COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. LVII 1989 FASC. 1

ОБ ОДНОМ КОМБИНАТОРНОМ ТОЖДЕСТВЕ, СВЯЗАННОМ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

М. В. ПАУКШТО (ЛЕНИНГРАД)

Строится решение бесконечной системы линейных уравнений, выходящей за рамки классификации Егорычева [4]. Дается применение к краевой задаче Неймана для линейного эллиптического уравнения бесконечного порядка на $[0, 1] \subset \boldsymbol{R}^1$. Теория краевых задач для уравнений такого типа развита Дубинским [1]–[3].

Теорема 1. *Обозначим через A_h — пространство функций аналитических в круге $\{z \in \boldsymbol{C}: |z| < h\}$ и пусть*

$$a(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(-z)^j \in A_h, \quad b(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_{j+1}(-z)^j \in A_1.$$

Для того, чтобы существовала последовательность $\{c_j\}_{j=0}^{\infty}$, такая что

$$\text{(1)} \qquad \begin{gathered} c(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^{-j-1}, \quad c(1/z) \in A_{r^{-1}},\ r < h, \\ \sum_{j=0}^{k} a_j(-1)^{k-j} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_{i+j}}{(i+k-j+1)!} = \beta_{k+1} \quad (k = 0, 1, \ldots), \end{gathered}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовал линейный непрерывный функционал $\Lambda \in A_h^*$, для которого $\Lambda(F(w_1, \cdot)) = b(w_1)$,

$$F(w_1, w_2) = a(w_1 w_2)\frac{\exp[w_1] - \exp[w_2]}{w_1 - w_2}, \quad w_i \in \boldsymbol{C}\ (i = 1, 2).$$

При этом

$$\Lambda(f) = (2\pi i)^{-1} \int_{|z|=\varrho} f(z)c(z)dz, \quad r < \varrho < h,\ f \in A_h.$$

Доказательство. Имеем для $i, j = 0, 1, 2, \ldots$

$$c_i = \operatorname*{Coef}_z c(z)z^i, \quad (-1)^j a_j = \operatorname*{Coef}_z a(z)z^{-j-1}.$$

Следовательно

$$d_{k,s} = \sum_{j=0}^{\min\{k,s\}} \frac{(-1)^j a_j}{(s+k-2j+1)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \operatorname*{Coef}_{z_1}\{a(z_1)z_1^{-j-1}\}$$

$$\times \operatorname*{Coef}_{z_2}\{\exp[z_2]z_2^{-s-k+2j-2}\} \operatorname*{Coef}_{z_3}\left\{\frac{z_3^{-(k-j)-1}}{1-z_3}\right\} \operatorname*{Coef}_{z_4}\left\{\frac{z_4^{-(s-j)-1}}{1-z_4}\right\}$$

$$= \operatorname*{Coef}_{z_1,z_3,z_4}\left\{\exp[z_2]z_2^{-k-s-2}\frac{z_3^{-k-1}z_4^{-s-1}}{(1-z_3)(1-z_4)}a(z_2^2z_3z_4)\right\}$$

$$= (2\pi i)^{-3}\int_{|z_2|=\varrho} \exp[z_2] \int_{\substack{|z_3|=\varrho_1\\|z_4|=\varrho_2}} \left\{\frac{(z_2z_3)^{-k-1}(z_2z_4)^{-s-1}}{(1-z_3)(1-z_4)}a(z_2^2z_3z_4)\right\}dz_2\wedge dz_3\wedge dz_4,$$

где $0<\varrho_1<\varrho_2<1$, $0<\varrho^2\varrho_1\varrho_2<h$. После замены переменных $w_1=z_2z_3$, $w_2=z_2z_4$, $r_1=\varrho\varrho_1$, $r_2=\varrho\varrho_2$ найдем

$$d_{k,s} = (2\pi i)^{-2}\int_{\substack{|w_1|=r_1\\|w_2|=r_2}} a(w_1w_2)w_1^{-k-1}w_2^{-s-1}\frac{\exp[w_2]-\exp[w_1]}{w_2-w_1}dw_1\wedge dw_2.$$

Из (1) получаем

$$\sum_{s=0}^{\infty} c_s d_{k,s} = \sum_{s=0}^{\infty} \operatorname*{Coef}_{w_1,w_2}\left\{a(w_1w_2)w_1^{-k-1}w_2^{-s-1}\frac{\exp[w_2]-\exp[w_1]}{w_2-w_1}\right\}\operatorname*{Coef}_{z} c(z)z^s$$

$$= \operatorname*{Coef}_{w_1,w_2}\left\{a(w_1w_2)\frac{\exp[w_2]-\exp[w_1]}{w_2-w_1}c(w_2)w_1^{-k-1}\right\} = (-1)^k\beta_{k+1}.$$

Таким образом

$$(2\pi i)^{-1}\int_{|w_2|=\varrho} a(w_1w_2)\frac{\exp[w_2]-\exp[w_1]}{w_2-w_1}c(w_2)dw_2 = b(w_1), \qquad r<\varrho<h,$$

и теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Если в условиях теоремы 1 система*

$$\left\{\frac{1}{k!}\frac{\partial^k F(w_1,w_2)}{\partial w_2^k}\bigg|_{w_2=0}\right\}_{k=0}^{\infty} \tag{2}$$

является полной усиленно линейно-независимой системой в A_1, то решение (1) единственно.

Следствие 2. *Если в условиях теоремы 1 система (2) является базисом Шаудера в пространстве A_1, $\{\Lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ — биортогональная (2) система функционалов, то для любой функции $b(w_1)\in A_1$, такой что*

$$\varlimsup_{k\to\infty} |\Lambda_k(b)|^{1/k} < h,$$

последовательность $\{\Lambda_k(b)\}_{k=0}^{\infty}$ — единственное решение (1).

В качестве приложения рассмотрим квадратичную форму

$$\mathscr{A}[u] = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} a_k |D^k u|^2 dx, \qquad a_k \in \boldsymbol{R}^1,\ a_k > 0,\ k = 0, 1, \ldots$$

Задача Неймана в вариационной постановке это задача минимизации функционала $I(u) = \mathscr{A}[u] + 2L(u)$ на множестве

$$W^\infty\{a_k\} = \{u \in C^\infty[0, 1]\colon \mathscr{A}[u] < \infty\},$$

где L — некоторый непрерывный линейный функционал на $W^\infty\{a_k\}$. Эквивалентная двойственная задача [5] заключается в минимизации

$$J(\sigma) = \mathscr{B}[\sigma] + 2\Gamma(\sigma)$$

на множестве

$$M^\infty\{a_k^{-1}\} = \{\sigma = \{\sigma_k\}_{k=0}^\infty\colon \sigma_k \in \mathring{W}_2^1[0, 1],\ k = 0, 1, \ldots, \mathscr{B}[u] < \infty\},$$

где Γ — функционал соответствующий L и

$$\mathscr{B}[u] = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{-1} (\sigma_k + D\sigma_{k+1})^2 dx.$$

Краевая задача отвечающая задаче на минимум для функционала $J(\sigma)$ имеет вид

$$(3) \qquad \begin{gathered} B(D)\sigma = F, \qquad F = \{F_k\}_{k=0}^\infty, \\ \sigma|_{x=0} = \alpha, \qquad \sigma|_{x=1} = \beta, \qquad \alpha = \{\alpha_k\}_{k=0}^\infty, \qquad \beta = \{\beta_k\}_{k=0}^\infty, \end{gathered}$$

где $B(D)$ — бесконечная трехдиагональная матрица, k-я строка которой

$$0, 0, \ldots, 0,\ -a_{k-1}^{-1} D,\ a_k^{-1} - a_{k-1}^{-1} D^2,\ a_k^{-1} D,\ 0, 0, \ldots$$

Не ограничивая общности можно считать, что $F \equiv 0$, $\alpha = 0$, $\beta_0 = 0$, тогда непосредственная проверка показывает, что

$$(4) \qquad \begin{gathered} \sigma = \{\sigma_k\}_{k=0}^\infty, \\ \sigma_0 \equiv 0, \qquad \sigma_{k+1}(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j (-1)^{k-j} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{i+k-j+1}}{(i+k-j+1)!} c_{i+j} \ (k = 0, 1, \ldots), \end{gathered}$$

удовлетворяет уравнению $B(D)\sigma = 0$ и условию $\sigma|_{x=0} = 0$.

Теорема 2. *Если последовательность* $\{a_k\}_{k=0}^\infty$ *такова, что*

$$\varlimsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} \leqslant h^{-1},$$

а система (2) *образует базис Шаудера в пространстве* A_1 *с биортогональной системой функционалов* $\{\Lambda_k\}_{k=0}^\infty$, *то для любой последовательности* $\beta = \{\beta_k\}_{k=0}^\infty$, $\beta_0 = 0$,

$$\varlimsup_{k\to\infty} |\beta_k|^{1/k} \leqslant 1, \qquad \varlimsup_{k\to\infty} |\Lambda_k(b)|^{1/k} < h, \qquad b(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_{j+1} (-z)^j,$$

последовательность функций (4) *с* $c_i = \Lambda_i(b)$ $(i = 0, 1, \ldots)$ *удовлетворяет* (3). *В частности при* $h \leqslant 1$ *последовательность* (4) *является решением задачи на минимум для функционала* $J(\sigma)$, *а* $u = a_0^{-1} D\sigma_1$ *решает задачу Неймана для функционала* $I(u)$.

Доказательство. Достаточно проверить, что $u \in W^\infty\{a_k\}$. При $k \geqslant k_0$

$$|D^k u| = \Big|\sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^s}{s!} c_{s+k}\Big| \leqslant \sum_{s=0}^{\infty} \frac{h_0^{s+k}}{s!} \leqslant h_0^k \exp[h_0], \qquad h_0 < h \leqslant 1.$$

Тем самым теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. А. Дубинский, *Пространства Соболева бесконечного порядка и поведение решений некоторых краевых задач при неограниченном возрастании порядка уравнения*, Мат. Сб. 98 (140) (1975), стр. 163–184.

[2] — *Нетривиальность пространств Соболева бесконечного порядка в случае полного евклидового пространства и тора*, там же 100 (142) (1976), стр. 436–446.

[3] — *Следы функций из пространств Соболева бесконечного порядка и неоднородные задачи для нелинейных уравнений*, там же 106 (148) (1978), стр. 66–84.

[4] Г. П. Егорычев, *Интегральные представления и вычисление комбинаторных сумм*, Новосибирск 1977.

[5] М. В. Паукшто, *О связи между деформациями и напряжениями в поликристаллах*, Вестник ЛГУ, вып. 13 (1978), стр. 171–173.

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
198 904 ЛЕНИНГРАД
ПЕТЕРГОФФ, БИБЛИОТЕЧНАЯ ПЛ. 2, СССР

Reçu par la Rédaction le 7.1.1981