяется нормальным вектором $(a, b, -1)$ и называется касательной плоскостью неголономной поверхности. В E_3 имеет место определенная корреляция — каждой точке соответствует проходящая через нее плоскость.

Перейдем от декартовых координат x, y, z к произвольным криволинейным координатам x^i,

$$x^i = x^i(x, y, z), \tag{40}$$

а от неподвижных координатных векторов i, j, k — к подвижному реперу e_i

$$e_i = \alpha_i i + \beta_i j + \gamma_i k \tag{41}$$

($\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ — некоторые функции от x^1, x^2, x^3, образующие ортогональную матрицу). Радиус-вектор точки x^i обозначим через A. В таком случае поверхность можем задать деривационными уравнениями

$$dA = \omega^i e_i, \quad de_i = \omega_i^j e_j, \tag{42}$$

$$\omega = 0, \tag{43}$$

где $\omega^i = \lambda_k^i(x^l)dx^k$, $\omega_i^j = -\omega_j^i = \lambda_{ik}^j(x^l)dx^k$, $\omega = \lambda_k(x^l)dx^k$ $(i, j, k = 1, 2, 3)$. Форма ω получается из формы $dz - adx - bdy$ при переходе к переменным x^i.

Легко понять, что формы ω^i, ω_i^j удовлетворяют уравнениям структуры евклидова пространства:

$$D\omega^i = [\omega^k \omega_k^i], \quad D\omega_i^j = [\omega_i^k \omega_k^j]. \tag{44}$$

Уравнения (42) — не что иное, как уравнения (I), уравнения (43) — уравнения (23), уравнения структуры (44) есть уравнения (2), записанные для форм инфинитезимального смещения репера.

Система уравнений (42), (43) есть частный случай системы, определяющей неголономную поверхность. В более общем случае уравнения структуры (44) места не имеют. В этом последнем случае, как и ранее, можно говорить о системе интегральных кривых уравнений (42), (43), проходящих через заданную точку пространства E_3 с заданным для всех их начальным репером. Все такие кривые касаются одной и той же плоскости — касательной плоскости неголономной поверхности, однако теперь в E_3 в общем случае уже нет корреляции.

Каким условиям должны удовлетворять коэффициенты форм ω^i, ω_i^j, ω для того, чтобы корреляция имела место? Условия (44) являются достаточными, но вовсе не необходимыми для этого. Необходимыми и достаточными условиями являются более слабые условия, которые мы сейчас и найдем.

При выполнении этих условий неголономная поверхность евклидова пространства становится неголономной поверхностью Д. М. Синцова ([1]).

Итак, пусть нам дана система дифференциальных уравнений

$$dA = \omega^i e_i, \quad de_i = \omega_i^j e_j, \tag{45}$$

$$\omega = 0, \tag{46}$$

где формы

$$\omega^i = \lambda_k^i(x^l)dx^k, \quad \omega_i^j = -\omega_j^i = \lambda_{ik}^j(x^l)dx^k, \tag{47}$$
$$\omega = \lambda_k(x^l)dx^k$$

— произвольны (при необходимости — дифференцируемые нужное число раз). Совершенно очевидно, что неголономная поверхность, определяемая системой (45)-(46), описывается не только этой системой, но и системой

$$dA = \overline{\omega}^i e_i, \quad de_i = \overline{\omega}_i^j e_j, \tag{48}$$

$$\omega = 0, \tag{49}$$

где

$$\overline{\omega}^i = \omega^i + \mu^i \omega, \quad \overline{\omega}_i^j = \omega_i^j + \mu_i^j \omega \tag{50}$$

— произвольные функции от x^1, x^2, x^3. Неголономная поверхность (48)-(49) будет, очевидно, неголономной поверхностью Д. М. Синцова тогда и только тогда, когда формы $\overline{\omega}^i$, $\overline{\omega}_i^j$ удовлетворяют уравнениям структуры

$$D\overline{\omega}^i = [\overline{\omega}^k \overline{\omega}_k^i], \quad D\overline{\omega}_i^j = [\overline{\omega}_i^k \overline{\omega}_k^j]. \tag{51}$$

Выполняя дифференцирование, будем иметь:

$$\begin{gathered} D\omega^i + [d\mu^i \omega] + \mu^i D\omega - [\omega^k \omega_k^i] - \mu_k^i [\omega^k \omega] + \mu^k [\omega_k^i \omega] = 0, \\ D\omega_i^j + [d\mu_i^j \omega] + \mu_i^j D\omega - [\omega_i^k \omega_k^j] - \mu_k^j [\omega_i^k \omega] + \mu_i^k [\omega_k^j \omega] = 0. \end{gathered} \tag{52}$$

Умножив каждое из этих уравнений внешним образом на ω, получим в результате

$$\begin{gathered} \left[D\omega^i - [\omega^k \omega_k^i], \, \omega\right] + \mu^i [D\omega, \, \omega] = 0, \\ \left[D\omega_i^j - [\omega_i^k \omega_k^j], \, \omega\right] + \mu_i^j [D\omega, \, \omega] = 0. \end{gathered} \tag{53}$$

([1]) Д. М. Синцов, пожалуй, больше, чем кто-либо иной занимался неголономными поверхностями, определяемыми уравнениями (37), однако он не был первым, кто избрал подобные поверхности объектом специального рассмотрения.

В общем случае

$$[D\omega, \omega] \neq 0. \tag{54}$$

Это значит, что уравнение (49) не вполне интегрируемо. Из (53) находим

$$\mu^i = -\frac{[D\omega^i - [\omega^k \omega_k^i], \omega]}{[D\omega, \omega]}, \quad \mu_i^j = -\frac{[D\omega_i^j - [\omega_i^k \omega_k^j], \omega]}{[D\omega, \omega]}. \tag{55}$$

Найденные функции следует подставить в равенства (52). Получим в явном виде условия, связывающие функции λ_k^i, λ_{ik}^i, λ_k. При выполнении этих условий рассматриваемая неголономная поверхность становится поверхностью Д. М. Синцова.

Если имеют место равенства (44), то $\mu^i = \mu_i^j = 0$. Но точно к такому же результату придем и тогда, когда

$$D\omega^i - [\omega^k \omega_k^i] = [H^i \omega], \quad D\omega_i^j - [\omega_i^k \omega_k^j] = [H_i^j \omega], \tag{56}$$

где H^i, H_i^j — некоторые линейные формы. Если они удовлетворяют равенствам (56), то этим же равенствам удовлетворяют и формы $\bar{H}^i = H^i + t^i \omega$, $\bar{H}_i^j = H_i^j + t_i^j \omega$, где t^i, $t_i^j = -t_j^i$ — произвольны.

Если

$$[D\omega, \omega] = 0, \tag{57}$$

но по крайней мере один из числителей в (55) отличен от нуля, то решения не существует. Из (57) видно, что уравнение $\omega = 0$ в этом случае вполне интегрируемо.

Наконец, если одновременно имеют место равенства

$$\begin{gathered} [D\omega, \omega] = 0, \\ [D\omega^i - [\omega^k \omega_k^i], \omega] = 0, \quad [D\omega_i^j - [\omega_i^k \omega_k^j], \omega] = 0, \end{gathered} \tag{58}$$

то уравнения (53) исчезают. Уравнения (52) имеют в этом случае решение относительно μ^i, μ_i^j, зависящее от 6 произвольных функций одного аргумента. Такой случай будет иметь место, в частности, и тогда, когда выполняются уравнения (44).

ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Bortolotti, *Geometria proiettiva differenziala delle superficie anolonome*, Atti del 1 Congresso dell'Unione Italiana, Firenza 1937.

[2] G. T. Gheorghiu, *Sur les variétés non holonomes de l'espace S_3*, Revue de Mathématiques Pures et Appliquées 2 (1957), стр. 501-508.

[3] Н. И. Кованцов, *Несколько аспектов в геометрии неголономных поверхностей*, Analele Ştiinţifice ale Universităţii „Al I. Cuza" din Jaşi (seria nouă), secţiunea 1, a, Matematica, 16 (1970), стр. 63-95.

[4] — *Обобщенные пространства как пространства с фундаментальной группой*, Украинский геометрический сборник, вып. 9 (1970).

[5] М. Р. Роговой, *К проективно-дифференциальной геометрии неголономной поверхности*, там же, вып. 8 (1970), стр. 112-124.

[6] Д. М. Синцов, *Свойства системы интегральных кривых пфаффова уравнения в n переменных*, ИАН, ОМЕН 1931, стр. 1275-1294.

[7] Р. Н. Щербаков, *Эквиаффинно-инвариантные неголономные конгруэнции линейчатого комплекса*, Математический сборник 60 : 2 (1963), стр. 131-158.

[8] G. Vranceanu, *Leçons de géométrie différentielle*, vol. II, 1957.

Reçu par la Rédaction le 9. 11. 1971