ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
IX, 3 (1968)

M. KWAPISZ (Gdańsk)

UWAGI O PEWNYM ALGORYTMIE ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH ZWYCZAJNYCH

1. R. Zuber w swojej pracy [1] formułuje pewien algorytm (tzw. algorytm Z) służący do rozwiązywania zagadnienia Cauchy'ego

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{1}$$

Algorytm Z jest uogólnieniem metody Picarda, a także metody Czapłygina. Algorytm ten pozostaje w związku z pewną modyfikacją metody kolejnych przybliżeń Picarda, badaną przez wielu autorów ([2]-[6]). Jednak w ogólnym wypadku nie pokrywa się on ze wspomnianą modyfikacją.

Twierdzenia o zbieżności ciągów $\{y_n(x)\}$ skonstruowanych w pracy [1] mają charakter lokalny (por. założenia (1.7), (5.8)). Celem tej pracy jest sformułowanie twierdzeń o zbieżności ogólniejszych od twierdzeń zawartych w pracy [1]. Dowody tych twierdzeń będą się opierać na prostym lemacie z teorii nierówności całkowych [7], [8].

LEMAT 1. *Jeżeli*

1° *funkcja* $k(x, s, u)$ *o wartościach rzeczywistych jest określona i ciągła dla* $x \in I = \langle x_0, x_0+a)$, $0 \leqslant a \leqslant +\infty$, $s \in \langle x_0, x\rangle$, $u \in (-\infty, +\infty)$,

2° $k(x, s, u)$ *nie maleje względem zmiennej* u,

3° *w przedziale* I *istnieje górne rozwiązanie* $\bar{u}(x)$ *równania*

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} k\big(x, s, u(s)\big)ds + g(x),$$

gdzie $g(x)$ *jest funkcją ciągłą w przedziale* I, *to dla każdej funkcji ciągłej* $v(x)$, $x \in I$, *takiej że*

$$v(x) \leqslant \int_{x_0}^{x} k\big(x, s, v(s)\big)ds + g(x),$$

zachodzi nierówność $v(x) \leqslant \bar{u}(x)$, $x \in I$.

Z lematu 1 wynika (por. także [9])

LEMAT 2. *Jeżeli funkcje* $\varphi(x), \psi(x), \lambda(x)$ *są określone, ciągłe dla* $x \in I$, $\psi(x) \geqslant 0$, $\lambda(x) \geqslant 0$ *i funkcja* $\psi(x)$ *jest niemalejąca, to z nierówności*

$$\varphi(x) \leqslant \psi(x) + \int_{x_0}^{x} \lambda(s)\varphi(s)ds$$

wynika oszacowanie

$$\varphi(x) \leqslant \psi(x)\cdot\exp\Big[\int_{x_0}^{x} \lambda(s)ds\Big], \qquad x \in I.$$

2. Teraz sformułujemy twierdzenie uogólniające twierdzenie 1 [1]. Niech B oznacza dowolną przestrzeń Banacha.

ZAŁOŻENIE 1.

1° Funkcje $f(x, y)$, $F_n(x, y)$ o wartościach z przestrzeni B są określone i ciągłe dla $(x, y) \in R$, gdzie $R = I \times K_0$, $K_0 = [y: \|y - y_0\| < b, y \in B]$, $y_0 \in B$.

2° Istnieje stała $L \geqslant 0$ taka, że

$$\begin{aligned} \|f(x, y) - f(x, \bar{y})\| &\leqslant L\|y - \bar{y}\|, \\ \|F_n(x, y) - F_n(x, \bar{y})\| &\leqslant L\|y - \bar{y}\| \end{aligned} \tag{2}$$

dla $(x, y), (x, \bar{y}) \in R$.

3° Dla każdego $n = 0, 1, \ldots$ istnieje funkcja $y_{n+1}(x)$, określona dla $x \in I$, o wykresie leżącym w zbiorze R, i spełniająca warunki

$$y'_{n+1}(x) = F_n\big(x, y_{n+1}(x)\big), \qquad y_{n+1}(x_0) = y_0. \tag{3}$$

4° Dla każdego $a \in \langle 0, a)$ zbieżny jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max_{x \in I_a} \|\delta_n(x)\|, \tag{4}$$

gdzie $I_a = \langle x_0, x_0 + a\rangle$,

$$\delta_n(x) = F_n\big(x, y_n(x)\big) - f\big(x, y_n(x)\big).$$

UWAGA. W odróżnieniu od pracy [1] rozważamy tu rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego tylko w prawo od punktu początkowego x_0; uwarunkowane jest to metodą dowodu. Ogólny wypadek może być sprowadzony do rozważanego w drodze stosowanej zamiany zmiennej niezależnej.

TWIERDZENIE 1. *Jeżeli spełnione jest założenie* 1, *to ciąg* $\{y_n(x)\}$, $n = 0, 1, \ldots$, *gdzie* $y_0(x) \equiv y_0$, *jest zbieżny niemal jednostajnie w przedziale* I *do funkcji* $y(x)$ *będącej rozwiązaniem zagadnienia* (1).

Dowód. Pokażemy, że ciąg $\{y_n(x)\}$ jest zbieżny jednostajnie w dowolnym przedziale I_a. Ze związków (2), (3), postępując jak w pracy [1], otrzymujemy kolejno

$$y'_{n+1}(x) = f\big(x, y_n(x)\big) + F_n\big(x, y_{n+1}(x)\big) - F_n\big(x, y_n(x)\big) + \delta_n(x),$$

$$y_{n+1}(x) - y_n(x) = \int_{x_0}^{x} [f\big(t, y_n(t)\big) - f(t, y_{n-1}(t)]\,dt +$$

$$+\int_{x_0}^{x} [F_n\big(t, y_{n+1}(t)\big) - F_n\big(t, y_n(t)\big)]\,dt + \int_{x_0}^{x} \big[F_{n-1}\big(t, y_n(t)\big) -$$

$$- F_{n-1}\big(t, y_{n-1}(t)\big)\big]\,dt + \int_{x_0}^{x} [\delta_n(t) - \delta_{n-1}(t)]\,dt,$$

$$u_{n+1}(x) \leqslant L\int_{x_0}^{x} u_{n+1}(t)\,dt + 2L\int_{x_0}^{x} u_n(t)\,dt + \int_{x_0}^{x} \varrho_n(t)\,dt, \tag{5}$$

gdzie

$$u_{n+1}(x) = \|y_{n+1}(x) - y_n(x)\|, \qquad \varrho_n(t) = \|\delta_n(t)\| + \|\delta_{n-1}(t)\|, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Z nierówności (5) i lematu 2 wynika nierówność

$$u_{n+1}(x) \leqslant \Big[\int_{x_0}^{x} 2L\cdot u_n(t)\,dt + \int_{x_0}^{x} \varrho_n(t)\,dt\Big]\cdot \exp[L(x-x_0)].$$

Niech

$$D = 2L\cdot\exp(La), \qquad \gamma_n = \max_{t\in I_a}[\varrho_n(t)\cdot a\exp(La)].$$

Mamy wówczas

$$u_{n+1}(x) \leqslant D\int_{x_0}^{x} u_n(t)\,dt + \gamma_n, \qquad x\in I_a, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Niech

$$\nu_0 = \max_{t\in I_a}\big[\|y_0(t)\|\cdot\exp[-\lambda(t-x_0)]\big],$$

$$\nu_n = \max_{t\in I_a}\big[u_n(t)\cdot\exp[-\lambda(t-x_0)]\big], \qquad \lambda > 0, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

wówczas z nierówności (6) otrzymujemy kolejno

$$u_{n+1}(x) \leqslant D\int_{x_0}^{x} \exp(\lambda s)\cdot\exp(-\lambda s)\,u_n(s)\,ds + \gamma_n \leqslant$$

$$\leqslant D\nu_n\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot\big[\exp\big(\lambda(x-x_0)\big) - 1\big] + \gamma_n \leqslant$$

$$\leqslant D\nu_n\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot\exp\big(\lambda(x-x_0)\big) + \gamma_n,$$

$$u_{n+1}(x)\cdot\exp\big(-\lambda(x-x_0)\big) \leqslant D\cdot\frac{\nu_n}{\lambda} + \gamma_n\cdot\exp\big(-\lambda(x-x_0)\big),$$

$$(7) \qquad v_{n+1} \leqslant \frac{D}{\lambda} \cdot v_n + \gamma_n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Wybierzmy teraz λ takie, aby spełniona była nierówność $m = \frac{D}{\lambda} < 1$. Z nierówności (7) wynika, że majorantą szeregu

$$(8) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} v_n$$

jest szereg

$$v_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(m^n \cdot v_1 + \sum_{i=0}^{n-1} m^i \cdot \gamma_{n-i}\right), \qquad \sum_{i=0}^{-1} \stackrel{\mathrm{df}}{=} 0,$$

który jest zbieżny dzięki zbieżności szeregu (4) i nierówności $m < 1$; jego suma wynosi

$$v_0 + \frac{1}{1-m}\left(v_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n\right).$$

Ze zbieżności szeregu (8) wynika jednostajna zbieżność w przedziale I_a szeregu

$$y_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \left[y_{n+1}(x) - y_n(x)\right].$$

Oznacza to, że zbieżny jest jednostajnie w przedziale I_a ciąg $\{y_n(x)\}$. Podobnie jak w pracy [1] pokazujemy łatwo, że funkcja

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$$

spełnia równanie różniczkowe (1) i podany tam warunek początkowy. Istotnie, wykorzystując nierówności (2), wystarcza przejść do granicy przy $n \to \infty$ w równości

$$y_{n+1}(x) = \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_n(t)\big)dt + \int_{x_0}^{x} \Big[F_n\big(t, y_{n+1}(t)\big) - F_n\big(t, y_n(t)\big)\Big]dt + \int_{x_0}^{x} \delta_n(t)\,dt + y_0.$$

Uwaga. Z lematu 2 wynika następujące proste oszacowanie błędu:

$$\|y_n(x) - y(x)\| \leqslant \|y_n(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f\big(s, y_n(s)\big)ds\| \cdot \exp\big(L(x - x_0)\big),$$

$n = 0, 1, \ldots, x \in I$. Istotnie,

$$\|y_n(x)-y(x)\| = \|y_n(x)-y_0-\int_{x_0}^{x} f\big(s, y(s)\big)ds+$$

$$+\int_{x_0}^{x} f\big(s, y_n(s)\big)ds-\int_{x_0}^{x} f\big(s, y_n(s)\big)ds\| \leqslant$$

$$\leqslant \|y_n(x)-y_0-\int_{x_0}^{x} f\big(s, y_n(s)\big)ds\|+$$

$$+\int_{x_0}^{x} L\|y_n(s)-y(s)\|ds;$$

stosując teraz lemat 2, otrzymujemy podane oszacowanie.

3. Powtórzmy w nieco ogólniejszej postaci sformułowanie algorytmu Z [1] służącego do wyznaczania rozwiązań zagadnienia (1).

Biorąc dowolną funkcję $y_0(x)$ określoną i ciągłą dla $x \epsilon I$, o wykresie leżącym w zbiorze R, spełniającą warunek $y_0(x_0) = y_0$, konstruujemy funkcję $F_0(x, y)$, o wartościach z przestrzeni B, określoną i ciągłą w zbiorze R, spełniającą warunek

$$F_0\big(x, y_0(x)\big) \equiv f\big(x, y_0(x)\big)$$

oraz taką, że zagadnienie

$$y' = F_0(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

ma rozwiązanie $y_1(x)$ określone w przedziale I, o wykresie leżącym w zbiorze R. Dalej, gdy dane jest $y_n(x)$, konstruujemy funkcję $F_n(x, y)$, określoną i ciągłą w zbiorze R, spełniającą warunek

$$F_n\big(x, y_n(x)\big) \equiv f\big(x, y_n(x)\big) \tag{9}$$

oraz taką, że zagadnienie

$$y' = F_n(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{10}$$

ma rozwiązanie $y_{n+1}(x)$ określone w przedziale I, o wykresie leżącym w zbiorze R.

W podany sposób zostały określone dwa ciągi $\{y_n(x)\}$, $\{F_n(x, y)\}$ dla $n = 0, 1, \ldots$

Z twierdzenia 1 wynika

TWIERDZENIE 2. *Jeżeli wyrazy ciągu* $\{F_n(x, y)\}$ *i funkcja* $f(x, y)$ *spełniają warunek Lipschitza* (2), *to ciąg* $\{y_n(x)\}$ *jest niemal jednostajnie zbieżny w przedziale* I *do rozwiązania zagadnienia* (1).

Dowód. Z przytoczonych założeń, a w szczególności z warunków (9) i (10) wynika, że spełnione są wszystkie założenia 1, więc teza twierdzenia 2 jest bezpośrednią konsekwencją tezy twierdzenia 1.

Uwaga. Funkcje $F_n(x, y)$ mogą być np. postaci

$$F_n(x, y) = f_y(x, y_n(x))\cdot(y - y_n(x)) + f(x, y_n(x)), \tag{11 a)}$$

$$F_n(x, y) = d_n(x)\cdot(y - y_n(x)) + f(x, y_n(x)), \tag{12 b)}$$

$$F_n(x, y) = G(x, y, y_n(x)), \qquad G(x, y, y) = f(x, y). \tag{13 c)}$$

Rozważymy bliżej przykład c).

Założenie 2.

1° Funkcja $G(x, y, z)$, o wartościach z przestrzeni B, jest określona i ciągła dla $(x, y, z)\in S$, $S = I\times K_0\times K_0$.

2° Spełnione są warunki

$$\begin{aligned} &\|G(x, y, z) - G(x, \bar{y}, z)\| \leqslant L\|y - \bar{y}\|, \\ &\|G(x, y, y) - G(x, \bar{y}, \bar{y})\| \leqslant L\|y - \bar{y}\| \end{aligned} \tag{14}$$

dla $x\in I$, $y, \bar{y}, z\in K_0$.

Z twierdzenia 2 mamy

Wniosek 1. Jeżeli spełnione jest założenie 2, spełnione są związki (13) i ciąg $\{y_n(x)\}$ jest określony według algorytmu Z, to ciąg ten jest niemal jednostajnie zbieżny w przedziale I do rozwiązania zagadnienia (1).

Uwaga. Funkcja $G(x, y, z)$ może być w szczególności postaci

$$G(x, y, z) = f_y(x, z)\cdot(y - z) + f(x, z),$$

$$G(x, y, z) = d_n(x)\cdot(y - z) + f(x, z),$$

otrzymujemy wówczas przykłady (11), (12). Warunki (14) są spełnione wtedy, gdy $\|f_y(x, z)\| \leqslant L$, $\|d_n(x)\| \leqslant L$. Widać natomiast, że nierówności te nie wystarczają na to, by spełniony był przez funkcję $G(x, y, z)$ ogólny warunek Lipschitza względem obu zmiennych y i z

$$\|G(x, y, z) - G(x, \bar{y}, \bar{z})\| \leqslant L[\|y - \bar{y}\| + \|z - \bar{z}\|].$$

Wykażemy teraz

Twierdzenie 3. *Jeżeli*

1° *spełnione jest założenie* 2, 1°,

2° *spełnione są warunki*

$$\begin{aligned} &\|G(x, z, y) - G(x, y, \bar{y})\| \leqslant L[\|y - \bar{y}\| + \|z - y\|], \\ &\|f(x, y) - f(x, \bar{y})\| \leqslant L\|y - \bar{y}\| \end{aligned} \tag{15}$$

dla $x \in I$, $y, \bar{y}, z \in K_0$,

(16) 3° $$F_n(x, y) = G(x, y, y_n(x)),$$

(17) 4° $$\delta_n(x) = G(x, y_n(x), y_n(x)) - f(x, y_n(x)) \to 0$$

dla $n \to \infty$, $x \in I$,

5° ciąg $\{y_n(x)\}$ jest określony według algorytmu Z, to ciąg $\{y_n(x)\}$ jest niemal jednostajnie zbieżny w przedziale I do rozwiązania zagadnienia (1).

Dowód. Pokażemy, że ciąg $\{y_n(x)\}$ jest zbieżny. Z definicji ciągu $\{y_n(x)\}$ i związków (15), (16) mamy kolejno

$$y_{n+1}(x) - y_n(x) = \int_{x_0}^{x} \left[G(s, y_{n+1}(s), y_n(s)) - G(s, y_n(s), y_{n-1}(s))\right] ds,$$

$$u_{n+1}(x) \leqslant \int_{x_0}^{x} L u_{n+1}(s)\, ds + \int_{x_0}^{x} L_{u_n}(s)\, ds.$$

Dalej, postępując jak w dowodzie twierdzenia 1 i przyjmując wprowadzone tam oznaczenia, znajdujemy

$$v_{n+1} \leqslant \frac{D}{2\lambda} \cdot v_n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Z nierówności tej, przy λ takim, że $\frac{D}{2\lambda} < 1$, wynika niemal jednostajna zbieżność w przedziale I ciągu $\{y_n(x)\}$. Pokażemy teraz, że funkcja

$$y(x) = \lim_{n \to \infty} y_n(x), \qquad x \in I$$

jest rozwiązaniem zagadnienia (1). Istotnie, z udowodnionej zbieżności ciągu $\{y_n(x)\}$ wynika, że $y(x)$ spełnia warunki

(18) $$y'(x) = G(x, y(x), y(x)), \qquad y(x_0) = y_0.$$

Natomiast ze związku (17) wynika równość

(19) $$f(x, y(x)) = G(x, y(x), y(x)), \qquad x \in I.$$

Ze związków (18) i (19) wnioskujemy, że $y(x)$ jest rozwiązaniem zagadnienia (1).

4. Teraz rozważymy algorytm Z w wypadku, gdy spełnione są równości (13) przy ogólniejszym warunku niż warunek Lipschitza.

ZAŁOŻENIE 3.

1° Spełnione jest założenie 2, 1°.

2° Istnieje funkcja $\omega(x, u, v)$ o wartościach rzeczywistych, określona i ciągła dla $x \in I$, $u, v \in (-\infty, +\infty)$, niemalejąca względem u i v, taka, że $\omega(x, 0, 0) = 0$, $x \in I$.

3° Dla każdego $\eta \geqslant 0$ istnieje górne rozwiązanie równania

$$u' = \omega(x, u, u) \tag{20}$$

określone dla $x \in I$ i spełniające warunek początkowy $u(x_0) = \eta$.

4° Istnieje dokładnie jedno rozwiązanie równania (20) spełniające warunek początkowy $u(x_0) = 0$ i jest nim funkcja $u(x) \equiv 0$.

5° Spełniona jest nierówność

$$\|G(x, y, z) - G(x, \bar{y}, \bar{z})\| \leqslant \omega(x, \|y - \bar{y}\|, \|z - \bar{z}\|) \tag{21}$$

dla $x \in I$, $y, \bar{y}, z, \bar{z} \in K_0$.

Niech $u_0(x)$ będzie rozwiązaniem równania

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} \omega\big(s, u(s), u(s)\big) ds + h(x), \tag{22}$$

gdzie

$$h(x) = \begin{cases} 2 \cdot b & \text{dla} \quad x \in I, \quad b < +\infty, \\ \|y_0(x) - y_0\| + \int_{x_0}^{x} \|G\big(s, y_0(s), y_0(s)\big)\| ds, & x \in I, \quad b = +\infty. \end{cases}$$

Zbudujmy ciąg $\{u_n(x)\}$, $n = 0, 1, \ldots$, następująco: gdy dane jest $u_n(x)$, to $u_{n+1}(x)$ określamy jako górne rozwiązanie równania

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} \omega\big(s, u(s), u_n(s)\big) ds, \tag{23}$$

gdzie $u_0(x)$ jest rozwiązaniem równania (22).

Lemat 3. *Jeżeli spełnione jest założenie* 3, 2°-4° *i ciąg* $\{u_n(x)\}$ *określony jest formułą* (23), *to*

1° $u_{n+1}(x) \leqslant u_n(x)$, $n = 0, 1, \ldots, x \in I$,

2° $\lim_{n \to \infty} u_n(x) = 0, x \in I$, *zbieżność ta jest niemal jednostajna w przedziale* I.

Dowód. Z definicji funkcji $u_1(x)$ mamy

$$u_1(x) \leqslant \int_{x_0}^{x} \omega\big(s, u_1(s), u_0(s)\big) ds + h(x),$$

lecz z lematu 1 otrzymujemy $u_1(x) \leqslant u_0(x)$. Dalej, zakładając nierówność $u_n(x) \leqslant u_{n-1}(x)$, z nierówności

$$u_{n+1}(x) = \int_{x_0}^{x} \omega\big(s, u_{n+1}(s), u_n(s)\big) ds \leqslant \int_{x_0}^{x} \omega\big(s, u_{n+1}(s), u_{n-1}(s)\big) ds$$

i z lematu 1 mamy $u_{n+1}(x) \leqslant u_n(x)$. Zastosowanie zasady indukcji matematycznej kończy dowód wniosku 1°.

Funkcja

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x), \qquad x \in I,$$

spełnia równanie (20) i warunek $u(0) = 0$, a więc dzięki założeniu 3, 4° jest ona równa zeru tożsamościowo.

Niemal jednostajna zbieżność ciągu $\{u_n(x)\}$ w przedziale I wynika ze znanego twierdzenia Diniego. W ten sposób lemat 3 został udowodniony całkowicie.

Teraz możemy sformułować

TWIERDZENIE 4. *Jeżeli spełnione jest założenie* 3 *i ciąg* $\{y_n(x)\}$ *jest określony za pomocą algorytmu Z, przy warunku* (13), *to jest on zbieżny niemal jednostajnie w przedziale I do rozwiązania zagadnienia* (1).

Dowód. Pokażemy najpierw, że słuszna jest nierówność

$$(24) \qquad \|y_p(x) - y_0(x)\| \leqslant u_0(x), \qquad p = 0, 1, \ldots, \qquad x \in I.$$

Istotnie jest ona słuszna, gdy $b < +\infty$; wynika to bezpośrednio z definicji funkcji $u_0(x)$.

Załóżmy więc, że $b = +\infty$. Korzystając z nierówności (21), mamy

$$\begin{aligned}
\|y_p(x) - y_0(x)\| &\leqslant \Big\|\int_{x_0}^{x} G\big(s, y_p(s), y_{p-1}(s)\big)\,ds\Big\| + \|y_0(x) - y_0\| \leqslant \\
&\leqslant \Big\|\int_{x_0}^{x} \big[G\big(s, y_p(s), y_{p-1}(s)\big) - G\big(s, y_0(s), y_0(s)\big)\big]\,ds\Big\| + \\
&\quad + \Big\|\int_{x_0}^{x} G\big(s, y_0(s), y_0(s)\big)\,ds\Big\| + \|y_0(x) - y_0\| \leqslant \\
&\leqslant \int_{x_0}^{x} \omega\big(s, \|y_p(s) - y_0(s)\|, \|y_{p-1}(s) - y_0(s)\|\big)\,ds + \\
&\quad + \int_{x_0}^{x} \big\|G\big(s, y_0(s), y_0(s)\big)\big\|\,ds + \|y_0(x) - y_0\|.
\end{aligned}$$

Nierówność (24) jest prawdziwa dla $p = 0$; wynika to z definicji funkcji $u_0(x)$. Zakładając, że jest ona prawdziwa dla $p-1$, z powyższej nierówności otrzymujemy

$$\|y_p(x) - y_0(x)\| \leqslant \int_{x_0}^{x} \omega\big(s, \|y_p(s) - y_0(s)\|, u_0(s)\big)\,ds + h(x),$$

stąd natomiast i z lematu 1 wynika prawdziwość nierówności (24) dla p. Użycie zasady indukcji matematycznej kończy dowód nierówności (24) dla dowolnego $p = 0, 1, \ldots$

Dalej, również za pomocą zasady indukcji matematycznej, pokażemy, że

$$(25) \qquad \|y_{n+p}(x) - y_n(x)\| \leqslant u_n(x), \qquad x \in I, \qquad n, p = 0, 1, \ldots$$

Istotnie nierówność ta jest prawdziwa dla $n = 0$. Załóżmy, że jest ona prawdziwa dla n, wówczas z nierówności (21) mamy

$$\|y_{n+p+1}(x) - y_{n+1}(x)\| \leqslant \int_{x_0}^{x} \omega\big(s, \|y_{n+p+1}(s) - y_{n+1}(s)\|, \|y_{n+p}(s) - y_n(s)\|\big) ds \leqslant$$
$$\leqslant \int_{x_0}^{x} \omega\big(s, \|y_{n+p+1}(s) - y_{n+1}(s)\|, u_n(s)\big) ds.$$

Stąd, z lematu 1 i definicji ciągu $\{u_n(x)\}$ otrzymujemy nierówność

$$\|y_{n+p+1}(x) - (y_{n+1}(x)\| \leqslant u_{n+1}(x).$$

Użycie zasady indukcji matematycznej kończy dowód nierówności (25).

Z nierówności (25) i lematu 3 wynika niemal jednostajna zbieżność w przedziale I ciągu $\{y_n(x)\}$ do rozwiązania $y(x)$ zagadnienia

$$y' = G(x, y, y), \qquad y(x_0) = y_0,$$

lecz ze związku (13) wynika, że funkcja $y(x)$ jest również rozwiązaniem zagadnienia (1). Prawdziwe jest ponadto następujące oszacowanie błędu

$$\|y_n(x) - y(x)\| \leqslant u_n(x), \qquad x \in I, \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

które otrzymuje się z nierówności (25) przy $p \to \infty$.

Uwaga. Funkcja $\omega(x, u, v)$ może być w szczególnym wypadku funkcją liniową względem zmiennych u i v, np.

$$\omega(x, u, v) = L_1(x) \cdot u + L_2(x) \cdot v,$$

gdzie nieujemne funkcje $L_i(x)$, $i = 1, 2$, są ciągłe dla $x \in I$. Funkcje $L_i(x)$ mogą być stałe; jeżeli $L_1(x) \equiv L_2(x) \equiv L = \mathrm{const}$, to przy założeniu $G(x, y, y) = f(x, y)$ otrzymujemy twierdzenie 5 [1].

5. Algorytm Z może być sformułowany dla dowolnego równania postaci

$$(26) \qquad y = f(y)$$

rozważanego w dowolnej przestrzeni Banacha B.

Sformułujemy najpierw uogólnienie twierdzenia 1.

TWIERDZENIE 5. Jeżeli

1° *funkcje* $f(y)$, $F_n(y)$, $n = 0, 1, \ldots$, są określone i ciągłe dla $y \in K_0$,

2° *istnieje stała* $k \geqslant 0$ *taka, że*

$$\begin{aligned} &\|f(y)-f(\bar{y})\| \leqslant k\|y-\bar{y}\|, \\ &\|F_n(y)-F_n(\bar{y})\| \leqslant k\|y-\bar{y}\| \end{aligned} \tag{27}$$

dla dowolnych $y, \bar{y} \in K_0$, $0 \leqslant k < \frac{1}{3}$,

3° *dla każdego* $n = 0, 1, \ldots$ *istnieje w kuli* K_0 *rozwiązanie* y_{n+1} *równania*

$$y = F_n(y), \tag{28}$$

4° *zbieżny jest szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\delta_n\|, \quad \text{gdzie} \quad \delta_n = F_n(y_n) - f(y_n),$$

to ciąg $\{y_n\}$ *zbieżny jest do rozwiązania równania* (26).

Dowód. Ze związku (28) mamy

$$y_{n+1} = F_n(y_{n+1}) + f(y_n) - F_n(y_n) + F_n(y_n) - f(y_n), \tag{29}$$

stąd wobec nierówności (27) otrzymujemy

$$\begin{aligned} y_{n+1}-y_n &= f(y_n)-f(y_{n-1})+F_n(y_{n+1})-F_n(y_n)+ \\ &\qquad +F_{n-1}(y_n)-F_{n-1}(y_{n-1})+\delta_n-\delta_{n-1}, \\ \|y_{n+1}-y_n\| &\leqslant k\|y_n-y_{n-1}\|+k\|y_{n+1}-y_n\|+ \\ &\qquad +k\|y_n-y_{n-1}\|+\|\delta_n\|+\|\delta_{n-1}\|, \\ \|y_{n+1}-y_n\| &\leqslant \frac{2k}{1-k}\|y_n-y_{n-1}\|+\|\delta_n\|+\|\delta_{n-1}\|, \qquad n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Z nierówności tej, podobnie jak w dowodzie twierdzenia 1, wnioskujemy zbieżność szeregów

$$\|y_0\| + \sum_{n=0}^{\infty} \|y_{n+1}-y_n\|, \qquad y_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (y_{n+1}-y_n),$$

lecz zbieżność ostatniego z tych szeregów dowodzi zbieżności ciągu $\{y_n\}$ do elementu y, który, jak to wynika ze związku (29), jest rozwiązaniem równania (26).

Algorytm Z dla równania (26) polega na zbudowaniu dwóch ciągów $\{y_n\}$, $\{F_n(y)\}$ według procedury analogicznej do użytej w przypadku równań różniczkowych. Mając $y_0 \in K_0$, konstruuje się funkcję $F_0(y)$

o własnościach wyrażonych w założeniach 1°-3° twierdzenia 5, taką że $F_0(y_0) = f(y_0)$, a następnie znajduje się y_1 jako rozwiązanie równania $y = F_0(y)$. Gdy dane jest y_n, konstruuje się funkcję $F_n(y)$ o własnościach z założeń 1°-3° twierdzenia 5, taką że $F_n(y_n) = f(y_n)$, i znajduje się y_{n+1} jako rozwiązanie równania $y = F_n(y)$.

Ze sformułowanego wyżej twierdzenia 5 wynika oczywiście zbieżność ciągu $\{y_n\}$ do rozwiązania równania (26).

Prace cytowane

[1] R. Zuber, *O pewnym algorytmie rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu (I)*, Zastosow. Matem. 8, (1966), str. 351-363.

[2] T. Ważewski, *Sur la méthode des approximations successives*, Annales de la Soc. Polon. de Mathem. 16 (1938), str. 214-215.

[3] T. Ważewski, *Sur un procédé de prouver la convergence des approximations successives sans utilisation des seriés de comparaison*, Bull. de l'Acad. Polon. de Sci., serie des sci. math., astr. et phys. 8 (1960), str. 47-52.

[4] Z. Kowalski, *An iterative method of solving differential equations*, Ann. Polon. Mathem. 12 (1963), str. 213-230.

[5] M. Kwapisz, *On the iterative method of solving differential equations with retardations*, Prace Matematyczne 9 (1965), str. 57-68.

[6] M. Kwapisz, *O pewnej metodzie kolejnych przybliżeń i jakościowych zagadnieniach równań różniczkowo-funkcyjnych i różnicowych w przestrzeni Banacha*, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Matematyka IV (1965), str. 3-73.

[7] Z. Opial, *Sur un systéme d'inegalités intégrales*, Ann. Polon. Mathem. 3 (1957), str. 200-209.

[8] W. Walter, *Differential-und Integral-Ungleichungen und ihre Anwendung bei Abschätzungs-und Eindeutigkeitsproblemen*, Springer, Berlin 1964.

[9] E. A. Coddington, N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, New York 1955.

Praca wpłynęła 13. 11. 1966

М. КВАПИШ (Гданьск)

ЗАМЕЧАНИЯ О НЕКОТОРОМ АЛГОРИФМЕ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

РЕЗЮМЕ

Работа касается некоторого алгорифма Z, рассматриваемого ранее Зубером [1], позволяющего построить последовательные приближения $y_0(x)$, $y_1(x), \ldots$, решения начальной задачи.

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{A}$$

Суть алгорифма содержится в том, что имея функцию $y_n(x)$ строится функцию $F_n(x, y)$ обладающую свойством

$$F_n(x, y_n(x)) \equiv f(x, y_n(x)).$$

Функцию $y_{n+1}(x)$ получается как решение задачи

$$y' = F_n(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

$\{y_0(x\}$ — принимается произвольно.

В работе даются достаточные условия сходимости последовательности $\{y_n(x)\}$ к решению рассматриваемой задачи (A). Формулируемые теоремы, в отличие от теорем работы [1], имеют нелокальный характер. Доказательства теорем опираются на простую лемму из теории интегральных неравенств.

Все россуждения ведутся в произвольном банаховом пространстве. Показывается также, что алгорифм Z может быть использован к ростроению последовательных приближений для общих уравнений вида $y = f(y)$ россматриваемых в произвольном банаховом пространстве.

M. KWAPISZ (Gdańsk)

REMARKS ON A CERTAIN ALGORITHM FOR SOLVING OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

SUMMARY

The paper is dealing with a certain algorithm Z which was considered by Zuber [1]. By this algorithm it is possible to obtain successive approximations $y_0(x), y_1(x), \ldots$ for the initial value problem

$$\text{(A)} \qquad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

The main idea of algorithm Z is the following: if $y_n(x)$ is given, we construct the function $F_n(x, y)$ with the property

$$F_n(x, y_n(x)) \equiv f(x, y_n(x)),$$

then the function $y_{n+1}(x)$ is obtained as a solution of the initial value problem

$$y' = F_n(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

The function $y_0(x)$ is arbitrarily fixed.

In this paper sufficient conditions for the convergence of the sequence $\{y_n(x)\}$ to the solution of the problem (A) are given. The theorems stated here have a non-local character. The proofs are based on simple integral inequalities. All considerations in the paper are given for problem (A) in an arbitrary Banach space.

It is also shown that algorithm Z can be used for obtaining approximate solutions of the general equation $y = f(y)$ considered in an arbitrary Banach space.
