ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVIII (1966)

Sur une fonction extrémale liée aux moyennes arithmétiques des distances généralisées des couples de points d'un ensemble

par B. Szafirski (Kraków)

1. Introduction. Continuant nos recherches [6], nous nous proposons de développer dans le présent travail, les idées de M. F. Leja exposées dans les travaux [3] et [4].

Soit E un ensemble compact de points d'un espace topologique R, $\omega = \omega(x, y)$ une fonction réelle continue de deux points x et y variables dans R remplissant, quels que soient x et y, la condition $\omega(x, y) = \omega(y, x)$. Une telle fonction sera dite *distance généralisée* ou *fonction génératrice*. Désignons par $x^{(n)}$ un système de $n \geqslant 2$ points $x_1, \ldots, x_n$ de E et formons la moyenne

$$(1) \qquad a(x^{(n)}, \omega) = 2[n(n-1)]^{-1} \sum_{1 \leqslant i < k \leqslant n} \omega(x_i, x_k) = 2[n(n-1)]^{-1} A(x^{(n)}, \omega).$$

Lorsque les points x et y varient arbitrairement dans E, la fonction $\omega(x, y)$ atteint un maximum M et un minimum m. Donc, lorsque les points $x_1, \ldots, x_n$ parcourent de façon arbitraire l'ensemble E, la moyenne arithmétique (1) satisfait aux inégalités

$$m \leqslant a(x^{(n)}, \omega) \leqslant M.$$

Désignons par $a_n(E, \omega)$ la borne supérieure de $a(x^{(n)}, \omega)$, lorsque les points du système $x^{(n)}$ varient arbitrairement dans E, et soit

$$(2) \qquad q^{(n)} = \{q_1, \ldots, q_n\}$$

un système de n points de E, pour lequel

$$(3) \qquad a_n(E, \omega) = a(q^{(n)}, \omega) = \sup_{x^{(n)} \subset E} a(x^{(n)}, \omega).$$

Le système (2) satisfaisant à la condition (3) sera dit *système de points extrémaux* de E de rang n par rapport à la fonction génératrice ω. On sait [3] que si $\omega(x, y)$ est non négative et R est un espace euclidien, alors la suite (3) converge vers une limite finie

$$\lim_{n\to\infty} a_n(E, \omega) = a(E, \omega) \tag{4}$$

dite *écart arithmétique* de l'ensemble E par rapport à la fonction ω. Il est clair qu'on a

$$m \leqslant a(E, \omega) \leqslant M .$$

En appliquant la méthode du travail [3] il est facile de prouver que la limite (4) existe dans le cas général, lorsque R est un espace topologique quelconque et $\omega(x, y)$ une fonction génératrice quelconque.

Le but de ce travail est d'étudier les suites de fonctions

$$\varphi_n(x, E, \omega) = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} \omega(x, q_i), \qquad n = 2, 3, \ldots \tag{5}$$

où x est un point variable dans l'espace R et $q^{(n)}$ est un système satisfaisant à la condition (3). En particulier, nous allons donner les conditions suffisantes pour l'existence de la limite de la suite (5) et nous allons étudier certaines propriétés de cette limite.

Au cours de la préparation de ce travail les conseils de M. le Professeur F. Leja nous ont été d'un grand secours, et nous l'en remercions vivement.

2. Écart arithmétique de l'ensemble et borne supérieure de certaines intégrales. Soit $K = K(E)$ la classe de toutes les répartitions non négatives $\sigma = \sigma(\Delta)$ de la masse unité sur l'ensemble E, c'est-à-dire la classe de toutes les fonctions additives d'ensemble $\sigma(\Delta)$ non négatives sur tout ensemble borelien $\Delta \subset R$ et telles que $\sigma(E) = 1$, $\sigma(R\setminus E) = 0$. Désignons par

$$\mu_n = \mu_n(\Delta), \qquad n = 2, 3, \ldots \tag{6}$$

la fonction d'ensemble de la classe K égale à 0 lorsque Δ ne contient aucun des points (2), et à k/n lorsqu'il en contient k. Il est clair que les fonctions $\mu_n(\Delta)$, $n = 2, 3, \ldots$, sont uniformément bornées. D'après un théorème de De la Vallée Poussin ([1], [7]), de chaque suite infinie de fonctions additives d'ensemble, uniformément bornées, on peut extraire une suite partielle convergente.

Soit $\{\mu_{n_\nu}\}$ une suite partielle de $\{\mu_n\}$ tendant vers une limite

$$\lim_{\nu\to\infty} \mu_{n_\nu}(\Delta) = \mu(\Delta) = \mu . \tag{7}$$

La répartition μ appartient à la classe K; nous l'appellerons *répartition extrémale* par rapport à l'ensemble E et la fonction génératrice ω.

THÉORÈME 1. *L'écart arithmétique $a(E,\omega)$ s'exprime par la formule*

$$a(E,\omega)=\iint_{EE}\omega(x,y)\,d\mu\,d\mu=\sup_{\sigma\in K}\iint_{EE}\omega(x,y)\,d\sigma\,d\sigma. \tag{8}$$

Démonstration. Posons $\Omega_n=\sum_{i=1}^{n}\omega(q_i,q_i)$ et remarquons que

$$\begin{aligned}2[n(n-1)]^{-1}A(q^{(n)},\omega)&=2[n(n-1)]^{-1}\sum_{1\leqslant i<k\leqslant n}\omega(q_i,q_k)\\ &=[n(n-1)]^{-1}\sum_{i\neq k}\omega(q_i,q_k)=[n(n-1)]^{-1}\left[\sum_{i,k=1}^{n}\omega(q_i,q_k)-\Omega_n\right]\\ &=n(n-1)^{-1}\iint_{EE}\omega(x,y)\,d\mu_n\,d\mu_n-\Omega_n[n(n-1)]^{-1}.\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini par les valeurs $n_1,n_2,\ldots$ nous obtenons

$$\lim_{n\to\infty}2[n(n-1)]^{-1}A(q^{(n)},\omega)=\iint_{EE}\omega(x,y)\,d\mu\,d\mu.$$

Il reste à prouver que

$$\iint_{EE}\omega(x,y)\,d\mu\,d\mu=\sup_{\sigma\in K}\iint_{EE}\omega(x,y)\,d\sigma\,d\sigma. \tag{9}$$

Soit $x^{(n)}$ un système de n points quelconques de E. D'après (3) on a

$$A(q^{(n)},\omega)\geqslant\sum_{1\leqslant i<k\leqslant n}\omega(x_i,x_k). \tag{10}$$

On peut considérer le second membre de l'inégalité (10) comme fonction de n variables $x_1,\ldots,x_n$ définie sur $E\times\ldots\times E$. Intégrons les deux membres de (10) par rapport à $\sigma(x_1)$. Comme $\sigma(E)=1$, on a

$$A(q^{(n)},\omega)\geqslant\sum_{i=2}^{n}\int_{E}\omega(x,x_i)\,d\sigma+\sum_{2\leqslant i<k\leqslant n}\omega(x_i,x_k). \tag{11}$$

Intégrons les deux membres de (11) par rapport à $\sigma(x_2)$; il vient

$$A(q^{(n)},\omega)\geqslant\iint_{EE}\omega(x,y)\,d\sigma\,d\sigma+2\sum_{i=3}^{n}\int_{E}\omega(x,x_i)\,d\sigma+\sum_{3\leqslant i<k\leqslant n}\omega(x_i,x_k).$$

En continuant ce procédé on obtient enfin

$$A(q^{(n)},\omega)\geqslant 2^{-1}n(n-1)\iint_{EE}\omega(x,y)\,d\sigma\,d\sigma,$$

ou

$$2[n(n-1)]^{-1}A(q^{(n)},\omega)\geqslant\iint_{EE}\omega(x,y)\,d\sigma\,d\sigma.$$

Il suffit de faire tendre n vers l'infini par les valeurs $n_1, n_2, \ldots$ pour en déduire l'inégalité

$$\int_E\int_E \omega(x, y)\, d\mu\, d\mu \geqslant \int_E\int_E \omega(x, y)\, d\sigma\, d\sigma ,$$

qui entraîne l'égalité (9).

Nous aurons à nous appuyer dans la suite sur le

LEMME 1. *Soit $\nu = \nu(\Delta)$ une répartition d'une masse quelconque sur E, telle que $\nu(E) = 0$ et que $\mu + \varepsilon\nu \geqslant 0$ pour tout $\varepsilon \in \langle 0, 1\rangle$, où μ est donné par la formule* (7). *Alors*

$$\int_E\int_E \omega(x, y)\, d\mu\, d\nu \leqslant 0 .$$

La démonstration est analogue à celle du lemme 2 dans le travail [6], p. 200.

3. Une fonction extrémale. Formons les fonctions

$$\varphi_n(x) = \varphi_n(x, E, \omega) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \omega(x, q_i), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

liées au système (2), x étant un point variable dans l'espace R. Il suit immédiatement de la définition de $\mu_n(\Delta)$ que $\varphi_n(x)$ peut être représentée par l'intégrale

$$\varphi_n(x) = \int_E \omega(x, y)\, d\mu_n .$$

Lorsque n parcourt les valeurs $n_1, n_2, \ldots$ il existe en tout point x de R une limite

$$\lim_{\nu\to\infty} \varphi_{n_\nu}(x) = \lim_{\nu\to\infty} \int_E \omega(x, y)\, d\mu_{n_\nu} = \int_E \omega(x, y)\, d\mu = \varphi(x, E, \omega) = \varphi(x) . \tag{12}$$

$\varphi(x)$ est dite *fonction extrémale* de l'ensemble E par rapport à ω.

Désignons par E^μ le noyau de la masse relatif à la répartition μ, c'est-à-dire l'ensemble de tous les points de E dont chaque entourage contient une masse non nulle. L'ensemble E^μ est évidemment fermé.

Nous allons démontrer les propriétés suivantes de $\varphi(x)$.

THÉORÈME 2. *La fonction $\varphi(x)$ est continue dans R.*

Démonstration. Supposons que $x_0 \in R$ soit fixé. Pour un $\varepsilon > 0$ donné, il existe un $\delta > 0$ tel que pour $|x - x_0| < \delta$ on a

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(x_0)| & \\ &= \left|\int_E \omega(x, y)\, d\mu - \int_E \omega(x_0, y)\, d\mu\right| = \left|\int_E [\omega(x, y) - \omega(x_0, y)]\, d\mu\right| \\ &\leqslant \int_E |\omega(x, y) - \omega(x_0, y)|\, d\mu \leqslant \int_E \varepsilon\, d\mu = \varepsilon \end{aligned}$$

ce qui prouve le théorème.

THÉORÈME 3. *En tout point de E on a $\varphi(x) \leqslant a(E, \omega)$ et en tout point de E^{μ} on a $\varphi(x) = a(E, \omega)$.*

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 1 du travail [6], p. 201.

4. Sur une propriété de la fonction génératrice. Nous allons introduire une propriété P dont nous ferons usage dans la suite.

DÉFINITION 1. On dit qu'une fonction génératrice $\omega(x, y)$ *jouit de la propriété* P, si pour toutes les répartitions de la masse $\nu(\Delta)$ sur l'ensemble E telles que $\nu(E) = 0$ on a l'inégalité

$$\iint_{E\,E} \omega(x, y)\, d\nu\, d\nu \leqslant 0\,, \tag{13}$$

où le signe d'égalité dans (13) équivant au cas d'une répartition $\nu(\Delta)$ s'annulle identiquement.

Nous aurons à nous appuyer sur les résultats connus suivants (cf. [5], [2]):

LEMME 2. *Soit $\mathcal{E}^m$ $(m \geqslant 3)$ l'espace euclidien à m dimensions, a un nombre positif $<m$, ν une distribution de la masse sur E. Si le potentiel*

$$v(x) = \int_E |x-y|^{a-m} d\nu \tag{14}$$

s'annule et tout point $x \in \mathcal{E}^m$ à l'exception au plus d'un ensemble de mesure nulle, la masse ν est identiquement nulle.

LEMME 3. *Soit $m \geqslant 3$, β un nombre positif $m < 2\beta < m+2$, λ une distribution de la masse sur l'ensemble E telle que $\lambda(E) = 0$. Alors*

$$\int_{\mathcal{E}^m} \Big[\big(H_m(\beta)\big)^{-1} \int_E |x-y|^{\beta-m} d\lambda\Big]^2 d\tau = [H_m(2\beta)]^{-1} \iint_{E\,E} |x-y|^{2\beta-m} d\lambda\, d\lambda\,, \tag{15}$$

où $d\tau$ désigne l'élément de volume et $H_m(\beta)$ s'exprime par la formule

$$H_m(\beta) = \pi^{m/2} 2^{\beta} \Gamma\Big(\frac{\beta}{2}\Big) \Big/ \Gamma\Big(\frac{m-\beta}{2}\Big).$$

THÉORÈME 4. *La fonction $|x-y|^{2\beta-m}$ jouit de la propriété* P.

Démonstration. Le premier membre de la formule (15) est non négatif, donc

$$1/H_m(2\beta) \iint_{E\,E} |x-y|^{2\beta-m} d\lambda\, d\lambda \geqslant 0\,.$$

Mais, comme $\Gamma\Big(\dfrac{m-2\beta}{2}\Big) < 0$, on a

$$H_m(2\beta) = \pi^{m/2} 2^{2\beta} \Gamma(\beta) \Big/ \Gamma\Big(\frac{m-2\beta}{2}\Big) < 0\,,$$

et par suite

(16) $$\iint\limits_{EE} |x-y|^{2\beta-m} d\lambda d\lambda \leqslant 0 .$$

Dans la formule (16) l'égalité ne peut avoir lieu que dans le cas où l'intégrale entre crochets au premier membre de (15), c'est-à-dire la fonction (14) s'annule presque partout. Donc, en vertu du lemme 2, la mesure $\lambda(\Delta)$ s'annule identiquement.

Passons maintenant au problème de la convergence des suites (5) et (6). Nous allons démonstrer le

THÉORÈME 5. *Si la fonction $\omega(x, y)$ jouit de la propriété* P *alors chaque suite partielle de la suite* (6) *tendant vers une limite, tend vers la mesure extrémale $\mu(\Delta)$ donnée par* (7).

Démonstration. Dans le cas contraire il existerait deux limites partielles μ et μ' telles que

$$\sup_{\sigma\epsilon K} \iint \omega(x, y) d\sigma d\sigma = \iint\limits_{EE} \omega(x, y) d\mu d\mu = \iint\limits_{EE} \omega(x, y) d\mu' d\mu' .$$

Formons la différence $\nu = \mu' - \mu$. Comme $\nu(E) = 0$ et $\mu + \varepsilon\nu = \mu(1-\varepsilon) + \mu'\varepsilon \geqslant 0$ si $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, on a d'après le lemme 1

$$\iint\limits_{EE} \omega(x, y) d\mu d\nu \leqslant 0 .$$

Mais

$$\begin{aligned} a(E, \omega) &= \iint\limits_{EE} \omega(x, y) d(\mu+\nu) d(\mu+\nu) \\ &= \iint\limits_{EE} \omega(x, y) d\mu d\mu + 2\iint\limits_{EE} \omega(x, y) d\mu d\nu + \iint\limits_{EE} \omega(x, y) d\nu d\nu \\ &= a(E, \omega) + \iint\limits_{EE} \omega(x, y) d\nu d\nu + 2\iint\limits_{EE} \omega(x, y) d\mu d\nu , \end{aligned}$$

d'où

$$\iint\limits_{EE} \omega(x, y) d\nu d\nu = -2\iint\limits_{EE} \omega(x, y) d\mu d\nu \geqslant 0 .$$

Puisque la fonction $\omega(x, y)$ jouit de la propriété P, la répartition $\nu = \mu' - \mu$ s'annule identiquement, c'est-à-dire $\mu' = \mu$.

THÉORÈME 6. *Si la fonction $\omega(x, y)$ jouit de la propriété* P *la suite* (5) *est convergente.*

Cela résulte du théorème 5.

5. Suites extrémales de points et leur application à la construction des fonctions extrémales. Soit, comme plus haut, E un ensemble compact de R, $\omega(x, y)$ une fonction jouissant de la propriété P, E^μ le noyau de la masse relatif à la répartition extrémale μ

et p_1 un point fixé quelconque de E^μ. Désignons par p_2 un point de E^μ défini par la formule

$$\omega(p_2, p_1) = \sup_{x \in E^\mu} \omega(x, p_1)$$

et, lorsque les points $p_1, \ldots, p_{n-1}$ sont définis, soit p_n ($n = 2, 3, \ldots$) un point de E^μ tel que

$$\sum_{i=1}^{n-1} \omega(p_n, p_i) = \sup_{x \in E^\mu} \sum_{i=1}^{n-1} \omega(x, p_i).$$

La suite

$$p_1, p_2, \ldots \tag{17}$$

sera dite *suite extrémale* de points de E^μ par rapport à la fonction génératrice $\omega(x, y)$. Posons

$$A_n = A(p^{(n)}, \omega) = \sum_{1 \leqslant i < k \leqslant n} \omega(p_i, p_k), \qquad \text{où} \qquad p^{(n)} = \{p_1, \ldots, p_n\}. \tag{18}$$

La position des points $p_2, p_3, \ldots$ dans E^μ dépend en général du choix du point p_1 et de la fonction $\omega(x, y)$. Néanmoins, nous allons démontrer le

THÉORÈME 7. *Si la fonction $\omega(x, y)$ jouit de la propriété* P *il existe une limite*

$$\lim_{n \to \infty} 2[n(n-1)]^{-1} A_n = a(E, \omega) \tag{19}$$

ne dépendant pas du choix du point p_1 dans E^μ.

Démonstration. Soit x un point quelconque de E. D'après la formule (18) et la définition des points $p_1, \ldots, p_n, \ldots$, on a

$$A(p^{(n)}, \omega) \geqslant \sum_{i=1}^{n-1} \omega(x, p_i) + \sum_{i=1}^{n-2} \omega(x, p_i) + \ldots + \sum_{i=1}^{2} \omega(x, p_i) + \omega(x, p_1). \tag{20}$$

Intégrons les deux membres de (20) par rapport à la mesure extrémale $\mu(\Delta)$. Il vient

$$A_n \geqslant \sum_{i=1}^{n-1} \int_E \omega(x, p_i)\, d\mu + \ldots + \sum_{i=1}^{2} \int_E \omega(x, p_i)\, d\mu + \int_E \omega(x, p_1)\, d\mu. \tag{21}$$

En vertu du théorème 3 et de la formule

$$\varphi(y) = \int_E \omega(x, y)\, d\mu$$

les intégrales qui figurent au second membre de (21) sont constantes et égales à $a(E, \omega)$ en tout point de E^μ, d'où il s'ensuit que $A_n \geqslant \dfrac{n(n-1)}{2a(E, \omega)}$ et par suite

$$2[n(n-1)]^{-1} A_n \geqslant a(E, \omega). \tag{22}$$

Soit $\sigma_n(\Delta)$ la distribution de la masse unité sur E^μ liée au système $p^{(n)} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ de points de la suite extrémale (17) de telle manière que $\sigma_n(\Delta) = k/n$ si Δ contient k des points du système $p^{(n)}$. En appliquant la méthode du théorème 1 on obtient

$$(23)\qquad 2[n(n-1)]^{-1}A_n = \frac{n}{n-1}\int_E\int_E \omega(x, y)\,d\sigma_n d\sigma_n - \bar{\Omega}_n[n(n-1)]^{-1},$$

où $\bar{\Omega}_n = \sum_{i=1}^{n} \omega(p_i, p_i)$. On sait [7] que de chaque suite uniformément bornée de fonctions additives d'ensemble on peut extraire une suite partielle convergente. Soit $\{\sigma_{n_k}\}$ une suite partielle de $\{\sigma_n\}$ tendant vers une limite σ

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_{n_k}(\Delta) = \sigma(\Delta) = \sigma .$$

On a alors, d'après (23),

$$\lim_{k\to\infty} \big(2/n_k(n_k-1)\cdot A_{n_k}\big) = \int_E\int_E \omega(x, y)\,d\sigma d\sigma ,$$

d'où il vient, d'après (22) et (8),

$$\int_E\int_E \omega(x, y)\,d\sigma d\sigma \geqslant a(E, \omega) = \int_E\int_E \omega(x, y)\,d\mu d\mu .$$

En tenant compte de (8) on en déduit l'égalité

$$(24)\qquad \int_E\int_E \omega\, d\sigma d\sigma = \int_E\int_E \omega\, d\mu d\mu = 0, \quad \text{où} \quad \omega = \omega(x, y) .$$

Remarquons maintenant que la somme

$$(25)\qquad \int_E\int_E \omega d(\sigma-\mu) d(\sigma-\mu) + 2\int_E \Big[\int_E \omega\, d\mu\Big] d(\sigma-\mu)$$

se décompose en la somme

$$\int_E\int_E \omega\, d\sigma d\sigma - 2\int_E\int_E \omega\, d\mu d\sigma + \int_E\int_E \omega\, d\mu d\mu + 2\int_E\int_E \omega\, d\mu d\sigma - 2\int_E\int_E \omega\, d\mu d\mu$$

qui se réduit à la différence

$$\int_E\int_E \omega\, d\sigma d\sigma - \int_E\int_E \omega\, d\mu d\mu ,$$

et finalement à zéro d'après (24). D'autre part, il suit du théorème 3 que le second terme de (25) s'annule, car $\sigma(E) = \mu(E)$. Par suite

$$(26)\qquad \int_E\int_E \omega d(\sigma-\mu) d(\sigma-\mu) = 0$$

et, comme la fonction ω jouit de la propriété P, l'égalité (26) ne peut avoir lieu que si $\sigma = \mu$.

Il en suit d'après (8) et (23) que toutes les suites partielles convergentes de $\{\sigma_n\}$ tendent vers μ, on a $\sigma_n \to \mu$ et que (19) est ainsi démontré.

Désignons par $\psi_n(x, E, \omega)$ la moyenne

$$\psi_n(x, E, \omega) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \omega(x, p_i), \qquad n = 2, 3, \ldots \tag{27}$$

où x est un point variable dans l'espace R. Du fait que $\sigma_n \to \mu$ résulte immédiatement le

THÉORÈME 8. *Si la fonction $\omega(x, y)$ jouit de la propriété* P, *la suite* (27) *converge dans R et on a l'égalité*

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(x, E, \omega) = \varphi(x, E, \omega). \tag{28}$$

6. Une inégalité entre la fonction extrémale $\varphi(x, E, \omega)$ et la fonction extrémale de F. Leja. Soit $x^{(n)}$ un système de $n \geqslant 2$ points quelconques $x_1, \ldots, x_n$ de E et x un point variable dans R. F. Leja a étudié dans le travail [3] la suite

$$a_n(x, E) = \inf_{x^{(n)} \subset E} [\max_i a^{(i)}(x, x^{(n)})], \tag{29}$$

où

$$a^{(i)}(x, x^{(n)}) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} [\omega(x, x_k) - \omega(x_i, x_k)], \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{30}$$

Il y a démontré que la suite (29) converge en tout point x de R vers une limite déterminée finie

$$\lim_{n\to\infty} a_n(x, E) = a(x, E, \omega).$$

F. Leja a supposé dans son travail [3] que la fonction $\omega(x, y)$ est non négative et que $\omega(x, x) = 0$, mais ces hypothèses ne sont pas nécessaires.

Je dis que l'on a:

THÉORÈME 9. *Si la fonction $\omega(x, y)$ jouit de la propriété* P, *on a en tout point x de R l'inégalité* (¹)

$$a(x, E, \omega) \leqslant \varphi(x, E, \omega) - a(E, \omega).$$

Démonstration. Considérons le système de points extrémaux (2) et remarquons que, d'après (29), on a

$$a_n(x, E) \leqslant \max_i a^{(i)}(x, q^{(n)}).$$

(¹) Il est probable que cette inégalité se réduit à l'égalité, mais ce problème reste encore ouvert.

Soit m un nombre tel que

$$\max_i a^{(i)}(x, q^{(n)}) = a^{(m)}(x, q^{(n)}) .$$

D'après (30) on a

$$a^{(m)}(x, q^{(n)}) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \omega(x, q_j) - \frac{1}{n}\,\omega(x, q_m) - \frac{1}{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n} \omega(q_m, q_j)$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \omega(x, q_j) - \frac{1}{n}\min_i \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \omega(q_i, q_j) - \frac{1}{n}\,\omega(x, q_m) ,$$

d'où l'on déduit d'après (29) l'inégalité

$$a_n(x, E) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \omega(x, q_j) - \min_i \frac{1}{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \omega(q_i, q_j) - \frac{1}{n}\,\omega(x, q_m) .$$

Soit $n\to\infty$. La conclusion du théorème 9 résulte du théorème 6 et du lemme suivant:

Lemme 4. *Soit $q^{(n)}$ un système de points extrémaux* (2). *Considérons les sommes*

$$a^{(i)}(q^{(n)}) = \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{n} \omega(q_i, q_k), \qquad i = 1, 2, \ldots, n .$$

On peut supposer que

(31) $$a_n = a^{(1)}(q^{(n)}) \leqslant a^{(i)}(q^{(n)}), \qquad i = 1, 2, \ldots, n .$$

Je dis que:

La suite $\left\{\frac{1}{n-1}\, a_n\right\}$ *converge vers l'écart arithmétique* $a(E, \omega)$.

Démonstration. En effet, d'après (1) et (31), on a

$$n a_n \leqslant [n(n-1)]^{-1} \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{n} \omega(q_i, q_k) = 2A(q^{(n)}, \omega) .$$

En faisant tendre n vers l'infini on en déduit d'après (4) l'inégalité

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n-1}\, a_n \leqslant a(E, \omega) .$$

Il reste à prouver que

(32) $$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n-1}\, a_n \geqslant a(E, \omega) .$$

Lorsque x est un point quelconque de E, on a

(33) $$a_n \geqslant \sum_{i=2}^{n} \omega(x, q_i)$$

car, dans le cas contraire, il existerait un point $\tilde{x} \in E$ tel que

$$a_n < \sum_{i=2}^{n} \omega(\tilde{x}, q_i).$$

Donc

$$A(q^{(n)}, \omega) = a_n + \sum_{2 \leqslant i < k \leqslant n} \omega(q_i, q_k)$$

$$< \sum_{i=2}^{n} \omega(\tilde{x}, q_i) + \sum_{2 \leqslant i < k \leqslant n} \omega(q_i, q_k) = A(\tilde{q}^{(n)}, \omega),$$

où $\tilde{q}^{(n)} = \{\tilde{x}, q_2, \ldots, q_n\}$. Mais cette inégalité reste en contradiction avec la définition de $q^{(n)}$. D'après (33) on a

$$\frac{1}{n} a_n \geqslant \int \omega(x, y)\, d\mu_n - \frac{1}{n}\, \omega(x, q_1), \tag{34}$$

où μ_n est défini plus haut (p. 346). Intégrons les deux membres de (34) par rapport à μ_n. Alors on a

$$\frac{n-1}{(n-1)n} a_n \geqslant \int_E \int_E \omega(x, y)\, d\mu_n d\mu_n - \frac{1}{n} \int_E \omega(x, q_1)\, d\mu_n$$

$$\geqslant (n-1) n^{-1} \Big[2[n(n-1)]^{-1} \sum_{1 \leqslant i < k \leqslant n} \omega(q_i, q_k) \Big] - M n^{-1} + m n^{-1},$$

où $m = \min_{x \in E, y \in E} \omega(x, y)$, $M = \max_{x \in E, y \in E} \omega(x, y)$, d'où il résulte immédiatement l'inégalité (32).

Travaux cités

[1] O. Frostman, *Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions*, Meddel. f. Lunds Univ. Mat. Sem. 3 (1935), p. 1-118.

[2] — *Potentiel de masses à somme algébrique nulle*, Kungl. Fysiogr. Sallskapets i Lund Forhandligar, 20, 1 (1950), p. 1-21.

[3] F. Leja, *Sur les moyennes arithmétiques, géométriques et harmoniques des distances mutuelles des points d'un ensemble*, Ann. Polon. Math. 9 (1961), p. 211-218.

[4] — *O rozwartości arytmetycznej, geometrycznej i harmonicznej zbioru*, Zeszyty Naukowe UJ, 3 (1957), p. 49-60.

[5] M. Riesz, *Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels*, Acta Szeged 9 (1938), p. 1-42.

[6] B. Szafirski, *Sur une fonction extrémale liée à l'écart arithmétique d'un ensemble*, Ann. Polon. Math. 10 (1961), p. 197-206.

[7] C. De la Vallée Poussin, *Extension de la méthode du balayage de Poincaré et problème de Dirichlet*, Ann. de l'Inst. H. Poincaré, 2 (1932), p. 169-232.

Reçu par la Rédaction le 31. 8. 1965