ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XII (1962)

Sur la relation entre le problème de Goursat, le problème de Cauchy et le problème mixte pour l'équation de la corde vibrante

par A. LASOTA (Kraków)

Le problème posé par E. Goursat [2] concerne la question de l'existence et de l'unicité de la solution de l'équation

$$u_{xy} = f(x, y) \tag{1}$$

qui admet des valeurs données d'avance le long de deux courbes Γ_1 et Γ_2 issues d'un point P_0 dans le plan (x, y).

Les résultats de MM. A. Bielecki et J. Kisyński concernant ce problème ont été publiés dans le mémoire [1].

Dans la présente note nous considérons le sujet suivant: Supposons que les courbes Γ_1 et Γ_2 tendent vers une même courbe Γ et que les valeurs données forment à la limite une bande de valeurs initiales. Cela posé, nous allons montrer que la solution du problème de Goursat correspondant aux courbes Γ_1 et Γ_2 tend vers la solution du problème de Cauchy correspondant à la courbe limite Γ.

Une circonstance analogue a lieu pour le problème mixte.

1. Pour abréger l'énoncé du théorème nous allons formuler certains problèmes et hypothèses.

PROBLÈME C (Cauchy). Le problème C déterminé par les fonctions $c(x)$, $p(x)$, $r(x)$ consiste à chercher une solution $u(x,y)$ de l'équation (1) ayant des dérivées u_x, u_y, u_{xy} continues dans le rectangle

$$\Pi: \quad 0 \leqslant x \leqslant a\,, \; 0 \leqslant y \leqslant b$$

et satisfaisant aux conditions initiales

$$u\big(x, c(x)\big) = r(x)\,, \quad u_x\big(x, c(x)\big) = p(x) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant a\,. \tag{2}$$

Les conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité de la solution du problème C sont bien connues. Il suffit par exemple d'admettre l'hypothèse suivante:

Hypothèse H_C. Les fonctions $c(x)$, $p(x)$, $r(x)$ sont de classe C^1 et satisfont aux conditions

$$c(0) = 0\,, \quad c(a) = b\,, \quad c'(x) > 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant a\,.$$

Problème M (mixte). Le problème M consiste à chercher une solution $u(x, y)$ de l'équation (1) ayant des dérivées u_x, u_y, u_{xy} continues dans le rectangle Π et satisfaisant aux conditions

$$\begin{gathered} u\big(x, c(x)\big) = r(x)\,, \quad u_x\big(x, c(x)\big) = p(x) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant a\,, \\ u\big(s(y), y\big) = t(y) \quad \text{pour} \quad d \leqslant y \leqslant b\,. \end{gathered} \tag{3}$$

Les conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité de la solution du problème M sont aussi bien connues. Il suffit d'admettre l'hypothèse suivante:

Hypothèse H_M. Les fonctions $c(x)$, $r(x)$, $p(x)$, $s(y)$, $t(y)$ sont de classe C^1 et satisfont aux conditions

$$\begin{gathered} c(0) = 0\,, \quad c(a) = d\,, \quad s(d) = a\,, \quad s(b) = 0 \quad (0 < d < b)\,, \\ c'(x) > 0\,, \quad s'(y) < 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant a\,, \quad d \leqslant y \leqslant b\,, \\ p(a)\big(1 - c'(a)s'(d)\big) = r'(a) - c'(a)t'(d)\,, \quad r(a) = t(d)\,. \end{gathered}$$

Ces deux dernières conditions proviennent du fait que, au point (a, d), les valeurs de la solution du problème mixte, ainsi que celles de sa dérivée dans la direction du vecteur $\big(s'(d), 1\big)$, sont déterminées aussi bien par la donnée de valeur de la solution du problème mixte sur la courbe $x = s(y)$ que par la donnée de la valeur de cette solution et de la dérivée u_x sur la courbe $y = c(x)$.

Problème G (Goursat). Ce problème consiste à chercher une solution de l'équation (1) ayant des dérivées continues dans le rectangle Π et satisfaisant aux conditions

$$u\big(x, k(x)\big) = g(x)\,, \quad u\big(l(y), y\big) = h(y) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant a\,, \quad 0 \leqslant y \leqslant b\,. \tag{4}$$

Les conditions générales suffisantes pour l'existence d'une et une seule solution du problème G ont été données par MM. A. Bielecki et J. Kisyński [1]. Il suffit par exemple d'admettre l'hypothèse H_G.

Hypothèse H_G. Les fonctions $k(x)$, $g(x)$, $l(y)$, $h(y)$ sont de classe C^1 pour $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ et satisfont aux conditions

$$\begin{gathered} k(0) = 0\,, \quad l(0) = 0\,, \quad h(0) = g(0)\,, \\ k'(0)l'(0) \neq 1\,, \end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered} l\big(k(x)\big) \neq x \quad \text{pour} \quad 0 < x \leqslant a\,, \\ 0 \leqslant k(x) \leqslant b\,, \quad 0 \leqslant l(y) \leqslant a \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant a\,, \quad 0 \leqslant y \leqslant b\,. \end{gathered} \tag{6}$$

La condition (6) signifie que les courbes $y = k(x)$, $x = l(y)$ n'ont pas de points communs sauf le point $(0, 0)$.

Nous convenons de dire que les fonctions $k(x)$, $g(x)$, $l(y)$, $h(y)$ satisfont à l'hypothèse $\mathrm{H_G}$ si elles satisfont à l'hypothèse $\mathrm{H_G}$, à l'exception de l'inégalité (4).

2. Nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème 1. *Supposons que pour* $0 < \lambda < \lambda_0$ *les fonctions* $u^\lambda(x, y)$ *soient les solutions du problème* G, *c'est-à-dire*

$$u^\lambda_{xy}(x, y) = f_\lambda(x, y)\,, \tag{7}$$

$$u^\lambda\big(x, k_\lambda(x)\big) = g_\lambda(x)\,, \qquad u^\lambda\big(l_\lambda(y), y\big) = h_\lambda(y)\,, \qquad \textit{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant a\,, \quad 0 \leqslant y \leqslant b\,, \tag{8}$$

où la fonction $f_\lambda(x, y)$ *est continue dans le rectangle* Π *et les fonctions* k_λ, l_λ, g_λ, h_λ *satisfont à l'hypothèse* $\mathrm{H_G}$.

Supposons de plus que $u^0(x, y)$ *soit une solution du problème* C, *c'est-à-dire*

$$u^0_{xy}(x, y) = f_0(x, y)\,,$$

$$u^0\big(x, c(x)\big) = r(x)\,, \quad u^0_x\big(x, c(x)\big) = p(x) \quad \textit{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant a\,, \quad 0 \leqslant y \leqslant b\,,$$

où la fonction $f_0(x, y)$ *est continue dans le rectangle* Π *et les fonctions* c, r, p *satisfont à l'hypothèse* $\mathrm{H_C}$.

Supposons enfin que

$$\lim_{\lambda\to 0} f_\lambda(x, y) = f_0(x, y) \qquad \textit{pour} \quad (x, y) \in \Pi\,, \tag{9}$$

$$\lim_{\lambda\to 0} k_\lambda(x) = c(x) \qquad \textit{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant a\,, \tag{10}$$

$$\lim_{\lambda\to 0} l_\lambda(y) = c^{-1}(y) \qquad \textit{pour} \quad 0 \leqslant y \leqslant b\,, \tag{11}$$

$$\lim_{\lambda\to 0} g_\lambda(y) = r(x) \qquad \textit{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant a\,, \tag{12}$$

$$\lim_{\lambda\to 0} h_\lambda(y) = r\big(c^{-1}(y)\big) \qquad \textit{pour} \quad 0 \leqslant y \leqslant b\,, \tag{13}$$

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{g_\lambda(x) - h_\lambda\big(k_\lambda(x)\big)}{x - l_\lambda\big(k_\lambda(x)\big)} = p(x) \qquad \textit{pour} \quad 0 < x \leqslant a \tag{14}$$

les convergences exprimées pas ces formules étant supposées uniformes dans les ensembles envisagés.

Cela posé, on a

$$\lim_{\lambda\to 0} u^\lambda(x, y) = u^0(x, y)$$

uniformément dans le rectangle Π.

Démonstration. En vertu de (7) et (8) les fonctions $u^\lambda(x,y)$ sont données par la formule

$$u^\lambda(x,y) = F^\lambda(x,y) + m_\lambda(x) + n_\lambda(y)\,, \qquad m_\lambda(0) = 0 \tag{15}$$

où les fonctions $m_\lambda(x)$ et $n_\lambda(y)$ satisfont au système d'équations

$$\begin{aligned} m_\lambda(x) + n_\lambda\big(k_\lambda(x)\big) &= \sigma_\lambda(x) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant a\,, \\ m_\lambda\big(l_\lambda(y)\big) + n_\lambda(y) &= \tau_\lambda(y) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant y \leqslant b\,, \end{aligned} \tag{16}$$

où nous avons posé pour abréger,

$$\begin{gathered} \sigma_\lambda(x) = g_\lambda(x) - F^\lambda\big(x, k_\lambda(x)\big)\,, \qquad \tau_\lambda(y) = h_\lambda(y) - F^\lambda\big(l_\lambda(y), y\big)\,, \\ F^\lambda(x,y) = \int_0^x d\xi \int_0^y f_\lambda(\xi,\eta)\,d\eta\,. \end{gathered} \tag{17}$$

D'autre part, pour $0 \leqslant x \leqslant a$ et $i = 1, 2, \ldots$, posons

$$\begin{gathered} v_\lambda^0(x) = x\,, \quad v_\lambda^1(x) = l_\lambda\big(k_\lambda(x)\big)\,, \quad v_\lambda^i(x) = v_\lambda^1\big(v_\lambda^{i-1}(x)\big) \\ \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant a\,, \quad 0 < \lambda < \lambda_0\,, \quad i = 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{18}$$

Il est aisé de voir que pour $i = 1, 2, \ldots$, $0 < \lambda < \lambda_0$ les fonctions $v_\lambda^i(x)$ satisfont aux conditions suivantes:

$$0 \leqslant v_\lambda^i(x) \leqslant b \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant a\,, \tag{19}$$

$$v_\lambda^i(0) = 0\,, \tag{20}$$

$$v_\lambda^i(x) < v_\lambda^{i-1}(x) \quad \text{pour} \quad 0 < x \leqslant a\,, \tag{21}$$

$$\lim_{i\to\infty} v_\lambda^i(x) = 0 \quad \text{uniformément pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant a\,. \tag{22}$$

De plus, nous montrerons que

$$\lim_{\lambda\to 0}\big(v_\lambda^{i+1}(x) - v_\lambda^i(x)\big) = 0 \tag{23}$$

uniformément pour x et i. En effet, en vertu de la définition (18) et des hypothèses (10) et (11), on a

$$\begin{aligned} v_\lambda^{i+1}(x) - v_\lambda^i(x) &= v_\lambda^1\big(v_\lambda^i(x)\big) - v_\lambda^i(x) = l_\lambda\Big(k_\lambda\big(v_\lambda^i(x)\big)\Big) - v_\lambda^i(x) \\ &= l_\lambda\Big(k_\lambda\big(v_\lambda^i(x)\big)\Big) - c^{-1}\Big(k_\lambda\big(v_\lambda^i(x)\big)\Big) + \\ &\quad + c^{-1}\Big(k_\lambda\big(v_\lambda^i(x)\big)\Big) - c^{-1}\Big(c\big(v_\lambda^i(x)\big)\Big) \to 0 + 0 = 0\,. \end{aligned}$$

Posons ensuite

$$w_\lambda(x) = \frac{\sigma_\lambda(x) - \tau_\lambda\big(k(x)\big)}{x - v_\lambda^1(x)} \qquad \text{pour} \quad 0 < x \leqslant a\,, \quad w_\lambda(0) = p(0)\,.$$

On aura alors, en vertu de (20)

$$(24)\qquad \sigma_\lambda(x)-\tau_\lambda\big(k_\lambda(x)\big) = w_\lambda(x)\big(x-v_\lambda^1(x)\big) \quad \text{pour} \quad 0\leqslant x\leqslant a\,.$$

Admettant les notations (17), on obtient

$$w_\lambda(x) = \frac{g_\lambda(x)-h_\lambda\big(k_\lambda(x)\big)}{x-v_\lambda^1(x)} + \frac{\int\limits_{v_\lambda^1(x)}^{x} d\xi \int\limits_0^{k_\lambda(x)} f_\lambda(\xi,\eta)\,d\eta}{x-v_\lambda^1(x)}$$

et, en vertu de (9), (10) et (14)

$$(25)\qquad \lim_{\lambda\to 0} w_\lambda(x) = p(x)-\int\limits_0^{c(x)} f_0(x,\eta)\,d\eta \quad \text{uniformément pour} \quad 0\leqslant x\leqslant a\,.$$

Admettant les notations (18) et éliminant la fonction $n_\lambda(y)$ des équations (16) on obtient

$$m_\lambda(x) = m_\lambda\big(v_\lambda^1(x)\big)+\sigma_\lambda(x)-\tau_\lambda\big(k_\lambda(x)\big)\,.$$

Il en résulte en général

$$m_\lambda(x) = m_\lambda\big(v_\lambda^N(x)\big)+\sum_{i=0}^{N}\sigma_\lambda\big(v_\lambda^i(x)\big)-\tau_\lambda\Big(k_\lambda\big(v_\lambda^i(x)\big)\Big)\,,$$

c'est-à-dire, tenant compte de (22) et (24)

$$m_\lambda(x) = m_\lambda\big(v_\lambda^N(x)\big)+\sum_{i=0}^{N} w_\lambda\big(v_\lambda^i(x)\big)\big(v_\lambda^i(x)-v_\lambda^{i+1}(x)\big)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} w_\lambda\big(v_\lambda^i(x)\big)\big(v_\lambda^i(x)-v_\lambda^{i+1}(x)\big)\,.$$

Nous allons maintenant montrer que

$$(26)\qquad \lim_{\lambda\to 0} m_\lambda(x) = \int\limits_0^{x} q(x)\,dx$$

où

$$q(x) = p(x)-\int\limits_0^{c(x)} f_0(x,\eta)\,d\eta\,.$$

La fonction $q(x)$ étant continue, pour tout $\varepsilon>0$ il existe un nombre $\delta>0$ tel que

$$(27)\qquad |q(\bar{\bar{x}})-q(\bar{x})|\leqslant \varepsilon/2a \quad \text{pour} \quad |\bar{\bar{x}}-\bar{x}|\leqslant\delta\,.$$

En vertu de (25) et (23) il existe des nombres $0 < \lambda_1 < \lambda_0$ et $0 < \lambda_2 < \lambda_0$ tels que

$$|w_\lambda(x) - q(x)| \leqslant \varepsilon/2a \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant a\,, \quad 0 < \lambda \leqslant \lambda_1\,,$$

$$|v_\lambda^i(x) - v_\lambda^{i+1}(x)| \leqslant \delta \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant a\,, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2\,, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Donc, en utilisant (23), on a pour $0 < \lambda \leqslant \min(\lambda_1, \lambda_2)$

$$\Big|m_\lambda(x) - \int_0^x q(\xi)\,d\xi\Big| = \Big|\sum_{i=0}^{\infty} w_\lambda\big(v_\lambda^i(x)\big)\big(v_\lambda^i(x) - v_\lambda^{i+1}(x)\big) - \sum_{i=0}^{\infty}\int_{v_\lambda^{i+1}(x)}^{v_\lambda^i(x)} q(s)\,ds\Big|$$
$$= \Big|\sum_{i=0}^{\infty}\big(w_\lambda\big(v_\lambda^i(x)\big) - q(\theta_i)\big)\big(v_\lambda^i(x) - v_\lambda^{i+1}(x)\big)\Big|\,,$$

où $v_\lambda^{i+1}(x) < \theta_i < v_\lambda^i(x)$ et par suite, en raison de (19), (20)

$$\Big|m_\lambda(x) - \int_0^x q(\xi)\,d\xi\Big|$$
$$\leqslant \Big|\sum_{i=0}^{\infty}\big(w_\lambda\big(v_\lambda^i(x)\big) - q\big(v_\lambda^i(x)\big)\big)\big(v_\lambda^i(x) - v_\lambda^{i+1}(x)\big)\Big| +$$
$$+ \Big|\sum_{i=0}^{\infty}\big(q\big(v_\lambda^i(x)\big) - q(\theta_i)\big)\big(v_\lambda^i(x) - v_\lambda^{i+1}(x)\big)\Big|$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2a}\sum_{i=0}^{\infty}\big(v_\lambda^i(x) - v_\lambda^{i+1}(x)\big) + \frac{\varepsilon}{2a}\sum_{i=0}^{\infty}\big(v_\lambda^i(x) - v_\lambda^{i+1}(x)\big)$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2a}a + \frac{\varepsilon}{2a}a = \varepsilon$$

ce qui prouve (26).

Nous allons considérer la limite de la fonction $n_\lambda(y)$ lorsque λ tend vers zéro. En vertu de la seconde des équations (16) et des notations (17) on a

$$n_\lambda(y) = \tau_\lambda(y) - m_\lambda\big(l_\lambda(y)\big) = h_\lambda(y) - F^\lambda\big(l_\lambda(y), y\big) - m_\lambda\big(l_\lambda(y)\big)$$

où

$$F^\lambda(x, y) = \int_0^x d\xi \int_0^y f_\lambda(\xi, \eta)\,d\eta\,.$$

De là et de (9), (11), (13), (26) on obtient immédiatement

$$\text{(28)} \qquad \lim_{\lambda\to 0} n_\lambda(y) = r\big(c^{-1}(y)\big) - \int_0^{c^{-1}(y)} d\xi \int_0^y f_0(\xi, \eta)\,d\eta - \int_0^{c^{-1}(y)} q(\xi)\,d\xi\,.$$

En passant à la limite, pour λ tendant vers zéro, dans la formule (15) et tenant compte de (9), (26), (28) on en tire

$$(29)\qquad \lim_{\lambda\to 0} u^{\lambda}(x,y) = \int\limits_{c^{-1}(y)}^{x} d\xi \int\limits_{c(\xi)}^{y} f_0(\xi,\eta)\,d\eta + r\big(c^{-1}(y)\big) + \int\limits_{c^{-1}(y)}^{x} p(\xi)\,d\xi\,.$$

Il est évident que la fonction (29) est la solution du problème de Cauchy pour l'équation

$$u_{xy} = f_0(x,y)\,.$$

Donc, elle est identique à la fonction $u^0(x,y)$ et la démonstration est ainsi achevée.

3. Nous allons considérer la relation entre le problème de Goursat et le problème mixte.

THÉORÈME 2. *Supposons que pour* $0<\lambda<\lambda_0$ *les fonctions* $u^{\lambda}(x,y)$ *soient les solutions du problème* G, *c'est-à-dire*

$$u^{\lambda}_{xy}(x,y) = f_{\lambda}(x,y)\,,\qquad u^{\lambda}\big(x,k_{\lambda}(x)\big) = g_{\lambda}(x)\,,\qquad u^{\lambda}\big(l_{\lambda}(y),y\big) = h_{\lambda}(y)$$
$$\textit{pour}\quad 0\leqslant x\leqslant a\,,\quad 0\leqslant y\leqslant b\,,$$

où la fonction $f_{\lambda}(x,y)$ *est continue dans le rectangle* Π *et les fonctions* k_{λ}, l_{λ}, g_{λ}, h_{λ} *satisfont à l'hypothèse* $\mathrm{H_G}$.

Supposons de plus que $u^0(x,y)$ *soit une solution du problème* M, *c'est-à-dire*

$$u^0_{xy}(x,y) = f_0(x,y)\,,\qquad u^0\big(x,c(x)\big) = r(x)\,,$$
$$u^0_x\big(x,c(x)\big) = p(x)\,,\qquad u^0\big(s(y),y\big) = t(y)$$
$$\textit{pour}\quad 0\leqslant x\leqslant a\,,\quad 0\leqslant y\leqslant b\,,$$

où la fonction $f_0(x,y)$ *est continue dans le rectangle* Π *et les fonctions* c, r, p, s, *satisfont à l'hypothèse* $\mathrm{H_M}$.

Supposons enfin que

$$(30)\qquad \lim_{\lambda\to 0} f_{\lambda}(x,y) = f_0(x,y)\qquad \textit{pour}\quad (x,y)\in\Pi\,,$$

$$(31)\qquad \lim_{\lambda\to 0} k_{\lambda}(x) = c(x)\qquad \textit{pour}\quad 0\leqslant x\leqslant a\,,$$

$$(32)\qquad \lim_{\lambda\to 0} l_{\lambda}(y) = \begin{cases} c^{-1}(y) & \textit{pour}\quad 0\leqslant y\leqslant d\,,\\ s(y) & \textit{pour}\quad d\leqslant y\leqslant b\,,\end{cases}$$

$$(33)\qquad \lim_{\lambda\to 0} g_{\lambda}(x) = r(x)\qquad \textit{pour}\quad 0\leqslant x\leqslant a\,,$$

$$(34)\qquad \lim_{\lambda\to 0} h_{\lambda}(y) = \begin{cases} r\big(c^{-1}(y)\big) & \textit{pour}\quad 0\leqslant y\leqslant d\,,\\ t(y) & \textit{pour}\quad d\leqslant y\leqslant b\,,\end{cases}$$

$$(35)\qquad \lim_{\lambda\to 0} \frac{g_{\lambda}(x) - h_{\lambda}\big(k_{\lambda}(x)\big)}{x - l_{\lambda}\big(k_{\lambda}(x)\big)} = p(x)\qquad \textit{pour}\quad 0<x\leqslant a;$$

les convergences exprimées par ces formules étant supposées uniformes dans les ensembles envisagés.

Céla posé, on a

$$\lim_{\lambda\to 0} u^{\lambda}(x, y) = u^{0}(x, y)$$

uniformément dans le rectangle Π.

Démonstration. De même que dans la démonstration du théorème 1 on démontre que les fonctions $u^{\lambda}(x,y)$ sont données par la formule

$$u^{\lambda}(x, y) = F^{\lambda}(x, y) + m_{\lambda}(x) + n_{\lambda}(y)\,, \qquad m_{\lambda}(0) = 0 \tag{36}$$

où les fonctions $m_{\lambda}(x)$ et $n_{\lambda}(y)$ satisfont à un système d'équations

$$\begin{aligned} m_{\lambda}(x) + n_{\lambda}\big(k_{\lambda}(x)\big) &= \sigma_{\lambda}(x) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant a\,, \\ n_{\lambda}(y) + m_{\lambda}\big(l_{\lambda}(y)\big) &= \tau_{\lambda}(y) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant y \leqslant b \end{aligned} \tag{37}$$

et où l'on admet les notations (17).

De la même façon on démontre que (cf. (26))

$$\lim_{\lambda\to 0} m_{\lambda}(x) = \int_0^x q(\xi)\,d\xi \tag{38}$$

uniformément pour $0 \leqslant x \leqslant a$. De la seconde des équations (37) et des hypothèses (32), (31) et (32) on tire

$$\lim_{\lambda\to 0} n_{\lambda}(y) = \begin{cases} r\big(c^{-1}(y)\big) - \displaystyle\int_0^{c^{-1}(y)} d\xi \int_0^y f_0(\xi, \eta)\,d\eta - \int_0^{c^{-1}(y)} q(\xi)\,d\xi\,, & 0 \leqslant y \leqslant d\,, \\ t(y) - \displaystyle\int_0^{s(y)} d\xi \int_0^y f_0(\xi, \eta)\,d\eta - \int_0^{s(y)} q(\xi)\,d\xi\,, & d \leqslant y \leqslant b\,. \end{cases} \tag{39}$$

En tenant compte des formules (26), (36), (38), (39) et (30) on obtient immédiatement

$$\lim_{\lambda\to 0} u^{\lambda}(x, y) = \begin{cases} r\big(c^{-1}(y)\big) + \displaystyle\int_{c^{-1}(y)}^x p(\xi)\,d\xi + \int_{c^{-1}(y)}^x d\xi \int_{c(\xi)}^y f_0(\xi, \eta)\,d\eta\,, & 0 \leqslant y \leqslant d\,, \\ t(y) + \displaystyle\int_{s(y)}^x p(\xi)\,d\xi + \int_{s(y)}^x d\xi \int_{c(\xi)}^y f_0(\xi, \eta)\,d\eta\,, & d \leqslant y \leqslant b\,. \end{cases} \tag{40}$$

On vérifie facilement que la fonction (40) est solution du problème M pour l'équation

$$u_{xy} = f_0(x, y)\,.$$

Donc, elle est identique à la fonction $u^{0}(x,y)$ ce qui achève la démonstration du théorème 2.

4. Il est à noter que dans les hypothèses des théorèmes 1 et 2 on doit avoir forcément la convergence uniforme

$$\lim_{\lambda\to 0} u^{\lambda}(x, y) = u^{0}(x, y)\,,$$

mais la convergence des dérivées peut ne pas avoir lieu. En voici un exemple relatif au théorème 1.

La fonction $u^0(x, y) \equiv 0$ est solution du problème C pour l'équation

$$u_{xy} = 0 \tag{41}$$

aux conditions initiales

$$u^0(x, x) = 0\,, \quad u^0_x(x, x) = 0\,.$$

La fonction $u(x, y) \equiv \lambda^2 x \sin(x/\lambda^2) + \lambda^2 y \sin(y/\lambda^2)$ est solution du problemè G pour l'équation (41) aux conditions aux limites

$$u^{\lambda}(x, x) = 2\lambda^2 x \sin\frac{x}{\lambda^2}\,, \quad u^{\lambda}\big((1-\lambda)y, y\big) = \lambda^2 y\left(\sin\frac{y}{\lambda^2} + (1-\lambda)\sin\frac{(1-\lambda)y}{\lambda^2}\right).$$

Il est facile de vérifier que les fonctions

$$c(x) \equiv k_{\lambda}(x) \equiv x\,, \quad l_{\lambda}(y) \equiv (1-\lambda)y\,, \quad g_{\lambda}(x) \equiv 2\lambda^2 x \sin\frac{x}{\lambda^2}\,,$$

$$h_{\lambda}(y) \equiv \lambda^2 y\left(\sin\frac{y}{\lambda^2} + (1-\lambda)\sin\frac{1-\lambda}{\lambda^2}y\right), \quad r(x) \equiv p(x) \equiv 0$$

satisfont aux hypothèses du théorème 1 et par conséquent

$$\lim_{\lambda\to 0} u^{\lambda}(x, y) = 0\,.$$

D'autre part, les fonctions

$$u^{\lambda}_x(x, y) = \lambda^2 \sin\frac{x}{\lambda^2} + x\cos\frac{x}{\lambda^2}\,,$$

$$u^{\lambda}_y(x, y) = \lambda^2 \sin\frac{y}{\lambda^2} + y\cos\frac{y}{\lambda^2}$$

n'ont pas de limites pour $\lambda \to 0$ en tout point (x, y) tel que $x \neq 0$ ou $y \neq 0$.

Travaux cités

[1] A. Bielecki et J. Kisyński, *Sur le problème de E. Goursat relatif à l'équation* $\partial^2 z/\partial x\partial y = f(x, y)$, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sectio A, 10 (1956), p. 99.

[2] E. Goursat, *Cours d'analyse mathématique*, tome III, Paris 1942, p. 123.

Reçu par la Rédaction le 3. 7. 1958