ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
IX, 2 (1967)

J. J. WŁODEK (Warszawa)

ROZWINIĘCIE W ŁAŃCUCH PIERWIASTKOWY PEWNYCH MACIERZY ŁAŃCUCHOWYCH

W dziale teorii układów elektrycznych, w którym stosowana jest algebra macierzy ([1], [3], [4], [5]), *macierzą łańcuchową* nazywa się asymetryczną macierz kwadratową $\boldsymbol{A}$ stopnia 2 o elementach zespolonych i o wyznaczniku $\det \boldsymbol{A} = 1$. Macierze łańcuchowe służą do jednoznacznego opisania pewnych własności czwórnika. Przez czwórnik należy rozumieć fragment dowolnego układu elektrycznego otwartego, który ma dostępne cztery równouprawnione punkty elektryczne, tworzące dwie uporządkowane pary końcówek czwórnika. Pośród znanych w literaturze ([7], [8]) i praktycznie wykonywanych czwórników ziarnistych, szczególną pozycję zajmują oporowo-symetryczne czwórniki linearne bierne. Terminem tym określa się [9] czwórniki, które w warunkach dopasowania falowego, przy takich samych wymuszeniach na jednej parze końcówek, dają na drugiej parze końcówek identyczne odpowiedzi dla dwu kierunków przenoszenia czwórnika, poza tym wszelkie występujące w czwórniku, a zależne od czasu, napięcia i prądy spełniają równania liniowe o współczynnikach stałych oraz czwórniki te nie posiadają źródeł energii elektrycznej.

W macierzowej syntezie czwórników linearnych biernych spotykamy się z zagadnieniem określenia takich macierzy łańcuchowych $\boldsymbol{A}_l$, gdzie $l = 1, 2, \ldots, N$, których iloczyn przemienny, dla czwórników oporowo-symetrycznych o identycznym oporze falowym, lub iloczyn nieprzemienny, dla pozostałych typów czwórników, równy jest danej macierzy łańcuchowej:

$$\boldsymbol{A} = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Vmatrix} = \prod_{l=1}^{l=N} \begin{Vmatrix} A_{(l)11} & A_{(l)12} \\ A_{(l)21} & A_{(l)22} \end{Vmatrix} = \prod_{l=1}^{l=N} \boldsymbol{A}_l. \tag{1}$$

Zagadnienie to było już przedmiotem rozważań Hoa [6], który posługując się przekształceniami liniowymi oraz rozkładem macierzy kwadratowej stopnia 2 na iloczyn macierzy trójkątnych, znajduje dla danej macierzy łańcuchowej równoważny iloczyn macierzy o własnościach prostszych niż własności danej macierzy łańcuchowej. Natomiast celem niniejszej pracy jest rozpatrzenie pewnych nowych możliwości rozwinięcia w łańcuch danej macierzy łańcuchowej, która opisuje oporowo-symetryczny czwórnik linearny bierny, realizowany w praktyce. Za pomocą takiego rozwinięcia możemy (po dokonaniu odpowiedniego doboru wartości numerycznej wykładnika pierwiastkowego oraz ustaleniu ilości ogniw łańcucha i ich miejsca położenia w łańcuch) utworzyć taki czwórnik drabinkowy, który spełnia z góry dane założenia, narzucające np. określony rozkład napięć lub rozpływ prądów w poszczególnych gałęziach wzdłużnych i poprzecznych drabinki.

W dalszym ciągu będą brane pod uwagę tylko takie oporowo-symetryczne czwórniki linearne, opisane macierzami łańcuchowymi $\boldsymbol{A}_l$, których elementy spełniają następujące warunki:

1° $A_{(l)11} = A_{(l)22}$;

2° $\mathrm{Re}(A_{(l)ij}) > 0$ dla $i, j = 1, 2$;

3° $\det \boldsymbol{A}_l = A_{(l)11}^2 - A_{(l)12} A_{(l)21} = 1$.

Opór falowy omawianych czwórników oporowo-symetrycznych definiuje się wzorem

$$Z_0 = \sqrt{\frac{A_{(l)12}}{A_{(l)21}}}, \tag{2}$$

gdzie Z_0 jest liczbą rzeczywistą dodatnią, a funkcję przenoszenia czwórnika oporowo-symetrycznego w przypadku stanu dopasowania oporami falowymi par końcówek pierwotnych i wtórnych określa się wzorem

$$K_{m(l)} = A_{(l)11} - Z_0 A_{(l)21}. \tag{3}$$

Dla czwórników linearnych biernych, realizowanych w praktyce, elementy macierzy łańcuchowej $\boldsymbol{A}_l$ spełniają następującą nierówność:

$$\mathrm{Re}(A_{(l)11}) > Z_0 \mathrm{Re}(A_{(l)21}). \tag{4}$$

Rozważmy obecnie iloczyn dwu macierzy łańcuchowych $\boldsymbol{A}_l$ i $\boldsymbol{A}_{l+1}$, z których każda opisuje inny oporowo-symetryczny czwórnik linearny bierny. Jak wiadomo [2], iloczyn dwu macierzy łańcuchowych $\boldsymbol{A}_l$ i $\boldsymbol{A}_{l+1}$ jest przemienny, jeśli elementy tych macierzy spełniają następujące warunki:

$$A_{(l)ij} \neq A_{(l+1)ij} \quad \text{dla} \quad i, j = 1, 2, \tag{5}$$

$$\frac{A_{(l)12}}{A_{(l)21}} = \frac{A_{(l+1)12}}{A_{(l+1)21}} = Z_0^2. \tag{6}$$

Macierz powstała w wyniku mnożenia dwu macierzy łańcuchowych $\boldsymbol{A}_l$ i $\boldsymbol{A}_{l+1}$ jest macierzą łańcuchową, która opisuje oporowo-symetryczny czwórnik linearny bierny o takim samym oporze falowym jak opory falowe czwórników opisanych macierzami $\boldsymbol{A}_l$ i $\boldsymbol{A}_{l+1}$.

Wprowadźmy teraz definicje pierwiastków macierzy łańcuchowej $\boldsymbol{A}$ opisującej oporowo-symetryczny czwórnik linearny bierny, fizycznie realizowany.

Definicja 1. *Pierwiastkiem primogenalnym* o wykładniku pierwiastkowym n macierzy łańcuchowej $\boldsymbol{A}$ nazywamy taką macierz kwadratową $\boldsymbol{a}_p$, dla której 1° $\boldsymbol{a}_p^n = \boldsymbol{A}$, 2° det $\boldsymbol{a}_p = 1$, przy czym między elementami macierzy $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{a}_p$ zachodzi następująca relacja:

$$\frac{a_{p12}}{a_{p21}} = \frac{A_{12}}{A_{21}}.$$

Definicja 2. *Pierwiastkiem apendyksalnym*[1] o wykładniku pierwiastkowym n macierzy łańcuchowej $\boldsymbol{A}$ nazywamy taką asymetryczną macierz kwadratową $\boldsymbol{a}_a$, dla której 1° $\boldsymbol{a}_a^n = \boldsymbol{A}$, 2° det $\boldsymbol{a}_a = -1$, przy czym elementy macierzy $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{a}_a$, podobnie jak w poprzedniej definicji, związane są następującą zależnością:

$$\frac{a_{a12}}{a_{a21}} = \frac{A_{12}}{A_{21}}.$$

Elementy pierwiastka apendyksalnego nie spełniają nierówności (4), a więc pierwiastek apendyksalny nie opisuje czwórnika biernego, fizycznie realizowanego.

Definicje 1 i 2 mogą być również stosowane do takich macierzy kwadratowych $\boldsymbol{C}$ stopnia 2, których elementy leżące na głównej przekątnej są sobie równe ($c_{11} = c_{22}$), a wyznacznik det $\boldsymbol{C} \geqslant 0$. Zamiast warunku 2° trzeba przyjąć wówczas w definicji 1 warunek det $\boldsymbol{c}_p = \sqrt[n]{\det \boldsymbol{C}}$, a w definicji 2 — warunek det $\boldsymbol{c}_a = -\sqrt[n]{\det \boldsymbol{C}}$.

Przy wyznaczaniu wzorów umożliwiających obliczanie pierwiastków o dowolnym wykładniku pierwiastkowym macierzy łańcuchowej opisującej oporowo-symetryczny czwórnik bierny, sugeruje się postępowanie według następującego schematu.

---

[1] Ze względu na wprowadzenie dwu różnych pierwiastków macierzowych, autor proponuje stosowanie symboli $\sqrt[n]{\boldsymbol{A}}^p = \boldsymbol{a}_p$ oraz $\sqrt[n]{\boldsymbol{A}}^a = \boldsymbol{a}_a$, w których odpowiednia litera przy pierwiastniku wskazuje na odpowiednią grupę założeń (pierwiastek primogenalny i apendyksalny).

Punktem wyjścia jest równanie macierzowe

$$\boldsymbol{A} = \begin{Vmatrix} A_{11} & Z_0^2 A_{21} \\ A_{21} & A_{11} \end{Vmatrix} = \boldsymbol{a}^n = \begin{Vmatrix} a_{11} & Z_0^2 a_{21} \\ a_{21} & a_{11} \end{Vmatrix}^n = \begin{Vmatrix} f_{11}(a_{11}, a_{21}) & Z_0^2 f_{21}(a_{11}, a_{21}) \\ f_{21}(a_{11}, a_{21}) & f_{11}(a_{11}, a_{21}) \end{Vmatrix},$$

w którym elementy ostatniej macierzy są wielomianami dwu zmiennych niezależnych a_{11} i a_{21}. Jeśli wykładnik pierwiastkowy n jest parzysty, to funkcja $f_{11}(a_{11}, a_{21})$ jest wielomianem stopnia n zarówno względem zmiennej a_{11}, jak i zmiennej a_{21}, a funkcja $f_{21}(a_{11}, a_{21})$ — wielomianem stopnia $n-1$ również względem każdej z tych zmiennych. Gdy wykładnik pierwiastkowy n jest nieparzysty, funkcja $f_{11}(a_{11}, a_{21})$ jest wielomianem stopnia n względem zmiennej zmiennej a_{11} oraz stopnia $n-1$ względem zmiennej a_{21}, a funkcja $f_{21}(a_{11}, a_{21})$ — wielomianem stopnia $n-1$ względem zmiennej a_{11} oraz stopnia n względem zmiennej a_{21}.

Przyrównując elementy macierzy $\boldsymbol{a}^n$ do odpowiednich elementów macierzy $\boldsymbol{A}$, otrzymujemy układ dwu równań algebraicznych:

$$\begin{aligned} f_{11}(a_{11}, a_{21}) &= A_{11}, \\ f_{21}(a_{11}, a_{21}) &= A_{21}. \end{aligned} \tag{7}$$

Dla układu tego znajdujemy tylko dwa rozwiązania szczególne, a_{p11}, a_{p21} i a_{a11}, a_{a21}, takie że spełnione są równania (7) i warunki

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(a_{p11}) > 0, \quad & \operatorname{Re}(a_{p21}) > 0, \\ \operatorname{Re}(a_{a11}) > 0, \quad & \operatorname{Re}(a_{a21}) > 0 \end{aligned} \tag{8}$$

oraz

$$\begin{aligned} a_{p11}^2 - Z_0^2 a_{p21}^2 &= 1, \\ a_{a11}^2 - Z_0^2 a_{a21}^2 &= -1. \end{aligned} \tag{9}$$

Otrzymane rozwiązania a_{p11}, a_{p21} i a_{a11}, a_{a21} wykorzystujemy do wyznaczenia dwu macierzy będących pierwiastkami primogenalnym i apendyksalnym o wykładniku pierwiastkowym n macierzy łańcuchowej $\boldsymbol{A}$.

Okazuje się, że przy obliczaniu pierwiastków o wykładniku pierwiastkowym n, gdzie $n \geqslant 2$, macierzy łańcuchowych opisujących oporowo-symetryczny czwórnik linearny bierny, otrzymuje się jeden i tylko jeden pierwiastek primogenalny.

Przeprowadźmy według podanego schematu obliczenia pierwiastków primogenalnego i apendyksalnego o wykładniku pierwiastkowym 2 macierzy łańcuchowej $\boldsymbol{A}$.

Obliczanie rozpoczynamy od napisania równania macierzowego:

$$\begin{Vmatrix} A_{11} & Z_0^2 A_{21} \\ A_{21} & A_{11} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & Z_0^2 a_{21} \\ a_{21} & a_{11} \end{Vmatrix}^2 = \begin{Vmatrix} a_{11}^2 + Z_0^2 a_{21}^2 & Z_0^2 2 a_{11} a_{21} \\ 2 a_{11} a_{21} & a_{11}^2 + Z_0^2 a_{21}^2 \end{Vmatrix}.$$

Z wzajemnie jednoznacznego przyporządkowania elementów macierzy $\boldsymbol{a}^2$ elementom macierzy $\boldsymbol{A}$ otrzymujemy następujący układ równań algebraicznych:

$$a_{11}^2+Z_0^2a_{21}^2 = A_{11},$$
$$2a_{11}a_{21} = A_{21}.$$

Rozwiązaniami szczególnymi tego układu równań, które spełniają warunki (8) i (9), są:

$$\tag{10} \begin{aligned} a_{p11} &= \frac{1}{2}\sqrt{(A_{11}+\sqrt{\det\boldsymbol{A}})}, \\ a_{p21} &= \frac{A_{21}}{\sqrt{2(A_{11}+\sqrt{\det\boldsymbol{A}})}} = \frac{1}{Z_0}\frac{1}{2}\sqrt{2(A_{11}-\sqrt{\det\boldsymbol{A}})} \end{aligned}$$

oraz

$$\tag{11} a_{a11} = \frac{1}{2}\sqrt{2(A_{11}-\sqrt{\det\boldsymbol{A}})}, \qquad a_{a21} = \frac{A_{21}}{\sqrt{2(A_{11}-\sqrt{\det\boldsymbol{A}})}}.$$

Z elementów macierzy a_{pij} i a_{aij}, wyrażonych wzorami (10) i (11), łatwo utworzymy macierze

$$\tag{12} \boldsymbol{a}_p = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{2}\sqrt{2(A_{11}+\sqrt{\det\boldsymbol{A}})} & Z_0\frac{1}{2}\sqrt{2(A_{11}-\sqrt{\det\boldsymbol{A}})} \\ \frac{1}{Z_0}\frac{1}{2}\sqrt{2(A_{11}-\sqrt{\det\boldsymbol{A}})} & \frac{1}{2}\sqrt{2(A_{11}+\sqrt{\det\boldsymbol{A}})} \end{matrix} \right\|$$

oraz

$$\tag{13} \boldsymbol{a}_a = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{2}\sqrt{2(A_{11}-\sqrt{\det\boldsymbol{A}})} & \frac{A_{12}}{\sqrt{2(A_{11}-\sqrt{\det\boldsymbol{A}})}} \\ \frac{A_{21}}{\sqrt{2(A_{11}-\sqrt{\det\boldsymbol{A}})}} & \frac{1}{2}\sqrt{2(A_{11}-\sqrt{\det\boldsymbol{A}})} \end{matrix} \right\|.$$

Obliczmy iloczyn pierwiastków primogenalnego i apendyksalnego o wykładniku pierwiastkowym 2 macierzy łańcuchowej $\boldsymbol{A}$, przy założeniu, że $A_{12} \neq 0$ i $A_{21} \neq 0$:

$$\tag{14} \boldsymbol{a}_p\boldsymbol{a}_a = \left\| \begin{matrix} \sqrt{A_{12}A_{21}} & A_{11}\sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}} \\ A_{11}\sqrt{\frac{A_{21}}{A_{12}}} & \sqrt{A_{12}A_{21}} \end{matrix} \right\| = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{A})_2.$$

Macierz $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{A})_2$ nazywamy *geminitą* o wykładniku 2 macierzy łańcuchowej $\boldsymbol{A}$.

Zanotujmy dwa łatwe do sprawdzenia wzory wyrażające podstawowe własności geminity o wykładniku 2:

$$\det \boldsymbol{G}(\boldsymbol{A})_2 = -\det \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{G}\big(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{A}_2)\big)_2 = \boldsymbol{A}.$$

Dwie różne macierze kwadratowe $\boldsymbol{A}_l$ i $\boldsymbol{A}_{l+1}$ stopnia 2, spełniające warunki (5) i (6), są względem siebie *geminalne*, jeśli

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{A}_l)_2 = \boldsymbol{A}_{l+1} \tag{15}$$

lub

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{A}_{l+1})_2 = \boldsymbol{A}_l. \tag{16}$$

Jeśli dwie macierze kwadratowe $\boldsymbol{A}_l$ i $\boldsymbol{A}_{l+1}$ stopnia 2 są względem siebie geminalne, to jedna z nich jest pierwiastkiem primogenalnym, druga zaś pierwiastkiem apendyksalnym pewnej macierzy łańcuchowej $\boldsymbol{A}$.

Słuszne jest twierdzenie odwrotne: jeśli dwie macierze kwadratowe $\boldsymbol{A}_l$ i $\boldsymbol{A}_{l+1}$ stopnia 2 są odpowiednio pierwiastkami primogenalnym i apendyksalnym macierzy łańcuchowej $\boldsymbol{A}$, to są one względem siebie geminalne oraz

$$\boldsymbol{A}_l^2 = \boldsymbol{A}, \tag{17}$$

$$\boldsymbol{A}_{l+1}^2 = \boldsymbol{A}, \tag{18}$$

skąd

$$\boldsymbol{A}_l^2 = \boldsymbol{A}_{l+1}^2, \tag{19}$$

gdzie $\boldsymbol{A}_l \neq \boldsymbol{A}_{l+1}$. Z równań (15), (16) i (19) otrzymujemy

$$\boldsymbol{G}^2(\boldsymbol{A}_l)_2 = \boldsymbol{A}_l^2 \tag{20}$$

oraz

$$\boldsymbol{G}^2(\boldsymbol{A}_{l+1})_2 = \boldsymbol{A}_{l+1}^2. \tag{21}$$

Poza tym $\boldsymbol{A}_l\boldsymbol{A}_{l+1} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{A})_2$, przy czym $\det \boldsymbol{A}_l\boldsymbol{A}_{l+1} = -\det \boldsymbol{A}$.

Przejdźmy teraz do określenia interesującej nas funkcji przenoszenia czwórnika oporowo-symetrycznego w przypadku stanu dopasowania falowego, dla jednego ogniwa z łańcucha składającego się z dwu takich samych czwórników, gdy dana jest macierz łańcuchowa $\boldsymbol{A}$, opisująca cały łańcuch. Podstawiając (10) do (3) otrzymujemy

$$K_m = \frac{1}{2}\sqrt{2(A_{11}+\sqrt{\det \boldsymbol{A}})} - \frac{1}{2}\sqrt{2(A_{11}-\sqrt{\det \boldsymbol{A}})}. \tag{22}$$

W analogiczny sposób można wyznaczyć funkcję przenoszenia K_m dla ogniwa z łańcucha składającego się z trzech identycznych czwórników,

$$K_m = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2(A_{11}+3\sqrt[3]{\det A})} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(A_{11}-\sqrt[3]{\det A})}{\sqrt[3]{2(A_{11}+3\sqrt[3]{\det A})}}}, \tag{23}$$

lub dla ogniwa z łańcucha składającego się z czterech jednakowych czwórników oporowo-symetrycznych:

$$K_m = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2(A_{11}+\sqrt{\det A})}+2\sqrt[4]{\det A}} - \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2(A_{11}+\sqrt{\det A})}-2\sqrt[4]{\det A}}. \tag{24}$$

Obliczmy pierwiastek primogenalny o wykładniku pierwiastkowym n macierzy łańcuchowej A, tj. $A^{n^{-1}}$, gdzie $n \geqslant 2$. Jeśli z $n-1$ pierwiastków primogenalnych $A^{n^{-1}}$ utworzymy nową macierz $A^{(n-1)n^{-1}}$, to macierz pierwiastkowaną A będziemy mogli zastąpić równoważnym iloczynem dwuargumentowym

$$A = A^{(n-1)n^{-1}}A^{n^{-1}}. \tag{25}$$

Następnie weźmy macierz $A^{n^{-1}}$ i obliczmy jej pierwiastek primogenalny o wykładniku pierwiastkowym n, czyli $A^{n^{-2}}$. W wyniku tego działania i zgrupowania $n-1$ pierwiastków w jedną macierz $A^{(n-1)n^{-2}}$ możemy macierz $A^{n^{-1}}$ przedstawić w postaci iloczynu dwuargumentowego

$$A^{n^{-1}} = A^{(n-1)n^{-2}}A^{n^{-2}}. \tag{26}$$

Podstawiając we wzorze (25) na miejsce macierzy $A^{n^{-1}}$ prawą stronę wzoru (26) otrzymujemy

$$A = A^{(n-1)n^{-1}}A^{(n-1)n^{-2}}A^{n^{-2}}.$$

Kontynuując to postępowanie otrzymujemy w końcu szukany łańcuch

$$A = \prod_{l=1}^{l=N} A^{(n-1)n^{-l}}A^{n^{-N}}, \tag{27}$$

złożony z $N+1$ ogniw, gdzie $N \geqslant 1$. Łańcuch tego rodzaju będziemy nazywali *łańcuchem pierwiastkowym uporządkowanym* o wykładniku n.

Położenie poszczególnych ogniw w łańcuchu uporządkowanym jest oczywiście dowolne, gdyż iloczyn macierzy po prawej stronie równania (27) spełnia prawo przemienności.

Przy nieco innym doborze pierwiastków primogenalnych możemy zbudować łańcuch postaci

$$A = \prod_{l=1}^{l=N} A^{(n-1)^{l-1}n^l} A^{(n-1)^N n^N}, \tag{28}$$

składający się z $N+1$ ogniw, gdzie $N \geqslant 1$. Jest to również łańcuch pierwiastkowy uporządkowany o wykładniku n.

Ponieważ wyznaczenie łańcucha polega na tworzeniu iloczynu macierzy z ciągu takiego typu równań macierzowych, w których po lewej stronie równania jest dana macierz $\boldsymbol{A}$, po prawej zaś pierwiastek primogenalny o wykładniku n podniesiony do n-tej potęgi, więc łańcuchy pierwiastkowe są określone jednoznacznie wzorami (27) i (28).

Autor pragnie wyrazić serdeczne podziękowanie Profesorowi Tadeuszowi Cholewickiemu za szczegółową recenzję i cenne uwagi krytyczne dotyczące niniejszej pracy oraz Profesorowi Józefowi Łukaszewiczowi za uwagi, które umożliwiły usunięcie z pracy kilku usterek.

Prace cytowane

[1] A. Cayley, *A memoir on the theory of matrices*, Trans. London Phil. Soc. 148 (1857), str. 17-37.

[2] T. Cholewicki, *Analiza obwodów elektrycznych*, WNT Warszawa 1962.

[3] W. N. Faddiejewa, *Metody numeryczne algebry liniowej*, PWN, Warszawa 1955.

[4] R. A. Frazer, W. J. Duncan i A. R. Collar, *Elementary matrices and some applications to dynamics and differential equations*, London 1960.

[5] F. R. Gantmacher, *Applications of the theory of matrices*, Interscience Publishers, New York 1959.

[6] E. C. Ho, *A general matrix factorization method*, IRE Transactions on Circuit Theory 2 (1955), str. 146-153.

[7] B. Konorski, *Teoria dwójników i czwórników elektrycznych*, PWT, Warszawa 1951.

[8] В. П. Сигорский, *Общя теория четырехполюсника*, Изд. Акад. Наук Укр. ССР, Киев 1955.

[9] *Słownictwo telekomunikacyjne*, Polska Norma PN/T-01001 (projekt).

Praca wpłynęła 21. 2. 1966

Й. Й. ВЛОДЕК (Варшава)

РАЗЛОЖЕНИЕ В КОРНЕВУЮ ЦЕПЬ НЕКОТОРЫХ ЦЕПНЫХ МАТРИЦ

РЕЗЮМЕ

В работе определяется понятие примогенального и аппендиксального корней квадратной матрицы A вюрой степени, в которой элементы главной, диагонали равны между собой, и имеющей определитель равен единице. Рассмотрена схема, дающая возможность вычисления таким образом определенных корней. Определяется геминита с показателем 2 и описываются её основные свойства. Приведены две формулы разложения данной матрицы A в упорядоченную корневую цепь.

J. J. WŁODEK (Warszawa)

THE EVOLUTION OF CERTAIN ITERATIVE MATRICES INTO A ROOT CHAIN

SUMMARY

The paper gives the definitions of primogenale and appendixale roots of second degree square matrices A which have equal diagonal elements ($A_{11} = A_{22}$) and a unit determinant value ($\det A = 1$). A scheme is given allowing the calculation of these roots. Also the definition of a geminita of order 2 is given and its fundamental properties are derived. Two formulas for the evolution of the given matrix A into an ordered root chain are given.
