M. KALECKI (Warszawa)

MODEL MECHANISTYCZNY ZJAWISKA LOSOWEGO

1. Zasady „gry zegarkowej". Wyobraźmy sobie m zegarków, których tarcze mają obwód równy jedności i są podzielone na dwa wycinki: jeden czarny, a drugi biały. Każdy z zegarków ma tylko jedną wskazówkę, której koniec wiruje z szybkością stałą $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$. Co jednostkę czasu sprawdzamy na każdym z m zegarków, czy wskazówka jest w polu czarnym czy też w białym. Jeśli liczba czarnych pól jest parzysta, notujemy A, jeśli jest nieparzysta — B. Jest to jedna partia. Gra polega na zgadywaniu, czy wydarzy się A czy B. Zakładamy, że szybkości $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ są niewymierne i że są arytmetycznie niezależne (tzn. że żadne θ nie jest funkcją liniową o współczynnikach wymiernych pozostałych θ).

Przyjmijmy za zero położenie końców wskazówek w czasie zero. Wtedy położenia te w kolejnych N partiach będą:

$$\begin{array}{llll} \theta_1-[\theta_1], & 2\theta_1-[2\theta_1], & \ldots, & N\theta_1-[N\theta_1], \\ \theta_2-[\theta_2], & 2\theta_2-[2\theta_2], & \ldots, & N\theta_2-[N\theta_2], \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta_m-[\theta_m], & 2\theta_m-[2\theta_m], & \ldots, & N\theta_m-[N\theta_m], \end{array}$$

gdzie $[\theta]$ oznacza funkcję *entier* zmiennej θ.

Należy zaznaczyć, że jednocześnie z grą opartą na zespole m zegarków można prowadzić gry na tych samych zasadach w odniesieniu do każdego podzespołu pierwszych k zegarków.

2. Częstości występowania wyników A i B. Wprowadźmy następujące oznaczenia: częstość występowania białego pola na k-tym zegarku oznaczmy przez b_{Nk}, a czarnego pola przez c_{Nk}; dalej oznaczmy długość łuku wycinka białego na k-tym zegarku przez p_k, a więc długość łuku wycinka czarnego będzie $1-p_k$; wreszcie częstości występowania liter A i B w grze opartej na podzespole pierwszych k zegarków oznaczmy przez $(A)_{Nk}$. Wobec tego częstości występowania A i B w grze opartej na wszystkich m zegarkach oznaczać będziemy odpowiednio przez $(A)_{Nm}$ i $(B)_{Nm}$.

Twierdzenie 1. *Jeśli* $|1-2p_k| \leqslant a < 1$, *gdzie* a *jest liczbą stałą oraz* $k = 1, 2, \ldots, m$, *to* $\lim_{m\to\infty} \lim_{N\to\infty} (A)_{Nm} = \lim_{m\to\infty} \lim_{N\to\infty} (B)_{Nm} = \frac{1}{2}$.

Dowód. Z twierdzeń w aneksie (str. 123) wynikają następujące właściwości wskazań zegarków. Jeśli, jak założono, szykości $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ są niewymierne i żadna z nich nie jest funkcją liniową o współczynnikach wymiernych pozostałych θ, to mamy:

(1) Według twierdzenia I aneksu:

$$\lim_{N\to\infty} b_{Nk} = p_k, \quad \lim_{N\to\infty} c_{Nk} = 1-p_k;$$

(2) Według twierdzenia II aneksu częstość występowania w jednej partii kombinacji pola białego na zegarku k i pola białego na zegarku l zmierza do $p_k p_l$, gdy $N \to \infty$. Granice częstości dla kombinacji biało-czarne oraz czarne-białe czy też wreszcie czarne-czarne będą odpowiednio $p_k(1-p_l)$, $(1-p_k)p_l$ oraz $(1-p_k)$, $(1-p_l)$. Analogiczne twierdzenie będzie słuszne dla kombinacji obejmującej dowolny podzespół zegarków czy też wszystkie m zegarków. Używając terminologii rachunku prawdopodobieństwa możemy powiedzieć, że wskazanie k-tego zegarka jest asymptotycznie niezależne od wskazań innych.

Weźmy teraz pod uwagę grę opartą na podzespole pierwszych k zegarków. Z właściwości (1) i (2) wynika, że $(A)_{Nk}$ zmierza do określonej granicy $(A)_k$, a $(B)_{Nk}$ do $(B)_k$, gdy $N \to \infty$.

Dołączmy teraz do podzespołu $(k+1)$-szy zegarek. W grze opartej na tym nowym podzespole A wystąpi w danej partii: albo jeśli w grze opartej na podzespole pierwszych k zegarków wystąpiło w tej partii A i na $(k+1)$-szym zegarku wskazówka zatrzymała się w białym polu, albo jeśli w grze opartej na podzespole pierwszych k zegarków wystąpiło w tej partii B i na $(k+1)$-szym zegarku wskazówka zatrzymała się w czarnym polu.

Biorąc pod uwagę „niezależność" partyj na poszczególnych zegarkach, znajdujemy dla granicznej częstości $(A)_{k+1}$:

$$(A)_{k+1} = (A)_k(1-p_{k+1}) + (B)_k p_{k+1}.$$

Analogicznie

$$(B)_{k+1} = (B)_k(1-p_{k+1}) + (A)_k p_{k+1}.$$

Wobec tego

$$(A)_{k+1} - (B)_{k+1} = \big((A)_k - (B)_k\big)(1-2p_{k+1}).$$

Za pomocą indukcji zupełnej otrzymujemy

$$(A)_m - (B)_m = (1-2p_1)(1-2p_2)\ldots(1-2p_m).$$

Z założenia $|1-2p_k| \leqslant a < 1$ wynika, że

$$\lim_{m\to\infty}\big((A)_m-(B)_m\big) = 0.$$

Mamy więc

$$\lim_{m\to\infty}(A)_m = \lim_{m\to\infty}(B)_m = \tfrac{1}{2}$$

albo

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{N\to\infty}(A)_{Nm} = \lim_{m\to\infty}\lim_{N\to\infty}(B)_{Nm} = \tfrac{1}{2},$$

i to przy dowolnych wartościach $p_1, p_2, \ldots, p_m$, jeśli tylko spełniony jest warunek $|1-2p_k| \leqslant a < 1$.

3. „Niezależność" dwóch kolejnych wyników gry. Oznaczmy częstość zmiany z czarnego na białe, lub *vice versa*, w dwóch kolejnych partiach (tzn. występowania kombinacji białe-czarne lub czarne-białe) na k-tym zegarku przez δ_{Nk}. Częstość pozostawania białego lub czarnego bez zmiany w dwóch kolejnych partiach (tzn. występowania kombinacji białe-białe lub czarne-czarne) będzie więc równa $1-\delta_{Nk}$. Dalej oznaczmy częstości występowania kombinacji AA, BB, AB i BC w dwóch kolejnych partiach dla gry opartej na podzespole pierwszych k zegarków odpowiednio przez $(AA)_{Nk}$, $(BB)_{Nk}$, $(AB)_{Nk}$ i $(BA)_{Nk}$. Wobec tego częstości występowania AA, BB, AB i BA w dwóch kolejnych partiach dla gry opartej na wszystkich m zegarkach oznaczać będziemy odpowiednio przez $(AA)_{Nm}$, $(BB)_{Nm}$, $(AB)_{Nm}$ i $(BA)_{Nm}$. Oznaczmy wreszcie przez Z_{Nk} częstość zmiany z A na B lub *vice versa* w dwóch kolejnych partiach dla gry opartej na pierwszych k zegarkach; mamy więc

$$Z_{Nk} = (AB)_{Nk}+(BA)_{Nk}, \qquad 1-Z_{Nk} = (AA)_{Nk}+(BB)_{Nk}.$$

Dla gry opartej na wszystkich m zegarkach mamy oczywiście

$$Z_{Nm} = (AB)_{Nm}+(BA)_{Nm}, \qquad 1-Z_{Nm} = (AA)_{Nm}+(BB)_{Nm}.$$

Wreszcie oznaczmy $\theta_k-[\theta_k]$ przez θ'_k.

TWIERDZENIE 2. *Jeśli* $|1-2p_k| \leqslant a < 1$ *oraz* $\theta_k \geqslant \beta > 0$, $1-\theta_k \geqslant \beta > 0$ *i* $|\frac{1}{2}-\theta'_k| \geqslant \beta > 0$, *gdzie* a *i* β *są liczbami stałymi, to*

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{N\to\infty}(AA)_{Nm} = \lim_{m\to\infty}\lim_{N\to\infty}(BB)_{Nm} = \lim_{m\to\infty}\lim_{N\to\infty}(AB)_{Nm} = \lim_{m\to\infty}\lim_{N\to\infty}(BA)_{Nm}.$$

Dowód. Z twierdzeń aneksu wynikają następujące właściwości wskazań zegarków:

(3) Według twierdzenia III aneksu δ_{Nk} zmierza do pewnej granicy δ_k, gdy $N\to\infty$, czyli

$$\lim_{N\to\infty}\delta_{Nk} = \delta_k \quad \text{oraz} \quad \lim_{N\to\infty}(1-\delta_{Nk}) = 1-\delta_k.$$

Przy tym według twierdzenia V aneksu, jeżeli $|1-2p_k| \leqslant \alpha < 1$ oraz $\theta'_k \geqslant \beta > 0$, $1-\theta'_k > \beta > 0$ i $|\frac{1}{2}-\theta'_k| \geqslant \beta > 0$, gdzie α i β są liczbami stałymi, to $|1-2\delta_k| \leqslant \lambda < 1$, gdzie λ jest znowu liczbą stałą.

(4) Według twierdzenia IV aneksu częstość zdarzenia „zmiana" (lub zdarzenia „bez zmiany") w dwu kolejnych wskazaniach k-tego zegarka jest „niezależna" od częstości „zmiany" (lub „bez zmiany") na innych zegarkach. Np. graniczna częstość kombinacji „zmiany" na k-tym zegarku i „bez zmiany" na l-tym zegarku wynosi $\delta_k(1-\delta_l)$.

Weźmy teraz pod uwagę grę opartą na podzespole pierwszych k zegarków. Z właściwości (3) i (4) wynika, że jeśli $N \to \infty$, to Z_{Nk} i $1-Z_{Nk}$ zmierzają do określonych granic, które oznaczymy odpowiednio przez Z_k i $1-Z_k$.

Dołączmy do podzespołu $(k+1)$-szy zegarek. W grze opartej na tym nowym podzespole „zmiana" nastąpi w dwu kolejnych partiach w dwu przypadkach:

1° jeśli w grze opartej na zespole k pierwszych zegarków wystąpiła „zmiana", a na $(k+1)$-szym zegarku wystąpiło „bez zmiany"; wtedy bowiem w pierwszej z dwu kolejnych partii mamy w zespole pierwszych k zegarków nieparzystą ilość „czarnych", a w drugim parzystą ilość „czarnych", lub *vice versa*, a na $(k+1)$-szym zegarku mamy dwa „czarne" lub dwa „białe";

2° jeśli w grze opartej na podzespole pierwszych k zegarków wystąpiło „bez zmiany", a na $(k+1)$-szym zegarku „zmiana"; wtedy bowiem w obu kolejnych partiach w zespole pierwszych k zegarków mamy parzystą lub nieparzystą ilość „czarnych", a na $(k+1)$-szym zegarku mamy „czarne-białe" lub „białe-czarne".

Biorąc pod uwagę „niezależność" zdarzeń „zmiana" i „bez zmiany" we wskazaniach poszczególnych zegarków znajdujemy stąd dla granicznej częstości „zmiany"

$$Z_{k+1} = Z_k(1-\delta_{k+1})+(1-Z_k)\,\delta_{k+1}.$$

Analogicznie otrzymujemy

$$1-Z_{k+1} = (1-Z_k)(1-\delta_{k+1})+Z_k\,\delta_{k+1}.$$

Stąd wynika, że $2Z_{k+1}-1 = (1-2\delta_{k+1})(2Z_k-1)$ i, drogą indukcji zupełnej,

$$1-2Z_m = (1-2\delta_1)(1-2\delta_2)\ldots(1-2\delta_m).$$

Ponieważ $|1-2\delta_k| \leqslant \lambda < 1$, gdzie λ jest liczbą stałą, otrzymujemy

$$\lim_{m\to\infty}(1-2Z_m) = 0, \quad \text{czyli} \quad \lim_{m\to\infty} Z_m = \tfrac{1}{2}.$$

Możemy teraz wykazać, że częstości występowania kombinacyj AA, BB, AB i BA w dwóch kolejnych partiach gry, opartej na wszystkich m zegarkach, zmierzają do granicy $\frac{1}{4}$, gdy $N \to \infty$ i $m \to \infty$. Mamy przede wszystkim $(AB)_{Nm}+(BA)_{Nm} = Z_{Nm}$. Stąd wynika, że

$$\lim_{N\to\infty}\big((AB)_{Nm}+(BA)_{Nm}\big) = Z_m.$$

Dalej mamy

$$\lim_{N\to\infty}\big((AB)_{Nm}+(AA)_{Nm}\big) = (A)_m \quad \text{oraz} \quad \lim_{N\to\infty}\big((BA)_{Nm}+(AA)_{Nm}\big) = (A)_m,$$

czyli

$$\lim_{N\to\infty}\big((AB)_{Nm}-(BA)_{Nm}\big) = 0.$$

Otrzymujemy więc

$$\lim_{N\to\infty}(AB)_{Nm} = \lim_{N\to\infty}(BA)_{Nm} = \tfrac{1}{2}Z_m.$$

Ponieważ wykazaliśmy wyżej, że $\lim\limits_{m\to\infty} Z_m = \frac{1}{2}$, otrzymujemy

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{N\to\infty}(AB)_{Nm} = \lim_{m\to\infty}\lim_{N\to\infty}(BA)_{Nm} = \tfrac{1}{4}.$$

Biorąc pod uwagę, że $(AA)_{Nm}+(BB)_{Nm}+(AB)_{Nm}+(BA)_{Nm} = 1$, można z łatwością wykazać, że również

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{N\to\infty}(AA)_{Nm} = \lim_{m\to\infty}\lim_{N\to\infty}(BB)_{Nm} = \tfrac{1}{4},$$

czyli dwie kolejne partie w grze opartej na m zegarkach są od siebie asymptotycznie „niezależne” z dowolnym przybliżeniem, jeśli m jest dostatecznie wielkie.

4. Uogólnienia. Najpierw zajmiemy się „niezależnością” j-tego i $(j+a)$-tego wyniku gry.

Niech a będzie określoną liczbą całkowitą i dodatnią. Wprowadźmy następujące oznaczenia. Częstość zmiany z czarnego na białe lub *vice versa* we wskazaniach j i $j+a$ na k-tym zegarku oznaczmy przez $\delta_{Nk}^{(a)}$. Częstość pozostawania białego lub czarnego we wskazaniach j i $j+a$ będzie więc równa $1-\delta_{Nk}^{(a)}$. Dalej oznaczmy przez A_j i B_j zjawiska polegające na występowaniu litery A lub B na j-tym miejscu w ciągu liter A i B. Częstości występowania kombinacyj AA, BB, AB i BA na miejscach j i $j+a$ w grze opartej na k pierwszych zegarkach oznaczymy przez $(A_jA_{j+a})_{Nk}$, $(B_jB_{j+a})_{Nk}$, $(A_jB_{j+a})_{Nk}$ oraz $(B_jA_{j+a})_{Nk}$; w grze zaś opartej na wszystkich m zegarkach — przez $(A_jA_{j+a})_{Nm}$, $(B_jB_{j+a})_{Nm}$, $(A_jB_{j+a})_{Nm}$ oraz $(B_jA_{j+a})_{Nm}$. Wreszcie oznaczmy $a\theta_k - [a\theta_k]$ przez $\theta_k^{(a)}$.

TWIERDZENIE 3. *Jeśli* $|1-2p_k| \leqslant a < 1$ *oraz* $\theta_k^{(a)} \geqslant \beta^{(a)} > 0, 1-\theta_k^{(a)} \geqslant \beta^{(a)} > 0$ *i* $|\frac{1}{2}-\theta_k^{(a)}| \geqslant \beta^{(a)} > 0$, *gdzie* a *i* $\beta^{(a)}$ *są liczbami stałymi, to*

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{N\to\infty} (A_j A_{j+a})_{Nm} = \lim_{m\to\infty} \lim_{N\to\infty} (B_j B_{j+a})_{Nm} =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \lim_{N\to\infty} (A_j B_{j+a})_{Nm} = \lim_{m\to\infty} \lim_{N\to\infty} (B_j A_{j+a})_{Nm} = \tfrac{1}{4}.$$

Dowód. Z twierdzenia VI aneksu wynikają następujące uogólnienia właściwości (3) i (4) wskazań zegarków:

(3′) $\delta_{Nk}^{(a)}$ zmierza do pewnej granicy $\delta_k^{(a)}$, gdy $N \to \infty$, czyli

$$\lim_{N\to\infty} \delta_{Nk}^{(a)} = \delta_k^{(a)}.$$

Przy tym, jeśli $|1-2p_k| \leqslant a < 1$ oraz $\theta_k^{(a)} \geqslant \beta^{(a)} > 0$, $1-\theta_k^{(a)} \geqslant \beta^{(a)} > 0$, i $|\frac{1}{2}-\theta_k^{(a)}| \geqslant \beta^{(a)} > 0$, gdzie a i $\beta^{(a)}$ są liczbami stałymi, to $|1-2\delta_k^{(a)}| \leqslant \lambda^{(a)} < 1$, gdzie $\lambda^{(a)}$ jest znowu liczbą stałą.

(4′) Częstość zdarzenia „zmiana” (lub „bez zmiany”) we wskazaniu j-tym i $(j+a)$-tym na k-tym zegarku jest niezależna od częstości „zmiany” na innych zegarkach. Np. graniczna częstość kombinacji „zmiany” na k-tym zegarku i „bez zmiany” na l-tym zegarku we wskazaniach j-tym i $(j+a)$-tym wynosi $\delta_k^{(a)}(1-\delta_2^{(a)})$.

Na podstawie tych właściwości można przeprowadzić dowód w ten sam sposób, jak dla poprzedniego twierdzenia.

Dalsze uogólnienie dotyczy jednoczesnej niezależności wyników $j+1, j+2, \ldots, j+a$ od wyniku j-tego.

Oznaczmy najmniejszą wielokrotność liczb naturalnych niewiększych od a przez w oraz $w\theta_k - [w\theta_k]$ przez $\theta_k^{(w)}$.

TWIERDZENIE 4. *Jeśli* $|1-2p_k| \leqslant a < 1$ *oraz* $\theta_k^{(w)} \geqslant \beta^{(w)} > 0$, $1-\theta_k^{(w)} \geqslant \beta^{(w)} > 0$ *i* $|\frac{1}{2}-\theta_k^{(w)}| \geqslant \beta^{(w)} > 0$, *gdzie* a *i* $\beta^{(w)}$ *są liczbami stałymi, to*

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{N\to\infty} (A_j A_{j+i})_{Nm} = \lim_{m\to\infty} \lim_{N\to\infty} (B_j B_{j+i})_{Nm} = \lim_{m\to\infty} \lim_{N\to\infty} (A_j B_{j+i})_{Nm} =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \lim_{N\to\infty} (B_j A_{j+i})_{Nm} = \tfrac{1}{4} \qquad (i = 1, 2, \ldots, a).$$

Dowód. Z twierdzenia 3 wynika, że twierdzenie 4 jest słuszne, jeśli spełnione są jednocześnie warunki (a), (b) i (c):

(a) $$j\theta_k - [j\theta_k] \geqslant \beta^{(i)} > 0,$$

(b) $$1 - j\theta_k + [j\theta_k] \geqslant \beta^{(i)} > 0,$$

(c) $$|\tfrac{1}{2} - j\theta_k + [j\theta_k]| \geqslant \beta^{(i)} > 0,$$

gdzie $\beta^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, a)$ są to liczby stałe. Otóż dowiedziemy, że warunki te są spełnione dla $\beta^{(i)} = i\beta^{(w)}/w$. Mamy przede wszystkim

$$\text{(a}'\text{)} \qquad w\theta_k - [w\theta_k] \geqslant \beta^{(w)} > 0,$$

$$\text{(b}'\text{)} \qquad 1 - w\theta_k + [w\theta_k] \geqslant \beta^{(w)} > 0,$$

$$\text{(c}'\text{)} \qquad |\tfrac{1}{2} - w\theta_k + [w\theta_k]| \geqslant \beta^{(w)} > 0.$$

Zacznijmy od warunku (a). Możemy oczywiście napisać

$$i\theta_k - [i\theta_k] > 0$$

(ponieważ θ_k jest liczbą niewymierną). Pomnóżmy obie strony tej nierówności przez wyrażenie w/i, które jest liczbą całkowitą, gdyż w jest wielokrotnością i:

$$w\theta_k - \frac{w}{i}[i\theta_k] > 0.$$

Ponieważ $[w\theta_k]$ jest największą liczbą całkowitą zawartą w $w\theta_k$, mamy

$$w\theta_k - \frac{w}{i}[i\theta_k] \geqslant w\theta_k - [w\theta_k].$$

Stąd i z (a′) wynika, że

$$w\theta_k - \frac{w}{i}[i\theta_k] \geqslant \beta^{(w)},$$

a dzieląc przez w/i otrzymujemy

$$i\theta_k - [i\theta_k] \geqslant \frac{i}{w}\beta^{(w)} > 0,$$

co dowodzi spełnienia warunku (a).

Rozpatrzmy teraz warunek (b). Mamy $1 - i\theta_k + [i\theta_k] > 0$. Pomnóżmy obie strony tej nierówności przez w/i:

$$\frac{w}{i} - w\theta_k + \frac{w}{i}[i\theta_k] > 0.$$

Ponieważ $[w\theta_k]+1$ jest najmniejszą liczbą całkowitą większą od $w\theta_k$, mamy

$$\frac{w}{i} - w\theta_k + \frac{w}{i}[i\theta_k] \geqslant 1 - w\theta_k + [w\theta_k].$$

Stąd i z (b′) wynika, że

$$\frac{w}{i} - w\theta_k + \frac{w}{i}[i\theta_k] \geqslant \beta^{(w)} > 0;$$

dzieląc przez w/i otrzymujemy

$$1-i\theta_k+[i\theta_k] \geqslant \frac{i}{w}\beta^{(w)} > 0,$$

co dowodzi spełnienia warunku (b).

Wreszcie dla warunku (c) dowód przedstawia się jak następuje. Mnożąc wyrażenie $|\frac{1}{2}-i\theta_k+[i\theta_k]|$ przez w/i otrzymujemy

$$\left|\frac{w}{2i}-w\theta_k+\frac{w}{i}[i\theta_k]\right|.$$

Ponieważ albo $\frac{1}{2}+[w\theta_k]$, albo $1+[w\theta_k]$ jest najbliższą do $w\theta_k$ wielokrotnością liczby $\frac{1}{2}$, więc mamy albo

$$\left|\frac{w}{2i}-w\theta_k+\frac{w}{i}[i\theta_k]\right| \geqslant \left|\tfrac{1}{2}-w\theta_k+[w\theta_k]\right|,$$

albo

$$\left|\frac{w}{2i}-w\theta_k+\frac{w}{i}[i\theta_k]\right| \geqslant 1-w\theta_k+[w\theta_k].$$

Ale według założeń (b') i (c') wyrażenia po prawej stronie obu tych nierówności są niemniejsze od $\beta^{(w)}$, które jest dodatnie. Wobec tego

$$\left|\frac{w}{2i}-w\theta_k+\frac{w}{i}[i\theta_k]\right| \geqslant \beta^{(w)} > 0$$

i po podzieleniu przez w/i otrzymujemy

$$|\tfrac{1}{2}-i\theta_k+[i\theta_k]| \geqslant \frac{i}{w}\beta^{(w)} > 0,$$

co dowodzi spełnienia warunku (c).

Twierdzenie 4 sformułować można również jak następuje:

Wynik gry zegarkowej jest „niezależny" od wyników poprzednich a partyj z dowolnym przybliżeniem, gdy N i m są dostatecznie wielkie, jeśli $\theta_k^{(w)}$, $1-\theta_k^{(w)}$ *oraz* $|\frac{1}{2}-\theta_k^{(w)}|$ *są większe od pewnej stałej dodatniej, gdzie* $\theta_k^{(w)} = w\theta_k-[w\theta_k]$, *a w jest najmniejszą wielokrotnością liczb naturalnych niewiększych od a.*

Należy zaznaczyć, że warunki ograniczające dla zespołu θ_k zależą od a. To samo dotyczy wielkości m, niezbędnej do danego przybliżenia do „niezależności" wyniku gry od a poprzednich wyników.

Jak widać z powyższego, możemy dowolnie upodobnić wyniki gry zegarkowej do ciągu losowego. Zakładamy przede wszystkim dowolnie duże, ale określone a. Dobierzmy zespół m liczb niewymiernych $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ arytmetycznie niezależnych, spełniających warunki

$$\varphi_k-[\varphi_k] > \beta^{(w)}, \quad 1-\varphi_k+[\varphi_k] > \beta^{(w)} \quad \text{oraz} \quad |\tfrac{1}{2}-\varphi_k+[\varphi_k]| > \beta^{(w)},$$

gdzie $\beta^{(w)}$ jest stałą liczbą dodatnią. Przyjmijmy za szybkości końców wskazówek m zegarków liczby $\varphi_1/w, \varphi_2/w, \ldots, \varphi_m/w$, gdzie w jest najmniejszą wielokrotnością liczb naturalnych niewiększych od a. Przy dostatecznie dużym m wynik gry zegarkowej będzie „niezależny" od poprzednich a wyników z dowolnych przybliżeniem.

Warto jeszcze zwrócić uwagę na szczególny przypadek spełnienia przez zespół θ_k warunków

$$\text{(a}''\text{)} \qquad w\theta_k-[w\theta_k] > \beta^{(w)} > 0,$$

$$\text{(b}''\text{)} \qquad 1-w\theta_k+[w\theta_k] > \beta^{(w)} > 0,$$

$$\text{(c}''\text{)} \qquad |\tfrac{1}{2}-w\theta_k+[w\theta_k]| > \beta^{(w)} > 0.$$

Można mianowicie wykazać, że warunki te są spełnione, gdy $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ leżą w dostatecznie małym przedziale. Oznaczmy długość tego przedziału przez $\varepsilon^{(w)}$. Mamy wtedy $|\theta_k-\theta_1| \leqslant \varepsilon^{(w)}$. Niech $\varepsilon^{(w)}$ będzie dostatecznie małe, by spełniało warunki

$$\text{(e)} \qquad w\varepsilon^{(w)} < w\theta_1-[w\theta_1],$$

$$\text{(f)} \qquad w\varepsilon^{(w)} < 1-w\theta_1+[w\theta_1],$$

$$\text{(g)} \qquad w\varepsilon^{(w)} < |\tfrac{1}{2}-w\theta_1+[w\theta_1]|.$$

Wynika stąd, że

$$|w\theta_k-w\theta_1| < w\theta_1-[w\theta_1] \quad \text{oraz} \quad |w\theta_k-w\theta_1| < 1-w\theta_1+[w\theta_1],$$

a stąd z kolei

$$[w\theta_k] = [w\theta_1].$$

Otrzymujemy dalej

$$w\theta_k-[w\theta_k] = w\theta_1-[w\theta_1]+w(\theta_k-\theta_1),$$

$$1-w\theta_k+[w\theta_k] = 1-w\theta_1+[w\theta_1]-w(\theta_k-\theta_1),$$

$$|\tfrac{1}{2}-w\theta_k+[w\theta_k]| = |\tfrac{1}{2}-w\theta_1+[w\theta_1]-w(\theta_k-\theta_1)|.$$

Z warunku $|\theta_k-\theta_1| \leqslant \varepsilon^{(w)}$ wynika

$$w\theta_k-[w\theta_k] \geqslant w\theta_1-[w\theta_1]-w\varepsilon^{(w)},$$

$$1-w\theta_k+[w\theta_k] \geqslant 1-w\theta_1+[w\theta_1]-w\varepsilon^{(w)},$$

$$|\tfrac{1}{2}-w\theta_k+[w\theta_k]| \geqslant |\tfrac{1}{2}-w\theta_1+[w\theta_1]|-w\varepsilon^{(w)}.$$

Z warunków (e), (f) i (g) dla $\varepsilon^{(w)}$ wynika z kolei, że wyrażenia po prawej stronie nierówności są liczbami dodatnimi. Oznaczywszy najmniejszą z nich przez $\beta^{(w)}$ otrzymujemy właściwości (a′), (b′) i (c′).

Jak widać z powyższego, skupienie szybkości θ_k w dostatecznie małym obszarze, zależnym od a, i dostatecznie wielka liczba m zegarków stwarzają warunki, w których wynik pewnej partii jest z dowolnym przybliżeniem niezależny od poprzednich a wyników. Łatwo zauważyć, że warunki takie można zapewnić również przez skupienie się θ_k w skończonej ilości dostatecznie małych obszarów.

5. Model *rouge et noir*. Powyższe twierdzenia pozwolą nam na skonstruowanie, bardzo zresztą prymitywnego, modelu występowania „czerwonego" i „czarnego" w ruletce. Przyjmujemy, że ruch kulki zawsze w tym samym kierunku zaczyna się od punktu zerowego, leżącego na samym początku jakiejś działki, powiedzmy, czerwonej. Jeśli wobec tego oznaczymy przez n liczbę działek zawartych w odległości przebytej przez kulkę, to wystąpienie w danej próbie czerwonego albo czarnego zależy od tego, czy n jest parzyste, czy nieparzyste. Przyjmujemy również, że próby odbywają się w równych odstępach czasu.

Wartość n jest wynikiem zjawiska bardzo złożonego. Wyobraźmy sobie, że n jest wyznaczane w kolejnych próbach przez nasz zespół z bardzo dużej liczby m zegarków, mianowicie: n równa się liczbie pól czarnych wskazywanych na zegarkach w chwili rozpoczęcia każdej próby. W ten sposób parzyste n, czyli wystąpienie *rouge*, odpowiada literze A w grze zegarkowej, a nieparzyste n, czyli *noir*, odpowiada literze B.

Zakładamy, jak wyżej, że szybkości końców wskazówek zegarków $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ są liczbami niewymiernymi i arytmetycznie niezależnymi. Zakładamy również, że spełniają one warunki niezbędne dla zapewnienia przybliżonej „niezależności" wyniku gry zegarkowej od poprzednich a wyników. Np. zakładamy, że szybkości $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ znajdują się w obrębie kilku dostatecznie małych obszarów.

Z dowiedzionych wyżej twierdzeń wynika, że w takim modelu:

1° częstość występowania czerwonego lub czarnego przy dostatecznie wielkiej ilości prób N zbliża się dowolnie do pewnej liczby, która różni się bardzo mało od $\frac{1}{2}$, jeśli m, jak to założyliśmy wyżej, jest bardzo duże,

2° wynik próby jest „niezależny", ze znacznym przybliżeniem, od wyników a poprzednich prób.

Oczywiście oba te zjawiska wystąpią również, jeśli n jest wyznaczone przez jakikolwiek mechanizm posiadający podstawowe właściwości zespołu m zegarków.

ANEKS

Pewne właściwości ciągów liczb niewymiernych $\theta,\ 2\theta,\ 3\theta,\ \ldots$

DEFINICJA 1. Niech będzie dany ciąg liczb rzeczywistych

$$f(1), f(2), \ldots, f(N).$$

Oznaczmy przez $N(\gamma)$ liczbę wyrazów spełniających warunek

$$f(k)-[f(k)] < \gamma, \quad \text{gdzie} \quad 0 \leqslant \gamma \leqslant 1.$$

Mówimy, że *ciąg* f *ma ekwipartycję*, jeśli

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N(\gamma)}{N} = \gamma.$$

DEFINICJA 2. Niech będzie m ciągów:

$$\begin{array}{l} f_1(1), f_1(2), \ldots, f_1(N), \\ f_2(1), f_2(2), \ldots, f_2(N), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(1), f_m(2), \ldots, f_m(N). \end{array}$$

Oznaczmy przez $N(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m)$ liczbę kolumn tego zespołu ciągów, spełniających dla każdego k od 1 do m warunek

$$f_k(j)-[f_k(j)] < \gamma_k,$$

gdzie $0 \leqslant \gamma_k \leqslant 1$. Mówimy, że *zespół ciągów* $f_1, f_2, \ldots, f_m$ *ma ekwipartycję*, jeśli

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m)}{N} = \gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_m.$$

Jeśli zespół ciągów $f_1, f_2, \ldots, f_m$ ma ekwipartycję, to każdy jego podzespół ma również ekwipartycję, co otrzymamy od razu nakładając warunek $\gamma = 1$ na wszystkie f poza podzespołem.

TWIERDZENIE I. *Jeśli* θ *jest dowolną liczbą niewymierną, to ciąg*

$$\theta, 2\theta, 3\theta, \ldots, N\theta \tag{1}$$

ma ekwipartycję.

Twierdzenie to zostało dowiedzione w roku 1909 przez Sierpińskiego, jak również przez Bohla, a w 1916 r. Weyl podał prosty dowód opierający się na metodzie mającej szersze zastosowanie([1]).

([1]) Patrz J. F. Koksma, *Diophantische Approximationen*, Berlin 1936, str. 92.

TWIERDZNIE II (szczególny przypadek innego twierdzenia Weyla[2]). *Zespół ciągów*

$$
\begin{array}{c}
\theta_1, 2\theta_1, \ldots, N\theta_1, \\
\theta_2, 2\theta_2, \ldots, N\theta_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\theta_m, 2\theta_m, \ldots, N\theta_m
\end{array} \tag{2}
$$

ma ekwipartycję, jeśli dla dowolnego zespołu liczb całkowitych $h_1, h_2, \ldots, h_m$ *nie równych jednocześnie zeru wyrażenie*

$$h_1\theta_1 + h_2\theta_2 + \ldots + h_m\theta_m$$

jest liczbą niewymierną.

RÓWNOWAŻNIK TWIERDZENIA II. *Jeżeli wszystkie liczby* $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ *są niewymierne i żadna z nich nie jest funkcją liniową o współczynnikach wymiernych innych* θ, *to zespół* (2) (*i każdy jego podzespół*) *ma ekwipartycję.*

Z twierdzenia I wyprowadzamy teraz następujące

TWIERDZENIE III. *Oznaczmy przez* S *liczbę wyrazów ciągu* (1), *które spełniają warunek* (a) *lub* (b):

$$j\theta - [j\theta] < \gamma, \quad (j+1)\theta - [(j+1)\theta] \geqslant \gamma, \tag{a}$$

$$j\theta - [j\theta] \geqslant \gamma, \quad (j+1)\theta - [(j+1)\theta] < \gamma. \tag{b}$$

Stosunek S/N *zmierza do granicy określonej dalej wzorami* (3), (4) *i* (5), *gdy* $N \to \infty$.

Oznaczmy $\theta - [\theta]$ przez θ'. Łatwo zauważyć, że

$$j\theta - [j\theta] = j\theta' - [j\theta'].$$

Wobec tego w warunkach (a) i (b) można podstawić θ' zamiast θ, przy czym $\theta' < 1$. Można też bez uszczuplenia ogólności dowodu założyć, że $\gamma \leqslant \frac{1}{2}$.

Twierdzenia łatwo jest dowieść graficznie. Jeśli $j\theta'$ odkładać będziemy na kole o obwodzie 1 od punktu zerowego w kierunku ruchu wskazówki zegara, to $j\theta' - [j\theta']$ jest odstępem punktu $j\theta'$ od zera. Warunki (a) i (b) oznaczają, że jeśli punkt $j\theta'$ leży w obrębie łuku γ, to punkt $(j+1)\theta'$ leży poza nim lub *vice versa*. Bez uszczuplenia ogólności dowodu można założyć, że zero leży na początku łuku γ. Rozpatrzymy trzy przypadki:

$$\theta' < \gamma, \tag{A}$$

$$\gamma \leqslant \theta' < 1-\gamma, \tag{B}$$

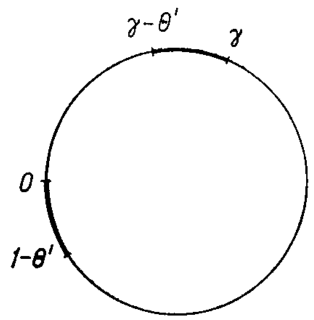
$$\theta' \geqslant 1-\gamma, \tag{C}$$

którym odpowiadają rysunki 1, 2 i 3.

---

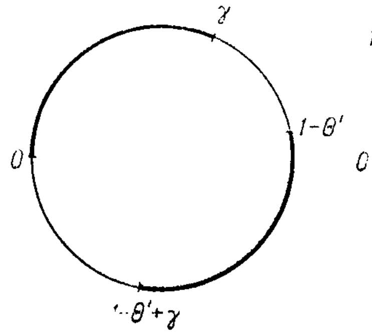
[2] Ibidem, str. 93.

Na rysunkach punkty $j\theta'$ na łukach zaznaczonych grubą linią odpowiadają, jak tego dowiedziemy dalej, warunkom (a) lub (b).



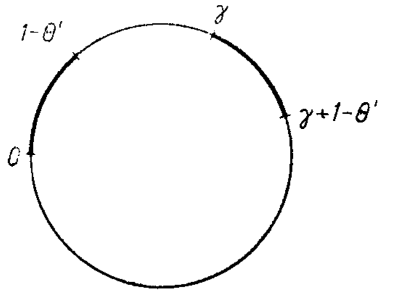
ZM-235

Rys. 1



ZM-236

Rys. 2



ZM-237

Rys. 3

Rozważmy przypadek (A). Jeżeli punkt $j\theta'$ leży w obrębie łuku $0, \gamma$, to punkt $(j+1)\theta'$ leży poza nim wtedy i tylko wtedy, gdy punkt $j\theta'$ leży na łuku $\gamma-\theta', \gamma$. Tak samo, jeżeli punkt $j\theta'$ leży w obrębie łuku $\gamma, 1-\theta'$, to $(j+1)\theta'$ leży poza nim wtedy i tylko wtedy, gdy $j\theta'$ leży na łuku $1-\theta', 0$.

Z twierdzenia I wynika, że w tym przypadku

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S}{N} = 2\theta'. \tag{3}$$

W przypadku (B), jeśli punkt $j\theta'$ leży w obrębie łuku $0,\gamma$, to $(j+1)\theta'$ leży poza nim. Jeśli $j\theta'$ leży w obrębie łuku $\gamma,0$, to $(j+1)\theta'$ leży wtedy i tylko wtedy poza nim, gdy punkt $j\theta'$ leży na łuku $1-\theta', 1-\theta'+\gamma$. W tym przypadku mamy

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S}{N} = 2\gamma. \tag{4}$$

Wreszcie w przypadku (C), jeśli punkt $j\theta'$ leży w obrębie łuku $0,\gamma$, to $(j+1)\theta'$ leży wtedy i tylko wtedy poza nim, gdy punkt $j\theta'$ leży na łuku $0, 1-\theta'$. Tak samo, jeśli $j\theta'$ leży w obrębie łuku $\gamma,0$, to $(j+1)\theta'$ leży wtedy i tylko wtedy poza nim, gdy $j\theta'$ leży na łuku $\gamma, \gamma+1-\theta'$. W tym przypadku otrzymujemy

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S}{N} = 2(1-\theta'). \tag{5}$$

W ten sposób dowiedliśmy, że gdy $N \to \infty$, to stosunek ilości S wyrazów ciągu $\theta, 2\theta, \ldots, N\theta$, spełniających warunek (a) lub (b), do ogólnej liczby wyrazów N zmierza do granicy określonej wzorami (3), (4) i (5), którą oznaczymy przez δ:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{S}{N}=\delta.$$

Z twierdzeń III oraz II wyprowadzamy następujące

TWIERDZENIE IV. *Oznaczmy przez $S_{1,2,\dots,N}$ liczbę kolumn zespołu ciągów* (2) *spełniających dla każdego k od* 1 *do m warunek* (a) *lub* (b):

$$\text{(a)}\qquad j\theta_k-[j\theta_k]<\gamma,\quad (j+1)\theta_k-[(j+1)\theta_k]\geqslant\gamma,$$

$$\text{(b)}\qquad j\theta_k-[j\theta_k]\geqslant\gamma,\quad (j+1)\theta_k-[(j+1)\theta_k]<\gamma.$$

Oznaczmy dalej liczbę wyrazów spełniających warunek (a) *lub* (b) *w ciągu k przez S_k oraz $\lim\limits_{N\to\infty}(S_k/N)$ przez δ_k. Mamy wtedy*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{S_{1,2,\dots,N}}{N}=\delta_1\delta_2\dots\delta_m.$$

(*Będzie to słuszne również dla każdego podzespołu zespołu ciągów* (2).)

Wyobraźmy sobie m kół o obwodach 1. Na k-tym kole punkty $j\theta_k$ spełniające warunek (a) lub (b) leżą na dwóch określonych łukach o łącznej długości δ_k. Z twierdzenia II wynika, że stosunek liczby tych j, dla których warunek (a) lub (b) spełniony jest na wszystkich okręgach, tzn. $S_{1,2,\dots,N}$, do N równa się iloczynowi $\delta_1\delta_2\dots\delta_m$.

TWIERDZENIE V. *Jeśli* $|1-2\gamma_k|\leqslant a<1$ *oraz* $\theta_k'\geqslant\beta>0$, $1-\theta_k'\geqslant\beta>0$, $|\frac{1}{2}-\theta_k'|\geqslant\beta>0$, *gdzie a i β są to liczby stałe, to* $|1-2\delta_k|\leqslant\lambda<1$, *gdzie λ jest znowu liczbą stałą.*

Dowód. Należy przede wszystkim zaznaczyć, że bez uszczuplenia ogólności twierdzenia możemy założyć $a>\frac{1}{2}$ i $\beta<\frac{1}{4}$.

Dla trzech przypadków rozpatrywanych w dowodzie twierdzenia III mamy dla δ_k i $|1-2\delta_k|$ (zakładając jak w tamtym dowodzie, że $\gamma_k\leqslant\frac{1}{2}$)

Przypadek		δ_k	$\lvert 1-2\delta_k\rvert$
(A)	$\theta_k'<\gamma_k\leqslant\frac{1}{2}$	$2\theta_k'$	$\lvert 1-4\theta_k'\rvert$
(B)	$\gamma_k\leqslant\theta_k'<1-\gamma$	$2\gamma_k$	$\lvert 1-4\gamma_k\rvert$
(C)	$\frac{1}{2}\leqslant 1-\gamma_k\leqslant\theta_k'$	$2(1-\theta_k')$	$\lvert 1-4(1-\theta_k')\rvert$

W przypadkach (A) i (C) z warunków

$$\theta_k'\geqslant\beta<\tfrac{1}{4},\quad 1-\theta_k'\geqslant\beta<\tfrac{1}{4},\quad |\tfrac{1}{2}-\theta_k'|\geqslant\beta<\tfrac{1}{4}$$

wynika, jak łatwo zauważyć, że
$$|1-2\delta_k| \leqslant 1-4\beta < 1.$$

W przypadku (B) z warunku $|1-2\gamma_k| \leqslant \alpha$ i z nierówności $\gamma_k \leqslant \frac{1}{2}$ wynika, że
$$\gamma_k \geqslant \tfrac{1}{2}(1-\alpha).$$

Następnie z warunku $|\frac{1}{2}-\theta_k'| \geqslant \beta$ wynika, że
$$\theta_k' \leqslant \tfrac{1}{2}-\beta \quad \text{albo} \quad 1-\theta_k' \leqslant \tfrac{1}{2}-\beta.$$

Poza tym mamy $\gamma_k \leqslant \theta_k$ oraz $1-\gamma_k > \theta_k'$, czyli $\gamma_k < 1-\theta_k'$. Stąd wynika, że
$$\gamma_k \leqslant \tfrac{1}{2}-\beta.$$

Mamy więc
$$\tfrac{1}{2}(1-\alpha) \leqslant \gamma_k \leqslant \tfrac{1}{2}-\beta.$$

Otrzymujemy stąd dla przypadku $\gamma_k \leqslant \frac{1}{4}$
$$|1-4\gamma_k| \leqslant 1-4(1-\alpha)/2 = 2\alpha-1 < 1,$$
a dla przypadku $\gamma_k > \frac{1}{4}$
$$|1-4\gamma_k| \leqslant 1-4\beta < 1.$$

Stąd wynika, że jeśli λ jest równe większej z liczb $2\alpha-1$ i $1-4\beta$, to mamy
$$|1-2\delta_k| \leqslant \lambda < 1.$$

TWIERDZENIE VI. *Twierdzenia* III, IV *i* V *pozostają w mocy, jeśli warunki* (a) *i* (b) *przybierają ogólniejszą postać*

(a) $$j\theta_k-[j\theta_k] < \gamma_k, \quad (j+a)\theta_k-[(j+a)\theta_k] \geqslant \gamma_k,$$

(b) $$j\theta_k-[j\theta_k] \geqslant \gamma_k, \quad (j+a)\theta_k-[(j+a)\theta_k] < \gamma_k,$$

gdzie a jest liczbą dodatnią całkowitą, i jeśli w twierdzeniu V *zastąpimy θ' przez $\theta_k^{(a)} = a\theta_k-[a\theta_k]$.*

Dowody tych twierdzeń przeprowadzić można jak wyżej, zastępując θ' przez $\theta_k^{(a)} = a\theta_k-[a\theta_k]$.

Praca wpłynęła 14. 5. 1957

М. КАЛЕЦКИЙ (Варшава)

МЕХАНИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СЛУЧАЙНОГО ЯВЛЕНИЯ

РЕЗЮМЕ

Пусть будет дано m часов, циферблаты которых имеют периметр равный единице и разделены на два сегмента — черный и белый. Каждые из часов имеют только одну стрелку, конец которой движется соответственно со скоростью $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$. Через каждую единицу времени проверяется, находятся ли стрелки всех m часов в черном или же в белом сегменте. Если число черных сегментов четно, то записывается A, если же нечетно, записывается B.

Пусть $(A)_{Nm}$ означает частоту появления события A в N наблюдениях, а $(A_i, A_{j+a})_{Nm}$ — частоту появления комбинации AA в наблюдениях с номерами j и $j+a$. Аналогично определены обозначения $(B)_{Nm}$, $(B_j, B_{j+a})_{Nm}$, $(A_j, B_{j+a})_{Nm}$, $(B_j, A_{j+a})_{Nm}$.

При некоторых предположениях относительно скоростей $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ и при предположении, что длина черного сегмента на k-ых часах p_k удовлетворяет условию $|1-2p_k| \leqslant a < 1$, где a константа, автор получает следующие теоремы:

(1) $$\lim_{m\to\infty} \lim_{N\to\infty} (A)_{Nm} = \lim_{m\to\infty} \lim_{N\to\infty} (B)_{Nm} = \tfrac{1}{2};$$

(2) $$\lim_{m\to\infty} \lim_{N\to\infty} (A_j A_{j+a})_{Nm} = \lim_{m\to\infty} \lim_{N\to\infty} (B_j B_{j+a})_{Nm} = \\ = \lim_{m\to\infty} \lim_{N\to\infty} (A_j B_{j+a})_{Nm} = \lim_{m\to\infty} \lim_{N\to\infty} (B_j A_{j+a})_{Nm} = \tfrac{1}{4}.$$

Это значит, что j-ое и $(j+a)$-ое наблюдения асимптотически независимы с произвольной степенью точности, когда m достаточно велико.

(3) *j-ое наблюдение асимптотически независимо в этом смысле от всех a предыдущих наблюдений.*

В конце статьи автор показывает, что при помощи рассматриваемой детерминистской системы можно описать появление *rouge* и *noir* в рулетке.

M. KALECKI (Warszawa)

MECHANISTIC MODEL OF A RANDOM PHENOMENON

SUMMARY

Let m denote the number of watches whose faces have a circumference equal to unity and are divided into two segments, a black and a white one. Each of the watches has only one hand, whose point moves with the velocity $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$. We check at intervals of a unit of time all the m watches to see whether their hands are in the black or in the white field. If the number of black fields is even, we record A; if it is odd, we record B.

Let $(A)_{Nm}$ denote the frequency of the occurrence of A in N observations, and $(A_j A_{j+a})_{Nm}$ the frequency of the occurrence of the combination AA in the j-th

and the $(j+a)$-th observations. In a similar way we define the symbols $(B)_{Nm}$ and $(B_j B_{j+a})_{Nm}$, $(A_j B_{j+a})_{Nm}$ and $(B_j A_{j+a})_{Nm}$.

Under certain assumptions regarding the velocities $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ and under the assumption that the length p_k of the arc of the black segment on the k-th watch satisfies the condition $|1-2p_k| \leqslant a < 1$ where a is fixed, the author obtains the following theorems:

(1)
$$\lim_{m\to\infty}\lim_{N\to\infty}(A)_{Nm} = \lim_{m\to\infty}\lim_{N\to\infty}(B)_{Nm} = \tfrac{1}{2};$$

(2)
$$\lim_{m\to\infty}\lim_{N\to\infty}(A_j A_{j+a})_{Nm} = \lim_{m\to\infty}\lim_{N\to\infty}(B_j B_{j+a})_{Nm} =$$
$$= \lim_{m\to\infty}\lim_{N\to\infty}(A_j B_{j+a})_{Nm} = \lim_{m\to\infty}\lim_{N\to\infty}(B_j A_{j+a})_{Nm} = \tfrac{1}{4},$$

which means that the j-th and the $(j+a)$-th observations are asymptotically independent with any degree of approximation if m is sufficiently large.

(3) *The j-th observation is, in the same manner, asymptotically independent of all the a observations preceding it.*

Finally the author shows that by means of the deterministic system considered it is possible to describe the occurrence of *rouge* and *noir* in the roulette.