

GEOMETRYCZNE WSKAŹNIKI ŁĄK

1. Wstęp. Nowe warunki, w jakich znalazły się takie nauki rolnicze, jak hodowla zwierząt, uprawa łąk i pastwisk oraz uprawa roślin strukturotwórczych, spowodowały dążenie do łatwej i obiektywnej oceny zarośnięcia łąki, pastwiska czy gleby przez trawy, inne rośliny pastewne lub strukturotwórcze. Łąkarze, lub ogólniej botanicy, używają do tego celu jednego tylko obiektywnego wskaźnika, mianowicie *pokrycia* łąki przez rośliny badanej odmiany, to jest stosunku pola pokrytego przez te rośliny do pola całej łąki.

Rośliny rosną na łące pojedynczo, kępkami lub większymi płatami (w sposób ciągły). Pojedyncze rośliny lub kępki mogą rosnać gęściej lub rzadziej; kępki mogą być większe lub mniejsze; wielkości kępek mogą być bardziej lub mniej zróżnicowane. Wszystkie te cechy łąki określa się na oko, a co za tym idzie — bardzo subiektywnie. A właśnie na takich cechach opiera się klasyfikację łąk, ocenę ich stanu i rozwoju, porównuje się łąki lub odmiany roślin. Warto więc opracować obiektywne metody pomiaru łąk i wskaźników charakteryzujących opisane cechy.

Niniejsza praca jest próbą charakteryzowania łąk za pomocą pięciu wskaźników:

1. Pierwszy z nich, oznaczmy go przez n , ma określać ilość kępek (płatów) na jednostce pola.

2. Znany łąkarzom wskaźnik pokrycia oznaczamy literą p . Średnia wielkość pola kępki jest stosunkiem p/n .

3. Trzeci wskaźnik, średni obwód L_1 kępki lub suma L obwodów kępek na jednostce pola ($L_1 = L/n$) charakteryzuje wraz ze średnim polem kępki jej kształt. Jeśli przy tym samym polu obwód kępki jest mniejszy, kępka ma kształt bliższy koła; duże obwody świadczą, że linia brzegowa jest rozwinięta.

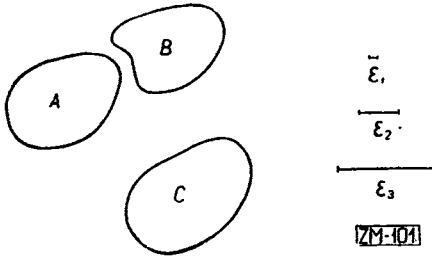
4. Stosunek pola do długości linii brzegowej oznaczmy przez H . Jest to wskaźnik charakteryzujący kształt kępek. Opiszemy również inny wskaźnik kształtu, F , będący stosunkiem pola kępki do kwadratu jej obwodu. Wskaźnik F zależy od kształtu i od zróżnicowania wielkości kępek.

5. Inne informacje o kształcie i zróżnicowaniu wielkości kępek daje wskaźnik V będący współczynnikiem wariacji pewnych mierzonych odcinków (cięciw).

W niniejszej pracy podamy kilka sposobów oceny tych 5 wskaźników za pomocą prostych pomiarów punktowych, liniowych i powierzchniowych. Zgodnie z oznaczeniami przyjętymi w statystyce estymator wskaźnika x będziemy oznaczali przez \hat{x} .

2. Geometryzacja zagadnienia. Łąkę uważamy za poziomy obszar płaski L . Rzut pionowy na płaszczyznę łąki roślin badanej odmiany (np. kostrzewy łąkowej) lub badanej grupy odmian (np. motylkowych) uważamy za zbiór Z' leżący w obszarze L .

Do każdej odmiany (grupy odmian) można dobrać takie ε , żeby rzut pionowy pojedynczej rośliny, rzut kępki lub rzut ciąglego pokrycia stanowił zbiór ε -spójny, natomiast rzut dwóch roślin oddzielnie rosnących lub rzut dwóch oddzielnych kępek stanowił zbiór ε -niespójny o dwóch ε -komponentach. (Precyzyjne określenie ε -spójności można znaleźć na przykład w [1], str. 298. Rysunek 1 wyjaśnia to pojęcie w sposób popularny.)



Rys. 1. Zbiór złożony z części A , B i C nie jest ε_1 -spójny i składa się z trzech ε_1 -komponent. Ten sam zbiór nie jest ε_2 -spójny, lecz składa się tylko z dwóch ε_2 -komponent, ponieważ części A i B stanowią jedną ε_2 -komponentę (to jest zbiór ε_2 -spójny). Ten sam zbiór jest ε_3 -spójny

Przez Z oznaczymy ε -wypuklenie zbioru Z' :

$$Z = W_\varepsilon(Z').$$

Jest to zbiór, którego dopełnienie $L - W_\varepsilon(Z')$ jest sumą wszystkich kół (bez obwodów) o średnicy ε , leżących w obszarze L a nie mających punktów wspólnych ze zbiorem Z' . Opera-

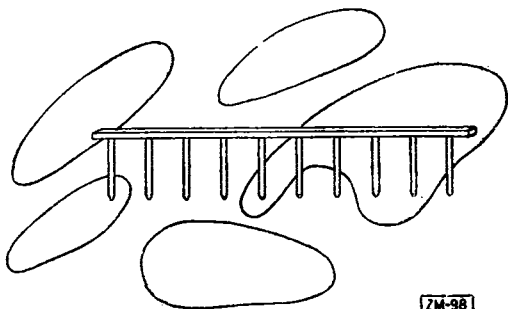
cja ε -wypuklania nie zmienia ε -spójności; to znaczy jeśli jakiś podzbiór $E' \subset Z'$ jest ε -spójny, to zbiór $E = W_\varepsilon(E')$ jest też ε -spójny i na odwrót, jeśli zbiór $E = W_\varepsilon(E')$ jest ε -spójny, to i zbiór E' musi być ε -spójny. Operacja ε -wypuklania nie rozrywa ani zlepia ε -komponent.

Naszym zadaniem jest scharakteryzować następujące własności zbioru Z : 1. ilość ε -komponent zbioru Z na jednostkę pola obszaru L , 2. względną miarę, tj. stosunek miary zbioru Z do miary obszaru L i średnią wielkość ε -komponent, 3. średni obwód ε -komponenty lub długość brzegu zbioru Z na jednostkę pola, 4. stosunek pola zbioru Z do długości jego linii brzegowej i 5. współczynnik wariacji tego stosunku. Ostatnie dwie własności mówią zarazem o wielkości ε -komponent, o zróżnico-

waniu ich wielkości i o kształcie, przy czym przez kształt należy tu rozumieć rozwinięcie linii brzegowej ε -komponent, tj. długość linii brzegowej przy ustalonym polu ε -komponenty.

Wszystkie te charakterystyki będziemy szacowali na podstawie najprostszych pomiarów próbkowych stosowanych w łąkarstwie. Będą to mianowicie pomiary: *punktowy* próbki 0-wymiarowej, *taśmowy* próbki 1-wymiarowej i *trójkątowy* próbki 2-wymiarowej.

3. Pomiar punktowy. Idealny *pomiar punktowy* polega na losowaniu punktów obszaru Z (np. niezależnym losowaniem rzędnych i odciętych) i liczeniu frakcji punktów trafiających w zbiór Z . Ta liczba punktów podlega rozkładowi dwumianowemu o średniej równej względnej mierze zbioru Z . Pomiar taki nie pozwala na oszacowanie żadnej innej interesującej nas cechy zbioru Z prócz jego względnej miary, tzw. pokrycia zbioru Z obszaru L .



Rys. 2. Linijka Lévy'ego. Na łące widać 5 kępek roślin badanej odmiany i linijkę Lévy'ego. Pierwszy (od lewej), piąty, ósmy i dziewiąty zęb (razem cztery zęby) przytykają do roślin badanej odmiany

Łąkarze używają innego pomiaru punktowego, a mianowicie pomiaru *linijką Lévy'ego* [2]. Jest to grzebień o dziesięciu zębach odległych o 10 cm jeden od drugiego; długość grzebienia wynosi około 1 m. Grzebień ten ustawia się zębami ku ziemi (rys. 2) i liczy się ilość zębów przytykających do roślin badanej odmiany, czyli trafiających w zbiór Z . Zmienna p oznacza frakcję punktów jednej dziesiątki trafiających w zbiór Z . Wartość oczekiwana tej zmiennej losowej równa jest pokryciu $p(Z)$. Jeśli przez \bar{p} oznaczymy średnią arytmetyczną zmierzonych wartości zmiennej p , to \bar{p} jest estymatorem pokrycia $p(Z)$:

$$(1) \quad \hat{p}(Z) = \bar{p}.$$

Wariancja σ^2 zmiennej p może się okazać normalna, podnormalna lub nadnormalna, odpowiednio do tego, czy niezależne, ujemnie lub dodatnio skorelowane są następujące zdarzenia [3]:

- a) punkt A należy do zbioru Z ;
- b) punkt B , losowo wybrany spośród odległych od A o 10 cm, należy do zbioru Z .

Zdarzenia a) i b) są skorelowane dodatnio w większości odmian roślin łąkowych przeze mnie zbadanych. Powoduje to nadnormalność

wariancji, a co za tym idzie mniejszą pewnością szacowanego tą metodą pokrycia $p(Z)$. W celu zmniejszenia tej nadnormalności racjonalne byłoby dla szacowania $p(Z)$ powiększyć w liniice Lévy'ego odległość między zębami z dziesięciu do kilkunastu cm (zależnie od badanych odmian).

Dodatnia korelacja zdarzeń a) i b) może być wynikiem wielkości ε -komponent zbioru Z i odległości między nimi. Można więc miarę nadnormalności wariancji zmiennej p użyć za wskaźnik charakteryzujący wielkość ε -komponent i odległości między nimi. Wskaźnik ten nazwijmy s :

$$(2) \quad s = \frac{\sigma^2}{10p(Z)[1 - p(Z)]}$$

Następująca tablica zawiera wartości tego wskaźnika dla zbiorów Z złożonych z kół o promieniu r i o środkach leżących w węzłach siatki kwadratowej o boku g . Wariancje obliczyłem z 10 obserwacji po 10 punktów rozstawionych na liniice Lévy'ego co 10 cm.

TABLICA 1

Wartości wskaźnika s w zależności od g/r i r

$r \backslash g/r$	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	średnio
50	1,9	3,0	5,4	3,8	4,6	3,3	3,9	13,1	4,9
20	0,6	1,8	1,3	1,2	1,9	2,5	2,0	1,1	1,6
10	1,2	0,7	1,2	1,7	1,5	1,8	1,0	2,1	1,4
6,7	0,4	0,7	0,8	1,3	0,6	0,4	1,2	0,9	0,8
średnio	1,0	1,5	2,2	2,0	2,1	2,0	2,0	4,3	2,2

Jak widać, wielkość wskaźnika s zależy bardziej od wielkości kół niż od ich rozmieszczenia. Dalej opiszemy inne wskaźniki nadające się lepiej do określania wielkości ε -komponent. Wskaźnik s można więc w praktyce pominąć.

4. Pomiar taśmowy [4]. Pomiar taśmowy polega na N -krotnym losowym rozciągnięciu na łące taśmy mierniczej o długości l_k (gdzie $k=1,2,\dots,N$ jest numerem rozciągnięcia) i na zanotowaniu współrzędnych, to jest odległości od początku taśmy wszystkich punktów, w których taśma przecina brzeg zbioru Z . Odejmując każdą współrzędną punktu wejścia taśmy na zbiór Z od współrzędnej następnego punktu zejścia taśmy ze zbioru Z , znajdujemy długość cięciwy zbioru Z . Otrzymujemy więc statystyczny szereg długości cięciw zbioru Z . Cięciwy te oznaczamy przez d_{ik} , gdzie $k=1,2,\dots,N$ jest numerem rozciągnięcia taśmy a $i=1,2,\dots,n_k$ numerem cięciwy na taśmie; n_k oznacza ilość

cięciw zbioru Z na taśmie przy jej k -tym rozciągnięciu. Przez *losowe rozciągnięcie taśmy* rozumiemy rozciągnięcie jej wzdłuż prostej o losowo wybranych współrzędnych Croftona [5] r i ϑ ($-\infty \leq r \leq \infty$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$). Również początek taśmy i zwrot na prostej wybieramy losowo.

Przez $m(Z, r, \vartheta)$ oznaczymy miarę liniową na prostej o współrzędnych r, ϑ przecięcia tej prostej ze zbiorem Z . Wiadomo ([6], str. 284), że dla każdego ustalonego ϑ płaską miarę zbioru Z można określić wzorem

$$m(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} m(Z, r, \vartheta) dr,$$

skąd

$$m(Z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} m(Z, r, \vartheta) dr d\vartheta.$$

Pokrycie, czyli względna miara płaska zbioru Z , wyraża się więc wzorem

$$p(Z) = \frac{m(Z)}{m(L)} = \frac{\int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} m(Z, r, \vartheta) dr d\vartheta}{\int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} m(L, r, \vartheta) dr d\vartheta}.$$

Wprowadźmy estymator pokrycia

$$\bar{p} = \frac{\sum_{k=1}^N m(Z, r_k, \vartheta_k)}{\sum_{k=1}^N m(L, r_k, \vartheta_k)}.$$

Przy założeniu ekwipartycji różnych rozciągnięć taśmy estymator \bar{p} jest zgodny i nieobciążony.

Licznik wyrażenia na \bar{p} jest sumą wszystkich cięciw zbioru Z przy wszystkich N rozciągnięciach taśmy. Mianownik jest sumą długości taśm. Wynika stąd praktyczna metoda szacowania pokrycia $p(Z)$. Należy mianowicie sumę długości cięciw zbioru Z podzielić przez sumę długości taśm:

$$(3) \quad \bar{p} = \frac{\sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{n_k} d_{ik}}{\sum_{k=1}^N l_k}, \quad \hat{p}(Z) = \bar{p}.$$

Estymacja wyrażona ostatnim wzorem jest tym dokładniejsza, im większe jest N .

Można by badać rozkład estymatora \bar{p} i w szczególności jego wariancję. Uważam to jednak za zbędne. Wariancja teoretyczna estymatora

\bar{p} jest znacznie mniejsza od wartości jego wariancji empirycznej, wynikłej z niedokładności odczytań punktów przecięcia taśmy z brzegiem zbioru Z . Szybkość zbieżności estymatora \bar{p} należy szacować wyłącznie na podstawie wariancji empirycznej.

Przez $n(Z, r, \vartheta)$ oznaczmy liczbę punktów, w których prosta o współrzędnych r, ϑ przecina brzeg zbioru Z . W myśl twierdzenia Croftona [7] długość λ brzegu zbioru Z wyraża się wzorem

$$\lambda(Z) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} n(Z, r, \vartheta) dr d\vartheta.$$

Wprowadzamy wskaźnik $H(Z)$ równy stosunkowi pola (miary płaskiej) zbioru Z do długości jego brzegu. Będzie on miał wymiar długości; gdy zbiór Z powiększa się homotetycznie, wskaźnik $H(Z)$ wzrasta proporcjonalnie do liniowych wymiarów zbioru Z ; zależy on wreszcie od tego, czy linia brzegowa zbioru Z jest bardziej czy mniej rozwinięta (może się ona składać z wielu krzywych zamkniętych).

$$H(Z) = \frac{m(Z)}{\lambda(Z)} = \frac{\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} m(Z, r, \vartheta) dr d\vartheta}{\frac{1}{2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} n(Z, r, \vartheta) dr d\vartheta}.$$

Estymatorem wskaźnika H może być \bar{d}/π :

$$(4) \quad \bar{d}(Z) = \frac{\sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{n_k} d_{ik}}{\sum_{k=1}^N n_k} \quad \hat{H}(Z) = \frac{\bar{d}(Z)}{\pi}$$

Wielkość $\bar{d}(Z)$ jest to średnia cięciwa zbioru Z . Ze względu na znaczne błędy pomiarowe, wartości empirycznej wariancji średniej cięciwy przewyższają teoretyczną i dlatego empiryczna wariancja stanowi o dokładności estymatora.

Średnie kwadratowe odchylenie cięciw (σ_d) jest niezależne od \bar{d} . Może więc ono służyć za nowy wskaźnik dający nowe informacje o kształcie zbioru Z . Zwłaszcza nadaje się do tego współczynnik wariacji cięciw czyli stosunek kwadratowego odchylenia średniego do średniej cięciwy

$$(5) \quad V(Z) = \frac{\sigma_d}{\bar{d}}.$$

Wskaźnik $V(Z)$ nie ulega zmianie przy przekształcaniu homotetycznym zbioru Z . Wskaźnik ten nie zależy więc od wielkości zbioru Z i jego

ε -komponent, zależy natomiast od kształtu ε -komponent i zróżnicowania ich wielkości.

5. Wskaźniki H i V dla kół i elips. Niech \mathcal{L} będzie płaszczyzną a zbiór $Z=K(r)$ rodziną kół o promieniu r i o środkach w węzłach siatki kwadratowej o boku $g > 2r$. Z definicji wskaźnik H jako stosunek pola do obwodu koła równa się $r/2$, a zatem $\bar{d}(K) = \pi r/2$. Aby znaleźć współczynnik wariacji cięciw, obliczamy

$$\bar{d}^2 = \frac{\pi^2 r^2}{4}, \quad \bar{d}^2 = \frac{1}{r} \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \frac{8}{3} r^2, \quad \sigma^2 = \left(\frac{8}{3} - \frac{\pi^2}{4}\right) r^2,$$

$$V = \frac{\sigma}{\bar{d}} = \frac{\sqrt{8/3 - \pi^2/4}}{\pi/2} \doteq 0,286.$$

A zatem wskaźnik V nie zależy ani od r , ani od g ; jest on więc dla kół stałą, niezależną od wielkości i rozmieszczenia tych jednakowych kół.

Niech \mathcal{L} będzie płaszczyzną a zbiór $Z=A(v^2, b)$ rodziną elips o półosiach $a \geq b$ i parametrze $v^2 = 1 - b^2/a^2$. Środki elips leżą w punktach węzłowych siatki kwadratowej o boku $g > 2a$, duże osie są równoległe do prostej stałej. Podobnie jak w poprzednim przykładzie można obliczyć

$$\bar{d}(A) = \frac{\pi^2 b}{4E(v^2)}, \quad V(A) = \sqrt{\frac{128E(v^2)K(v^2)}{3\pi^4}} - 1.$$

Funkcje $E(x)$ i $K(x)$ są pełnymi całkami eliptycznymi. Dalej podano dwie tablice. Z tablicy 2 widać, jak zmieniają się wskaźniki \bar{d} i V w zależności od b/a u elips o stałym polu $\pi ab = 352 \text{ mm}^2$.

TABLICA 2

b/a	1,0	0,7	0,5	0,3	0,2	0,1	0,04	0,01	0,003
\bar{d}	16,6	16,4	15,3	13,0	11,0	8,2	5,2	2,6	1,4
V	0,28	0,30	0,39	0,52	0,63	0,81	1,01	1,27	1,47

Z tablicy 3 widać, jak zmieniają się wskaźniki V i pola elips o stałej średniej cięciwie $\bar{d} = 16,6 \text{ mm}$.

TABLICA 3

b/a	1,0	0,7	0,5	0,3	0,2	0,1	0,01
V	0,28	0,30	0,39	0,52	0,63	0,81	1,27
pole	112	118	134	183	252	475	4560

Na to, by wskaźnik V był stały, musi być stały stosunek b/a . Zachodzi to tylko przy homotetycznym powiększaniu lub zmniejszaniu zbioru A .

Niech \mathcal{L} będzie płaszczyzną, a zbiór $Z=B(q)$ rodziną kół o różnych promieniach $r_i=10/2^{-i}$ ($i=1,2,\dots,q$) równomiernie rozłożonych na płaszczyźnie, przy czym w prostokątach o wymiarach nieograniczenie wzrastających stosunek liczby kół o promieniu r_i do liczby kół o promieniu 10 dąży do 2^i . W tym przypadku mamy

$$\bar{d} = 10 \frac{\pi}{q} \left(1 - \frac{1}{2r}\right),$$

$$V(B) = \frac{q}{\pi(1-1/2^q)} \sqrt{\frac{32}{9q} - \frac{\pi^2}{q^2} + \frac{\pi^2}{2^{q-1}q^2} - \left(\frac{32}{9q} + \frac{\pi^2}{q^2}\right) \frac{1}{4^q}}.$$

W tabelicy 4 podano wartości \bar{d} i V dla zbiorów $B(q)$ przy różnych q .

TABLICA 4

q	1	3	5	10	20	50	100	1000
\bar{d}	15,7	9,2	6,1	3,1	1,6	0,62	0,31	0,03
V	0,286	0,62	0,93	1,62	2,36	4,13	6,05	19,1

Z przykładów tutaj przytoczonych wynika, że do każdej z góry danej pary liczb $\bar{d} > 0$ i V ($0,286 \leq V \leq 1,5$) można dobrać zbiór Z o średniej cięciwie \bar{d} i o współczynniku wariacji V ; przy tym można to zrobić co najmniej w dwa sposoby: dobierając albo zbiór Z_1 złożony z przystających elips, albo zbiór Z_2 złożony z kół o różnych promieniach. Należy przy tym zauważyć, że przez homotetyczne powiększanie lub zmniejszanie zbioru Z powodujemy zmianę średniej cięciwy \bar{d} , ale wskaźnik wariacji V pozostaje bez zmiany.

Kształt prawdziwych kępek traw (ϵ -komponent zbioru Z) badanych przeze mnie nie powoduje na ogół powiększenia się wskaźnika V powyżej 0,4, a zatem większe wartości na V należy przypisywać raczej różnicowaniu wielkości kępek.

6. Pomiar trójkątowy. Spośród różnych siatek najlepiej do pomiaru próbek płaskich służy siatka trójkątowa [8]. *Pomiar trójkątowy* polega na losowym umieszczeniu w obszarze \mathcal{L} trójkąta równobocznego, podzielonego na 100 równych trójkątów równobocznych o boku b . Liczbę trójkątów zawartych całkowicie w zbiorze Z oznaczamy przez k_1 , a liczbę trójkątów zawierających punkty zbioru Z i punkty uzupełnienia $\mathcal{L}-Z$ przez k_2 . Liczba k_1 rośnie, gdy rośnie pokrycie $p(Z)$; rośnie, gdy zbiór Z powiększa się homotetycznie, a maleje, gdy powiększa się

długość linii brzegowej zbioru Z . Liczba k_2 , jako liczba trójkątów przeciętych linią brzegową zbioru Z , jest w przybliżeniu równa liczbie punktów przecięcia linii brzegowej przez trzy rodziny prostych równoległych tworzących siatkę trójkątową. Zastrzeżenie „w przybliżeniu” wynika stąd, że niektóre trójkąty mogą być więcej niż dwukrotnie przecięte linią brzegową zbioru Z . Z twierdzenia Croftona [7] wynika, że liczba k_2 jest proporcjonalna do długości linii brzegowej zbioru Z .

Dla zbiorów Z spójnych istnieje silna korelacja między polem (wyrażonym przez $p(Z)$) a liczbą $t(Z) = k_1 + k_2/2$. Korelacja ta jest postaci $p(Z) = c_1 t(Z) + c_2$, gdzie c_1 jest bliskie jedności, a $c_2 < 0$ zależy od wielkości trójkątów siatki. Dla zbiorów Z niespójnych, liczba c_2 zależy od ilości komponent zbioru Z . Wynika stąd, że nie można szacować pokrycia $p(Z)$ za pomocą estymatora $t(Z)$, jakkolwiek estymator ten mógłby się wydać niezłym.

Lepszym estymatorem pokrycia $p(Z)$ niż $t(Z)$ mógłby się okazać estymator $t'(Z) = c_1 k_1 + c_2 k_2$, przy odpowiednio dobranych stałych c_1 i c_2 . Korzystając z tego, że k_2 jest z dużą dokładnością proporcjonalne do długości linii brzegowej zbioru Z , możemy wskaźnik $H(Z)$ (rozd. 4) szacować jako stosunek $t'(Z)$ do k_2 (z dokładnością do pewnego czynnika stałego). Estymatorem tym jest $c_1 k_1/k_2 + c_2$. Wynika stąd, że wskaźnik $k = k_1/k_2$ powinien być silnie skorelowany z innymi estymatorami $H(Z)$, np. z $\bar{d}(Z)$. Jeśliby natomiast okazało się, że wskaźniki k i \bar{d} nie są dość silnie skorelowane, to należałoby wnosić, że żaden estymator t' nie daje dobrych oszacowań pokrycia $p(Z)$. Tak się właśnie zdarzyło przy pomiarze łąk w Osobowicach (rozd. 9).

Znana łąkarzom *metoda Webera* [9] szacowania pokrycia polega na liczeniu trójkątów (w oryginalnej metodzie Webera — kwadracików), które co najmniej połową swego pola tkwią w zbiorze Z . Metoda ta jest poprawna tylko wtedy, gdy wymiary trójkątów siatki są małe w porównaniu ze średnicami ε -komponent zbioru Z lub w porównaniu z jego średnią cięciwą. Łatwo bowiem spostrzec, że jeśli na przykład pole każdej ε -komponenty zbioru Z jest mniejsze niż $1/2$ pola trójkąta, a ε -komponenty są rozmieszczone dość luźno, tak żeby jeden trójkąt nie zawierał punktów różnych ε -komponent, to pokrycie metodą Webera zostanie oszacowane na zero. W oryginalnej metodzie Webera używa się kwadracików o boku 10 cm. Okazuje się, że kwadraciki te są za duże. W zaproponowanej przeze mnie metodzie trójkątowej bok trójkąta $b = 7$ cm. Pole trójkąta równe $21,2 \text{ cm}^2$ stanowi w przybliżeniu $1/5$ pola kwadracika Webera ¹⁾.

¹⁾ Badaniom nad szacowaniem pokrycia łąk zamierzam poświęcić inną, szczegółowszą pracę.

Przy pomiarze trójkątowym łatwo oszacować liczbę $n(Z)$ ε -komponent zbioru Z na jednostce pola. Estymatorem jest średnia liczba ε -komponent w trójkącie podzielonym przez pole trójkąta. Za ε -komponenty leżące w trójkącie należy uważać te, które co najmniej połową swego pola leżą wewnątrz trójkąta.

Gdyby kępki były rozrzucone po łące w sposób zupełnie przypadkowy, można by oczekiwać, że estymator \bar{n} liczby $n(Z)$ będzie miał rozkład Poissona i, co za tym idzie, wariancja tego estymatora będzie równa oczekiwanej wartości, tj. $n(Z)$. Tak jednak nie jest, rozmieszczenie kępek na łące jest do pewnego stopnia jednostajne w tym sensie, że można dla każdej odmiany traw ustalić taką liczbę a , że w każdym kwadracie o polu co najmniej a liczba kępek na jednostce pola będzie różniła się od $n(Z)$ z zadaniem prawdopodobieństwem (np. 95%) mniej niż o zadaną z góry małą liczbę (np. 0,01). Podobnie zachowują się kępki traw nie tylko pod względem ich ilości, lecz na przykład pod względem pola. Zjawisko to znane jest w biologii pod nazwą *das Minimiarealproblem* ([10], str. 146). Rozkład estymatora \bar{n} jest więc pewną kombinacją rozkładów jednostajnego i Poissona. Wariancja estymatora \bar{n} w porównaniu z jego oczekiwaną wartością może charakteryzować wielkość pola a . Badania rozkładu estymatora \bar{n} mogą być ciekawym tematem oddzielnej pracy.

7. Wskaźniki i ich estymatory. a. Liczbę $n(Z)$ ε -komponent zbioru Z na jednostce pola szacujemy za pomocą pomiaru trójkątego w sposób opisany w końcu poprzedniego rozdziału.

Liczbę $n(Z)$ wyznaczamy w sztukach na ar, liczbę $n_d(Z)$ w sztukach na pole trójkąta.

b. Pokrycie $p(Z)$ można oceniać za pomocą linijki Lévy'ego (rozd. 3) lub metodą taśmową (rozd. 4). Pierwsza z tych metod daje, przy dostatecznych odstępach między drutami linijki, estymator o rozkładzie dwumianowym czyli o średnim kwadratowym błędzie względny

$$\sqrt{\frac{p(1-p)}{10}} \leq \frac{1}{\sqrt{40}} \doteq 0,158.$$

Na to, żeby błąd średniej nie przekraczał 3% z prawdopodobieństwem 95%, wystarczy 10 pomiarów linijką Lévy'ego. Praktyczne pomiary przeprowadzone (przez autora z pomocą magistrantów łąkarstwa) jesienią 1952 r. na łąkach majątku doświadczalnego w Czechnicy pod Wrocławiem — potwierdziły te wywody.

Drugi estymator ma większą wariancję empiryczną. Dla 11 pomiarów taśmą o długości 50 cm (w Czechnicy) otrzymaliśmy średni błąd kwadratowy stanowiący około 4% pokrycia. Łąkarze estymują pokrycie

również metodą Webera (analogiczną do trójkątowej). Ta metoda może jednak dać błąd systematyczny, jak to opisaliśmy w rozdziale 6.

Pokrycie określamy przez stosunek pola pokrytego do całego, czyli frakcję pokrytą. Iloczyn pola trójkąta przez pokrycie, czyli średnie pole pokryte w trójkącie oznaczamy przez $p_A(Z)$ i wyrażamy w cm^2 .

Średnia wielkość kępki $p_1(Z)$ jest stosunkiem średniego pola pokrytego w trójkącie do liczby kępek w trójkącie: $p_1(Z) = p_A(Z)/n_A(Z)$; mierzymy ją w cm^2 .

c. Długość L (w metrach) linii brzegowej zbioru Z (na 1 ar) oceniamy metodą trójkątową za pomocą estymatora $k_2\pi/3b$ (b — bok trójkątka). Teoretyczne własności tego estymatora wynikają z teorii Croftona [7]. W praktyce współczynnik wariacji liczb k_2 (z pojedynczych rzutów) wynosi około 10%, czyli błąd średniej z 10 pomiarów wynosi około 3%.

Przez $L_A(Z)$ można oznaczyć długość linii brzegowej zbioru Z średnio w trójkącie. Przez $L_1(Z) = L_A(Z)/n_A(Z)$ oznaczamy średni obwód kępki. Będziemy go mierzyli w cm .

d. Kształt $H(Z)$ zbioru Z można scharakteryzować stosunkiem jego pola do długości linii brzegowej. Dla oceny tego wskaźnika opisaliśmy trzy estymatory: \bar{d}/π (punkt 4), $p_A(Z)/L_A(Z)$ i $k(Z) = k_1/k_2$ (punkt 6). Wskaźnik $H(Z)$ ma tę wadę, że zależy od wielkości kępek, czyli nie jest niezmiennikiem przekształceń homotetycznych. Mierzy się w jednostkach długości.

Niezmiennikiem tych przekształceń byłby inny wskaźnik kształtu, wskaźnik $F(Z)$ równy stosunkowi średniej wielkości kępki do kwadratu średniego obwodu kępki. Można go ocenić jednym z następujących trzech estymatorów:

$$c_1 \frac{n_A(Z) p_A(Z)}{k_2^2}, \quad c_2 \frac{\bar{d}(Z) n_A(Z)}{k_2}, \quad c_3 \frac{\bar{d}^2}{p_1}.$$

Litery c_1, c_2 i c_3 oznaczają stałe tak dobrane, żeby wskaźnik $H(Z)$ mógł dla zbioru Z złożonego z równych kół przyjąć wartość 1; $c_1 = 124,5$, $c_2 = 12,55$, $c_3 = 1,27$. Pierwszy z tych estymatorów wymaga oszacowania $p(Z)$ (np. metodą Lévy'ego) oraz $n(Z)$ i k_2 — metodą trójkątową. Można więc obliczyć bez użycia metody taśmowej. Drugi estymator wymaga metody taśmowej i trójkątowej, a nie wymaga metody Lévy'ego. Trzeci estymator wymaga metody taśmowej (również dla oszacowania $p(Z)$) i trójkątowej. Wskaźnik $F(Z)$ zależy od kształtu i od zróżnicowania wielkości kępek.

Innym wskaźnikiem zależnym również od tych dwóch cech zbioru Z jest współczynnik wariacji cięciw zbioru Z : $V(Z) = \sigma\bar{d}/\bar{d}$. Jest on również niezmiennikiem przekształceń homotetycznych.

8. Pomiar łąk modelowych. W trakcie badań narysowałem i pomierzyłem 18 łąk modelowych złożonych z różnych figur geometrycznych i innych. Opiszę tu 7 spośród nich:

K_{10} — łąka złożona z kół o promieniu 10 cm, o środkach w punktach węzłowych siatki kwadratowej o boku oczka równym 30 cm;

K_r — łąka złożona w równej ilości z kół o promieniach 20 cm, 10 cm, 5 cm, 2,5 cm i 1,25 cm rozmieszczonych mniej więcej równomiernie;

E — łąka złożona z elips o osiach $a=54$ cm i $b=32$ cm rozmieszczonych mniej więcej równomiernie;

T — łąka złożona z trójkątów równobocznych o boku 32 cm rozmieszczonych mniej więcej równomiernie;

S_1 — łąka złożona z sierpów księżycowych powstałych z dwóch kół o promieniu 36 cm o środkach odległych o 8 cm; sierpy były rozmieszczone mniej więcej równomiernie;

S_2 — łąka złożona z sierpów powstałych z takich samych kół o środkach odległych o 18 cm.

R — łąka złożona z figur rysowanych przypadkowo od ręki (nieregularnych), różnych wielkości i kształtów, rozmieszczonych mniej więcej równomiernie;

Dla każdej z tych łąk obliczyłem wartości wskaźników opisanych w rozdziale 7 albo czysto teoretycznie, albo, gdy to nie było możliwe, z pomiaru bezpośredniego (planimetrowaniem pól, mierzeniem obwodów itd.). Na każdej z tych łąk powtórzyłem 10 razy pomiar Lévy'ego, taśmowy i trójkątowy, znalazłem wartości estymatorów (dla wskaźników) i ich średnie odchylenia kwadratowe. Wszystkie te liczby są zawarte w tablicy 5. Tablica ta składa się z części 1, 2, 3, 4, 4', 5, 2' i 3' oddzielonych jedna od drugiej wolnym wierszem. W pierwszym wierszu każdej części jest podany wskaźnik i jego prawdziwe wartości (obliczone teoretycznie lub bezpośrednio pomierzone) dla 7 modelowych łąk. W następnych wierszach podano oceny tego wskaźnika dokonane różnymi estymatorami i w 6 przypadkach kwadratowe odchylenia średnie tych estymatorów.

9. Pomiar rzeczywistych łąk. Dnia 25. IV. 1953 r. przeprowadziłem wraz z pracownikami naukowymi Katedry łąkarstwa i magistrantami studiującymi przy tej katedrze pomiary 7 poletek na łąkach majątku doświadczalnego Wyższej Szkoły Rolniczej we Wrocławiu położonych w Osobowicach koło Wrocławia. Na każdym poletku dokonaliśmy pomiaru taśmowego (około 20 m) i trójkąowego (4 lub 5 losowych rzutów trójkątem). Nie szacowaliśmy liczby kępek w trójkącie i dlatego zamiast tej liczby użyłem w obliczeniach liczby otrzymanej w następujący sposób: Założyłem, że wszystkie kępki mają kształt kół o średniej

TABLICA 5

	Jedn. miary	Wskaźnik	Estymator	σ estymatora	K_{10}	K_r	E	T	S_1	S_2	R
1	szt.	$n_A(Z)$	n	σ_n	2,36	2,44	0,99	1,91	1,02	1,21	5,77
					2,2	3,0	0,9	1,6	0,9	1,4	4,9
					0,2	0,3	0,1	0,2	0,1	0,1	0,4
2		$p(Z)$	p_L	σ_{pL}	0,349	0,400	0,65	0,40	0,30	0,275	0,43
					0,33	0,42	0,61	0,43	0,38	0,34	0,38
					0,045	0,037	0,048	0,041	0,052	0,075	0,049
					0,34	0,27	0,50	0,40	0,27	0,33	0,25
3	cm	$L_A(Z)$	L_A	σ_L	0,032	0,052	0,048	0,054	0,028	0,038	0,029
					14,8	11,9	13,9	18,3	11,8	14,0	14,3
					15,1	12,9	12,4	16,9	13,9	14,0	11,7
4	cm	$H(Z)$	1. d/π	σ_1	0,35	0,38	0,79	0,41	0,48	0,54	0,73
					0,50	0,70	0,99	0,46	0,55	0,42	0,34
					0,40	0,41	0,69	0,53	0,39	0,42	0,30
					0,04	0,07	0,07	0,05	0,05	0,05	0,04
					0,47	0,57	0,95	0,52	0,50	0,51	0,57
4'		$F(Z)$	2. p/L	σ_3	0,29	0,42	0,91	0,32	0,46	0,23	0,25
					0,29	0,42	0,91	0,32	0,46	0,23	0,25
					0,020	0,106	0,084	0,030	0,042	0,018	0,040
					1,00	1,72	0,88	0,60	0,60	0,46	1,72
					0,87	1,70	0,86	0,62	0,40	0,63	3,00
5		$V(Z)$	3. k	σ_3	0,73	1,20	0,62	0,63	0,32	0,53	1,57
					0,61	1,11	0,51	0,67	0,30	0,45	1,06
					0,286	0,594	0,33	—	—	—	—
					0,47	0,83	0,50	0,47	0,57	0,55	0,72
					3,14	3,48	13,8	4,42	6,37	4,80	0,85
2'	cm ²	$p_1(Z)$	p_1		3,28	1,91	11,8	5,30	6,36	5,00	1,08
					6,28	4,87	14,05	9,6	11,5	11,5	2,47
3'	cm	$L_1(Z)$	L_1		6,9	4,3	13,8	10,5	15,4	10,0	2,4

cięciwie \bar{d} ; założyłem dalej (co jest tylko grubym przybliżeniem), że średnim polem kępki jest pole koła o średniej cięciwie \bar{d} czyli $4\bar{d}^2/\pi$; ponieważ na jednostce pola jest p jednostek pola szacowanej rośliny, więc jest jej $\pi p/4\bar{d}^2$ kępek. Pokrycie szacowaliśmy metodą taśmową. Linijki Lévy'ego nie używaliśmy. Tablica 6 zawiera liczbowe wartości oszacowań wskaźników pomierzonych łąk.

O p i s ł ą k

I. Kostrzewa łąkowa, monokultura na irygacyjnym poletku doświadczalnym. Porost równy, czysty, mało pustych płatów.

II. Kostrzewa łąkowa, monokultura na irygacyjnym poletku doświadczalnym. Porost rzadkimi kępkami, dużo pustych płatów.

III. Kostrzewa łąkowa, monokultura na irygacyjnym poletku doświadczalnym. Porost rzadkimi kępkami i oddzielnymi roślinami. Zarosnięta gwiazdnicą.

IV. Kostrzewa łąkowa, monokultura na irygacyjnym poletku doświadczalnym. Porost jednolity dość gęsty.

V. Wyczyniec łąkowy, monokultura na irygacyjnym poletku doświadczalnym. Porost kępkowy, rzadki, zachwaszczony przez mniszka, jasnotę i inne.

VI. Kupkówka i rajgras angielski, bikultura na irygacyjnej łące. Łąka założona w 1949 r., dobra, bardzo wydajna. Porost kępkami, trochę pustych miejsc.

TABLICA 6

Nr łąki	I	II	III	IV	V	VI K	VI R
Długość pomiaru taśmowego	18,0	18,0	21,0	17,0	16,0	30,0	30,0
Liczba rzutów trójkątem	5	5	5	4	4	5	5
$n(Z)$	38	26	82	84	59	16	26
$p(Z)$	0,33	0,10	0,15	0,30	0,29	0,24	0,17
$H(Z)$ $\left\{ \begin{array}{l} \bar{a}/\pi \\ k \end{array} \right.$	2,6	1,7	1,2	1,7	2,0	3,5	2,3
$V(Z)$	0,53	0,65	0,77	0,73	1,03	0,65	0,59
$p_1(Z)$ cm ²	85	37	18	36	49	150	66
$L_1(Z)$ cm	13,7	23,0	8,9	10,1	13,7	31,8	20,8

Jak widać z powyższej tablicy, proponowane wskaźniki mogą służyć do charakteryzowania łąk. Na przykład dobre łąki (I i VI) odznaczają się dużym wskaźnikiem H , to jest dużą średnią cięciwą, dużymi średnimi polami kępek (p_1) i małymi wskaźnikami wariacji cięciw (V). Wskaźniki te mogą służyć do porównywania stanu jednej rośliny na dwóch różnych łąkach; na przykład kostrzewa łąkowa na łąkach I, II, III i IV ma bardzo różne wskaźniki. Można ich używać do porównywania dwóch różnych roślin na tej samej łące; na przykład na łące VI kupkówka różni się od rajgrasu angielskiego szczególnie wielkością kępek. Wreszcie mogą te wskaźniki przydać się do badania rozwoju poszczególnych odmian, czyli do porównywania porostu roślinami jednej odmiany na jednej łące w różnych momentach.

Rozważania zawarte w tej pracy dotyczą łąk, ale można je przenieść i do innych zagadnień. Można użyć proponowanych wskaźników do badania pokrycia skóry plamami lub płyty żelaznej rdzą, pokrycia płytki szklanej koloniami bakterii i pokrycia kraju lasami.

Prace cytowane

- [1] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914.
 [2] E. B. Lévy and E. A. Madden, *The point method of pasture analysis*, The New Zealand Journal of Agriculture 46 (1933).
 [3] St. Zubrzycki, *Les inégalités entre les moments des variables aléatoires équivalentes*, *Studia Mathematica* 14 (1954), str. 232-242.
 [4] Th. C. E. Fries, *Den synekologiska linjetaxeringsmetoden*, Flora och Fauna 6, Uppsala 1919.
 [5] H. Steinhaus, *O długości krzywych empirycznych i jej pomiarze, zwłaszcza w geografii*, Sprawozdania Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego 4 (1949), do-
 datek 5.
 [6] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, Москва-Ленинград 1950.
 [7] H. Fast et A. Götz, *Sur l'intégrabilité riemannienne de la fonction de Crofton*, *Annales de la Société Polonaise de Mathématique* 25 (1952), str. 309-322.
 [8] M. Warmus, *O obliczaniu pól obszarów płaskich za pomocą siatek równoległobocznych*, Sprawozdanie z wspólnego VII zjazdu polskich matematyków i III zjazdu czechosłowackich matematyków, Praga 1949, str. 309-310.
 [9] C. A. Weber und B. D. Weber, *Beitrag zur Kenntnis der Dauerweiden Bayerns und ihrer naturgemässen Ansaat*, Berlin 1926.
 [10] G. Einar du Rietz, *Zu methodologischen Grundlagen der modernen Pflanzensoziologie*, Uppsala 1921.

KATEDRA STATYSTYKI MATEMATYCZNEJ WYŻSZEJ SZKOŁY ROLNICZEJ we WROCŁAWIU

Praca wpłynęła dnia 23. 12. 1953 r.

Ю. ПЭРКАЛЬ (Вроцлав)

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНДЕКСЫ ЛУГОВ

РЕЗЮМЕ

Качество луга определяется описательно. В результате зрительного наблюдения говорим о густой или редкой, равномерной или неравномерной растительности, о больших или малых кочках. Исключением является одно качество луга: процент поверхности заросшей исследуемой растительностью. Этот процент исчисляется разными методами: Леви, Вебера или Фриза.

В предлагаемой работе эти три метода подвергаются исследованию. Оказывается, что метод Леви является методом измерения точечной (нульмерной) выборки луга. Метод Фриза является методом измерения линейной (одномерной)

выборки луга. Наконец, метод Вебера, в котором предлагаю заменить квадраты треугольниками, является методом измерения плоской (двумерной) выборки.

Измерение этими тремя методами дает не только объективную оценку процента поверхности заросшей исследуемой растительностью, но и другие индексы характеризующие луг. Кроме покрова $p(Z)$, т. е. процента луга поросшего растительностью Z , определяю число $n(Z)$ кочек на единице площади, среднюю величину $W(Z)$ кочек, средний периметр $L_1(Z)$, индекс формы $F(Z)$ кочек как соотношение площади к квадрату периметра кочки (умноженное на постоянную) и индекс формы $K(Z)$ кочки как соотношение площади к периметру.

Оказывается, что этот последний индекс формы $K(Z)$ можно оценить при помощи средней хорды $\bar{d}(Z)$ кочек и что коэффициент вариации $v(Z)$ хорд кочек также характеризует величину и форму кочек.

Для каждого из этих индексов я привел одну или несколько оценок и подверг экспериментальному исследованию их дисперсию на примере модельных лугов. Именно, я измерил модельный луг K_{10} , на котором роль кочек играли круги одинаковой величины и которых центры находились в узлах прямоугольной сетки. K_r обозначает модельный луг состоящий из кругов разной величины. E обозначает луг состоящий из одинаковых эллипсов, T — из треугольников. S_1 и S_2 — луги состоящие из луночек, S_1 — больших, S_2 — меньших. Наконец L обозначает луг, в котором роль кочек играли фигуры нарисованные произвольно.

Таблица 5 содержит теоретические значения (вычисленные или непосредственно измеренные) выше указанных индексов для модельных лугов и эмпирические значения этих индексов, полученные при помощи предложенных в работе методов; приведены там также средние квадратические отклонения эмпирических значений.

Методы предложены в работе были мною проверены на действительных лугах и результаты измерений приведены в таблице 6. Иллюстрируют они словесные описания исследованных лугов.

Оказывается, что предложенные индексы дают некоторой объективный образ луга. При помощи этих индексов можно сравнивать растительность одной разновидности на разных лугах, растительность различных разновидностей на том-же лугу или на разных лугах, наконец — растительность одной разновидности на том-же лугу в разное время. Это имеет большое значения при исследовании развития лугов.

При помощи предложенных в этой работе методов можно также исследовать пятна на коже, ржавчины на железной пластинке и т. п.

J. PERKAL (Wrocław)

GEOMETRICAL MEADOW INDICES

SUMMARY

The quality of a meadow is defined in a rather descriptive way. As a result of visual observation we say that the overgrowth is dense or sparse, uniform or not uniform, with large or small patches, etc. One feature of the meadow is an exception here: the fraction of the surface covered with the kind of vegetation that is being investigated. Those fractions are estimated qualitatively by various methods, e.g. the methods of Lévy, of Weber and of Fries.

In this paper the above-mentioned three methods of measurement are discussed. Lévy's method consists in measuring a point (zero-dimensional) meadow samples. Fries' method consists in measuring linear (one-dimensional) meadow sample. Weber's method, in which I suggest the use of triangles instead of squares, consists in measuring plane (two-dimensional) samples.

By means of the above three methods we obtain an objective estimate not only of the fraction of the surface covered with the plants under consideration but also of other indices that characterize the meadow in question. Besides the covering $\rho(Z)$, i.e. the fraction covered with plants Z , we determine the number $n(Z)$ of patches, the mean size $W(Z)$ of the patches, their mean perimeter $L_1(Z)$, the index of the form $F(Z)$ taken as the ratio of the area of a patch to the square of its perimeter (multiplied by a constant) and the index of form $K(Z)$ taken as the ratio of the area to the perimeter. We find that the index of form $K(Z)$ can be estimated by means of the mean chord $\bar{d}(Z)$ of the patches and that the coefficient of variation $v(Z)$ of the chords also determines the size and the form of the patches.

One or more estimators are given for each of those indices and their variations are examined empirically on the example of a few dummy meadows. The author has measured a dummy meadow K_{10} , in which the part of patches is played by circles of equal size with centres located at lattice points. K_R denotes a dummy meadow consisting of circles of different size. E denotes a meadow consisting of identical ellipses, T — of triangles, S_1 and S_2 — of crescents (S_1 — larger crescents, S_2 — smaller ones). Finally, B denotes a meadow in which the part of patches is played by various figures drawn off-hand. Table 5 contains the theoretical values (calculated or measured directly) of the above-mentioned indices for the dummy meadows and the empirical values of those indices obtained by the methods suggested in this paper; standard deviations of the empirical values are also given.

The author has also tried the methods described in the paper on real meadows; the results of measurements are given in Table 6. They illustrate the descriptions of the measured meadows. The indices suggested are found to give a certain objective image of the meadow. With their aid it is possible to compare plants of the same variety in different meadows, plants of different varieties in the same meadow, and also plants of one variety in the same meadow at different times. This is of particular importance for investigating the development of meadows.

The methods described here can also be used to investigate spots covering the skin, rust stains covering an iron plate, etc.