ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XLVII (1986)

Une remarque sur les solutions bornées d'une équation différentielle à retard

par Z. MIKOŁAJSKA (Kraków)

Résumé. Dans la présente note nous démontrons un théorème sur certaines simples conditions sous lesquelles chaque solution de l'équation ($\bar{E}$) $x'(t) = f(t-1, x(t-1)) + g(t, x)$ est bornée. Le deuxième théorème établit la convergence vers zéro des solutions de ($\bar{E}$). Ensuite, nous étudions les solutions oscillantes de l'équations ($\bar{E}$). Nous démontrons que chaque solution oscillante et telle que $\lim |x(t)| = 0$, $L\int_0^t |x(s)|\, ds \leqslant \beta < \infty$ pour $0 \leqslant t < \infty$ satisfait á l'inégalite initiale $|x(0) + \int_{-1}^{0} f(s, x(s))ds| \leqslant \beta$. Enfin nous démontrons un théorème sur l'existence d'une solution oscillante de l'équation ($\bar{E}$).

Dans la publication [1] (chapitre 3) O. Arino et P. Sérguier s'occupent de l'équation de la forme

$$x'(t) = f\big(t-1, x(t-1)\big) - f\big(t, x(t)\big). \tag{E}$$

Parmi les théorèmes qui y sont démontrés quelques un peuvent être démontrés dans le cas de l'équation un peu plus générale:

$$x'(t) = f\big(t-1, x(t-1)\big) + g\big(t, x(t)\big). \tag{$\bar{E}$}$$

Dans la suite nous allons démontrer certaines théorèmes sur les solutions bornées et convergentes vers zéro de l'équation ($\bar{E}$).

1. Considérons l'équation ($\bar{E}$), où $f(t, x)$ et $g(t, x)$ sont définies dans $D = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ et satisfont aux hypothèses suivantes:

HYPOTHÈSES $H_{1.1}$.

1° $f(t, x)$ et $g(t, x)$ sont continues dans $\boldsymbol{R}^2$.

2° On admet l'unicité des solutions de l'équation ($\bar{E}$) satisfaisant à la condition initiale

$$x(t; t_0, \varphi) = \varphi(t - t_0) \quad \text{où } t_0 - 1 \leqslant t \leqslant t_0 \tag{1.2}$$

pour chaque t_0 et φ continue dans $[-1, 0]$.

3° $f(t, x)$ est croissante par rapport à x.

HYPOTHÈSES $H_{1.2}$.

1° on a pour $-\infty < t < +\infty$

$$f(t, 0) = 0. \tag{1.3}$$

2° Pour chaque x on a

$$x[f(t, x)+g(t, x)] \leqslant 0 \quad \text{pour } t \in (-\infty, +\infty). \tag{1.4}$$

LEMME $L_{1.1}$. *Sous les hypothèses* $H_{1.1}$ *la solution* $x(t, t_0, \varphi)$ *de l'équation* ($\bar{E}$) *avec la condition initiale* (1.2) *est croissant par rapport à* φ, *c'est-à-dire que*

$$\varphi(s) \leqslant \psi(s) \quad \textit{pour } -1 \leqslant s \leqslant 0 \tag{1.5}$$

entraine

$$x(t, t_0, \varphi) \leqslant x(t, t_0, \psi) \quad \textit{pour } t \geqslant t_0. \tag{1.6}$$

Le Lemme $L_{1.1}$ est un cas particulier d'un théorème bien connu sur les solutions de l'équation

$$x'(t) = F\big(t, x(t), x_t\big) \tag{1.7}$$

où $F(t, x, \varphi)$ est continue dans $D = \boldsymbol{R}^2 \times C([-1, 0], \boldsymbol{R})$ et croissante par rapport à φ (cf. par exemple [2], théorème 6.9.4).

LEMME $L_{1.2}$. *Sous les hypothèses* $H_{1.1}$ *et* $H_{1.2}$ *pour chaque fonction* $\varphi(s)$ *non négative* (*non positive*) *la solution* $x(t, t_0, \varphi)$ *de l'équation* ($\bar{E}$) *est non négative* (*non positive*) *pour* $t \geqslant t_0 - 1$.

Démonstration. $f(t, x)$ et $g(t, x)$ étant continues l'hypothèse $H_{1.2}$ (inégalité) (1.4)) entraîne pour $x = 0$

$$f(t, 0)+g(t, 0) = 0$$

et par suite en vertu de (1.3)

$$g(t, 0) = 0$$

d'où

$$f(t-1, 0)+g(t, 0) = 0 \quad \text{pour } -\infty < t < +\infty \tag{1.8}$$

c'est-à-dire $x(t, t_0, 0) \equiv 0$ pour $t \geqslant t_0 - 1$; en vertu du lemme $L_{1.1}$ on a donc pour $\varphi \geqslant 0$

$$x(t, t_0, \varphi) \geqslant x(t, t_0, 0) = 0 \quad \text{pour } t \geqslant t_0 - 1 \tag{1.9}$$

et pour $\psi \leqslant 0$

$$x(t, t_0, \psi) \leqslant 0 \quad \text{pour } t \geqslant t_0 - 1. \tag{1.10}$$

LEMME $L_{1.3}$. *Sous les hypothèses* $H_{1.1}$ *et* $H_{1.2}$ *chaque solution* $x(t)$ *de* ($\bar{E}$) *non négative* (*non positive*) *est bornée.*

Démonstration. Supposons que $x(t)$ soit une solution de $(\bar{E})$ non négative:

(1.11) $$x(t) \geqslant 0 \quad \text{pour } t_0 - 1 \leqslant t < \tau \ (\tau > t_0).$$

Posons par définition

$$\gamma(t) = -x(t) - \int_{t-1}^{t} f(s, x(s))ds + \int_{t_0}^{t} [(g(s)x(s)) + f(s, x(s))]\,ds.$$

On a

(1.12) $$\gamma'(t) = -f(t, x(t)) + f(t-1, x(t-1)) + g(t, x(t)) + f(t, x(t)) - x'(t) = 0$$
$$\text{pour } t_0 \leqslant t < \tau$$

c'est-à-dire

(1.13) $$\gamma(t) = \text{const} = -\int_{t_0-1}^{t_0} f(s, x(s))ds - x(t_0),$$

donc

$$-x(t) - \int_{t-1}^{t} f(s, x(s))ds + \int_{t_0}^{t} [g(s, x(s)) + f(s, x(s))]\,ds = -c$$
$$= -\left[x(t_0) + \int_{t_0-1}^{t_0} f(s, x(s))ds\right] \leqslant 0 \quad (c > 0)$$

d'où

(1.14) $$x(t) = -\int_{t-1}^{t} f(s, x(s))ds + \int_{t_0}^{t} [g(s, x(s)) + f(s, x(s))]\,ds + c$$
$$\text{pour } t \geqslant t_0.$$

En vertu de (1.3) et $H_{1.1}$ 3° on a

$$f(s, x(s)) \geqslant 0 \quad \text{pour } x(t) \geqslant 0$$

et, en vertu de (1.4),

$$f(s, x(s)) + g(s, x(s)) \leqslant 0 \quad \text{pour } x(t) \geqslant 0$$

donc, en vertu de (1.14), on a

(1.15) $$x(t) \leqslant c \quad \text{pour } t \geqslant t_0.$$

Dans le cas où $x(t) \leqslant 0$ on obtient $x(t) \geqslant c$ $(c \leqslant 0)$. Le lemme $L_{1.3}$ est ainsi démontré.

THÉORÈME $T_{1.1}$. *Sous les hypothèses* $H_{1.1}$ *et* $H_{1.2}$ *chaque solution de* $(\bar{E})$ *est bornée.*

Démonstration. Considérons une fonction quelconque $\varphi(s)$ $(0 \geqslant s \geqslant -1)$.

Il existe $M \geqslant 0$ telle que

$$|\varphi| \leqslant M \quad \text{pour} \ -1 \leqslant s \leqslant 0,$$

en vertu du lemme $L_{1.1}$ on a

$$x(t, t_0, -M) \leqslant x(t, t_0, \varphi) \leqslant x(t, t_0, M).$$

Mais, en vertu du lemme $L_{1.3}$, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$-c \leqslant x(t, t_0, -M) \leqslant 0 \leqslant x(t, t_0, M) \leqslant c \quad \text{pour} \ t_0 \leqslant t.$$

On a donc

$$|x(t, t_0, \varphi)| \leqslant c \quad \text{pour} \ t_0 \leqslant t < +\infty.$$

Le théorème $T_{1.1}$ est ainsi démontré.

Remarque $R_{1.1}$. Dans le cas envisagé par O. Arino et P. Sérguier [1] dans le théorème T_{334} $g(t, x) = -f(t, x)$, c'est-à-dire $f(t, x)+g(t, x) = 0$, $f(t, 0) = 0$ et $f(t, x)$ est croissante par rapport à x. Ainsi le théorème T_{334} résulte de notre théorème $T_{1.1}$. Dans celui-ci on n'admet pas la croissance de $g(t, x)$. On suppose exclusivement la croissance de $f(t, x)$.

2. Convergence vers zéro des solutions de l'équation ($\bar{\text{E}}$). Admettons les hypothèses suivantes:

Hypothèses $H_{2.1}$. Il existe une constante $\alpha \in (0, 1)$ telle que pour chaque constante positive $M > 0$ et $t_0 \geqslant 0$ il existe $T_{Mt_0} \geqslant t_0$ telle que pour la solution $z(t, t_0, M)$ de l'équation

$$z'(t) = f(t-1, M)+g\big(t, z(t)\big) \tag{2.1}$$

avec la condition initiale

$$z(t_0, t_0, M) = M \tag{2.2}$$

et pour la solution $w(t, t_0, -M)$ de l'équation

$$w'(t) = f(t-1, -M)+g\big(t, w(t)\big) \tag{2.3}$$

telle que

$$w(t_0, t_0, -M) = -M \tag{2.4}$$

on a

$$-\alpha M \leqslant w(t, t_0, -M) \leqslant z(t, t_0, M) \leqslant \alpha M \quad \text{pour} \ t \geqslant T_{Mt_0}. \tag{2.5}$$

Théorème $T_{2.1}$. *Sous les hypothèses* $H_{1.1}$, $H_{1.2}$, $H_{2.1}$ *chaque solution* $x(t)$ *de l'équations* (E) *tends vers zéro pour* $t \to \infty$.

Démonstration. Envisageons une solution $x(t)$ quelconque de l'équation ($\bar{\text{E}}$). Nous avons démontré que $x(t)$ est borné (cf. théorème $T_{1.1}$) c'est-à-dire qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$|x(t)| \leqslant M \quad \text{pour} \ t \geqslant \bar{t}_0-1, \tag{2.6}$$

donc pour $t \geqslant 0$ on a

$$f(t-1,\, -M)+g(t,\, x(t)) \leqslant x'(t) \leqslant f(t-1,\, M)+g(t,\, x(t)) \quad \text{pour } t \geqslant \bar{t}_0-1.$$

De la théorie des inégalités différentielles il résulte donc que

$$w(t,\, t_0-M) \leqslant x(t) \leqslant z(t,\, t_0,\, M) \quad \text{pour } t \geqslant \bar{t}_0-1$$

d'où, en vertu de (2.5), on a

$$|x(t)| \leqslant \alpha M \quad \text{pour } t \geqslant T_{M\bar{t}_0} = t_1 \geqslant 0. \tag{2.7}$$

On démontre par récurrence qu'il existe une suite $\{t_n\}$

$$t_n = T_{\alpha^{n-1},t_{n-1}} \geqslant t_{n-1}$$

telle que

$$|x(t)| \leqslant \alpha^{n}M \quad \text{pour } t \geqslant t_n. \tag{2.8}$$

Mais $0 < \alpha < 1$, donc $\lim\limits_{t\to\infty} |x(t)|$ existe et

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0. \tag{2.9}$$

La démonstration est ainsi achevée.

Exemple 2.1. À titre d'exemple prenons l'équation

$$x'(t) = a(t-1)\,x(t-1)-a(t)\,x(t), \tag{E$_0$}$$

où $a(t)$ est continue et telle que

$$0 \leqslant a(s-1) \leqslant pa(s), \quad 0 < p < 1, \quad \int_{t_0}^{\infty} a(s)\,ds = \infty.$$

Dans le cas envisagé on a

$$\begin{aligned} z(t,\, t_0,\, M) &= \exp\Big[-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\Big]\Big\{M+M\int_{t_0}^{t} a(s-1)\exp\int_{t_0}^{s} a(\tau)\,d\tau\, ds\Big\} \\ &\leqslant M\Big\{\exp\Big[-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\Big]+p\exp\Big[\int_{t_0}^{t} -a(s)\,ds\Big]\Big(\exp\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds-1\Big)\Big\} \\ &\leqslant M\Big\{\exp\Big[-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\Big]+p\Big\} \leqslant M(p+\varepsilon) = M\alpha \end{aligned}$$

pour $t \geqslant T_{t_0}$, $\alpha = p+\varepsilon < 1$.

3. Les solutions oscillantes autour de 0. Envisageons l'équation $(\bar{\mathrm{E}})$, où $f(t,\, x)$ et $g(t,\, x)$ satisfont à $\mathrm{H}_{1.1}$ et $\mathrm{H}_{1.2}$. Supposons satisfaites les hypothèses suivantes

HYPOTHÈSES $H_{3.1}$. 1° Il existe une constante L, $0 < L < 1$ telle que

$$|f(t, x)+g(t, x)| \leqslant L|x|. \tag{3.1}$$

2° La fonction $f(t, x)$ converge uniformément vers 0, pour $x \to 0$, $0 \leqslant t < \infty$.

3° $x(t)$ est une solution oscillante autour de 0 de l'équation ($\bar{\mathrm{E}}$) telle que

$$|x(t)| \leqslant M \quad \text{pour } 0 \leqslant t < \infty, \tag{3.2}$$

$$\lim_{t\to\infty} |x(t)| = 0 \tag{3.3}$$

$$L\int_0^t |x(s)|\, ds \leqslant \beta < \infty \quad \text{pour } 0 \leqslant t < \infty. \tag{3.4}$$

THÉORÈME $T_{3.1}$. *Sous les hypothèses* $H_{1.1}$, $H_{1.2}$ *et* $H_{3.1}$ *la solution* $x(t)$ *satisfait l'inégalité initiale*

$$\Big|x(0)+ \int_{-1}^{0} f\big(s, x(s)\big)ds\Big| \leqslant \beta. \tag{3.5}$$

Démonstration. Nous avons démontré dans la Section 1 que

$$x(t)-\int_0^t \big[g\big(s, x(s)\big)+f\big(s, x(s)\big)\big]\, ds+ \int_{t-1}^{t} f\big(s, x(s)\big)ds = \text{const} = c$$

où

$$c = x(0)+ \int_{-1}^{0} f\big(s, x(s)\big)ds.$$

La solution $x(t)$ étant oscillante autour de 0, il existe une suite $\{t_n\}$, $t_n \to \infty$, $t_n \geqslant 1$ telle que

$$x(t_n) = 0, \tag{3.6}$$

d'où

$$\begin{aligned} |c| &\leqslant \int_0^{t_n} \big|g\big(s, x(s)\big)+f\big(s, x(s)\big)\big|\, ds+ \int_{t_n-1}^{t_n} f\big(s, x(s)\big)ds \\ &\leqslant L\int_0^{t_n} |x(s)|\, ds+ \int_{-1}^{0} \big|f\big(s+t_n, x(s+t_n)\big)\big|\, ds, \end{aligned}$$

mains

$$x(s+t_n) \Rightarrow 0 \quad \text{pour } t_n \to \infty,\ -1 \leqslant t \leqslant 0,$$

donc, en vertu de $H_{3.1}$ 2°, on a

$$\int_{-1}^{0} \big|f\big(s+t_n, x(s+t_n)\big)\big|\, ds \to 0 \quad \text{pour } n \to \infty$$

d'où, en vertu de (3.4), on obtient

$$|c| \leqslant \beta.$$

Ainsi nous avons obtenu (3.5).

Remarque $R_{3.1}$. Dans le cas où $L = 0$ on se trouve dans le cas étudié par O. Arino et P. Sérguier dans [1] $T_{3,43}$: $f(t, x) = -g(t, x)$ et $c = 0$. Cependent P. Sérguier et O. Arino admettent au lieu de $H_{3.1}$ 2° l'hypothèse H_{343}: pour toute suite $\{t_n\}$ il existe une sous-suite $\{t_{n_k}\} \to \infty$ telle que $f(t+t_{n_k}, u)$ converge uniformement sur le bornés de $\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}$ vers une fonction $F(t, u)$.

L'hypothèse H_{343} implique notre hypothèse $H_{3.1}$ 2°, tandis qu'elle ne résuite pas de notre hypothèse $H_{3.1}$ 2°. Envisageons l'exemple

$$f(t, x) = x \cdot \sigma(t)$$

où

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 1 - 2^{n-1} 3(t-n) & \text{pour } n \leqslant t \leqslant n + \dfrac{1}{2^{n-1} \cdot 3}, \\ 0 & \text{pour } n + \dfrac{1}{2^{n-1} \cdot 3} \leqslant t \leqslant n+1 - \dfrac{1}{2^{n-1} \cdot 3}, \\ 2^{n-1} 3 \left(t - n - 1 + \dfrac{1}{2^{n-1} \cdot 3} \right) & \text{pour } n+1 - \dfrac{1}{2^{n-1} \cdot 3} \leqslant t \leqslant n+1, \end{cases}$$

pour chaque $n = 1, 2, \ldots$

On a $|f(t, x)| \leqslant x$ et par suite $f(t, x) \Rightarrow 0$ pour $x \to 0$, $0 \leqslant t < \infty$ d'autre part pour la suite $t_n = n$, où $n \geqslant 2$, on a

$$\sigma(t+n) \to \sigma_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t = 0 \text{ et } t = -1, \\ 0 & \text{pour } -1 < t < 0. \end{cases}$$

C'est-à-dire qu'il n'existe pas de sous-suite $\{t_{n_k}\}$ telle que $f(t+t_{n_k}, u) \Rightarrow F(t, u) = \sigma_0(t) x$ pour $|x| \leqslant M$, $-1 \leqslant t \leqslant 0$, $n_k \to \infty$. De l'hypothèse H_{343} il résulte que $f(t, u) \Rightarrow 0$ pour $u \to 0$, $0 \leqslant t < \infty$. Supposons le contraire. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ et deux suites $\{t_n\}$ et $\{u_n\}$ telles que $u_n \to 0$ et

$$|f(t_n, u_n)| > \varepsilon_0 \quad \text{pour } n = 1, 2, \ldots$$

Il peut arriver que

1° la suite $\{t_n\}$ est bornée

ou bien

2° il existe une sous-suite $\{t_{\alpha_n}\}$ telle que $t_{\alpha_n} \to \infty$.

Dans le premier cas $0 \leqslant t_n < T$ et on peut extraire de la suite $\{t_n\}$ une sous-suite $\{t_{n_k}\}$ convergente $t_{n_k} \to \hat{t}$, $0 \leqslant \hat{t} \leqslant T$. Mais la fonction $f(t, x)$ est continue au point $(\hat{t}, 0)$, donc

$$f(t_{n_k}, u_{n_k}) \to f(\hat{t}, 0) = 0,$$

d'où l'on obtient $0 < \varepsilon_0 \leqslant 0$.

Dans le deuxième cas il existe une sous-suite de $\{t_{n_k}\}$, soit $\{t_{n_{k_j}}\}$ telle que

$$f(t+t_{n_{k_j}}, u) \Rightarrow F(t, u) \quad \text{pour } -1 \leqslant t \leqslant 0, \ |u| \leqslant N$$

et que pour $t = 0$ on a

$$f(t_{n_{k_j}}, u) \Rightarrow F(0, u),$$

$|F(t, 0)| = 0$, $F(t, u)$ est continue, et par suite, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|F(t, u)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 \quad \text{pour } |u| \leqslant \delta,$$

$u_{n_{k_j}} \to 0$, donc $|u_{n_{k_j}}| < \delta$ pour $N \leqslant n_{k_j}$ et de la convergence de $f(t_{n_{k_j}}, u)$ il résulte que

$$|f(t_{n_{k_j}}, u) - F(0, u)| \leqslant \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 \quad \text{pour } N \leqslant n_{k_j}$$

et, par suite,

$$\varepsilon_0 < |f(t_{n_{k_j}}, u_{n_{k_j}})| < \varepsilon_0 \quad \text{pour } N \leqslant n_{k_j}.$$

Ainsi nous avons démontré que l'hypothèse H_{343} entraîne $H_{3.1}$ 2°.

Remarque $R_{3.2}$. Sous l'hypothèse $H_{2.1}$ en vertu du théorème $T_{2.1}$ on a l'inégalité (2,8) pour $t \geqslant t_n$ et dans le cas où $t_n = nT$ $(T \geqslant 1)$ pour $n = 1, \ldots$ on obtient

$$L\int_0^t |x(s)|\, ds \leqslant LMT \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j = \frac{LMT}{1-\alpha} = \beta < \infty;$$

sous l'hypothèse $H_{3.1}$ 1° et (3.3) on obtient de là une évaluation des données initiales

$$\left| x(0) + \int_{-1}^{0} f(s, x(s)) \right| ds \leqslant \frac{LMT}{1-\alpha}. \tag{3.8}$$

4. Existence d'une solution oscillante autour de 0. Admettons les hypothèses suivantes:

Hypothèses H_4. 1° Il existe une constante $\mu > 0$ telle que

$$|f(t, x) + g(t, x)| \geqslant \mu |x|, \tag{4.1}$$

$$x \cdot [f(t-1, x) + g(t, x)] > 0 \quad \text{pour } x \neq 0. \tag{4.2}$$

THÉORÈME $T_{4.1}$. *Sous les hypothèses* $H_{1.1}$, $H_{1.2}$ *et* $H_{4.1}$ *chaque solution* $x(t)$ *de l'équation* $(\bar{E})$ *définie pour* $t_0 - 1 \leqslant t < \infty$, $x(t) \not\equiv 0$ *est oscillante autour de* 0.

Démonstration. 1° Nous démontrons d'abord que chaque solution $x(t)$ de l'équation (E) telle que

$$|x(t)| \geqslant m > 0 \quad \text{pour } \bar{t}-1 \leqslant t \leqslant \bar{t},\ \bar{t} \geqslant t_0, \tag{4.3}$$

satisfait à l'inégalité (4.3) aussi pour $t \geqslant \bar{t}$. Envisageons le cas où

$$x(t) \geqslant m > 0 \quad \text{pour } \bar{t}-1 \leqslant t \leqslant \bar{t}.$$

Supposons qu'il existe $\tilde{t} \geqslant \bar{t}$ tel que

$$x(\tilde{t}) = m, \quad x(t) \geqslant m \quad \text{pour } \tilde{t}-1 \leqslant t \leqslant \tilde{t}, \quad x(t) < m \quad \text{pour } \tilde{t} < t \leqslant \tilde{t}+\eta.$$

On a donc $x'(\tilde{t}) \geqslant f(\tilde{t}-1, m)+g(\tilde{t}, m) > 0$ et par suite

$$x(t) > x(\tilde{t}) = m \quad \text{pour } \tilde{t} < t \leqslant \tilde{t}+\eta,\ \eta > 0.$$

2° Dans Section 1 nous avons démontré que $x(t)$ satisfait à (1.14), c'est-à-dire que

$$x(t) = c(t_n) - \int_{t-1}^{t} f(s, x(s))\,ds + \int_{t_n}^{t} [g(s, x(s))+f(s, x(s))]\,ds \tag{4.4}$$

où

$$c(t_n) = x(t_n) + \int_{t_n-1}^{t_n} f(s, x(s))\,ds, \tag{4.5}$$

$t_n \geqslant t_0$ quelconque.

Supposons que $x(t) \neq 0$ pour $t \geqslant T \geqslant t_0$; soit par exemple,

$$x(t) > 0 \quad \text{pour } t \geqslant T. \tag{4.6}$$

Posons $t_n = T+1$. En vertu de (4.4) et (4.6) on a

$$x(t) = c(T+1) - \int_{t-1}^{t} f(s, x(s))\,ds + \int_{T+1}^{t} \{g(s, x(s))+f(s, x(s))\}\,ds, \tag{4.7}$$

$$c(T+1) = x(T+1) + \int_{T}^{T+1} f(s, x(s))\,ds.$$

En vertu de $H_{1.1}$ 3° et $H_{1.2}$(1.3) on a

$$c(T+1) > 0 \quad \text{et} \quad f(s, x(s))\,ds > 0 \quad \text{pour } s \geqslant T$$

et en vertu de $H_{1.2}$ 2°

$$f(t, x(t))+g(t, x(t)) \leqslant 0 \quad \text{pour } t \geqslant T,$$

d'où, en vertu de (4.7),

$$x(t) \leqslant c(T+1) - \int_{T+1}^{t} |f(s, x(s)) + g(s, x(s))|\, ds. \tag{4.8}$$

La fonction $x(t)$ étant continue et positive pour $T \leqslant t \leqslant T+1$, il existe une constante $m > 0$ telle que

$$x(t) \geqslant m \quad \text{pour } T \leqslant t \leqslant T+1,$$

donc

$$x(t) \geqslant m \quad \text{pour } t \geqslant T.$$

En vertu de (4.8), (4.1) et (4.9) on a

$$x(t) \leqslant c(T+1) - \mu \int_{T+1}^{t} |x(s)|\, ds \leqslant c(T+1) - \mu m(t-T-1) \quad \text{pour } t \geqslant T+1$$

d'où l'on obtient $x(t) < 0$ pour t suffisamment grand. Mais, en vertu de (4.6), cela est impossible. Ainsi nous avons démontré qu'il existe une suite $t_n \to \infty$, $t_{n+1} > t_n$ telle que

$$x(t_n) = 0. \tag{4.10}$$

3° Supposons que

$$x(t) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad x(t-1) \geqslant 0 \quad \text{pour } t \geqslant t^*$$

et $x(\tau) > 0$ $(\tau > t^*)$.

Dans le cas où $x(t-1) \geqslant x(t) \geqslant 0$ on a

$$x'(t) = f(t-1, x(t-1)) + g(t, x(t)) \geqslant f(t-1, x(t)) + g(t, x(t)) \geqslant 0.$$

Dans le cas ou $x(t) \geqslant x(t-1) \geqslant 0$ on a

$$x'(t) = f(t-1, x(t-1)) + g(t, x(t)) \geqslant f(t-1, x(t-1)) + g(t, x(t-1)) \geqslant 0$$

c'est-à-dire que $x(t)$ est croissante par rapport à t. (Dans le cas où $x(t) \leqslant 0$ et $x(t-1) \leqslant 0$ pour $t \geqslant t^*$, $x(t)$ est décroissante.) Dans le cas où $x(\tau) > 0$ et $x(t) \geqslant 0$ $(x(\tau) < 0$ et $x(t) \leqslant 0)$ pour $t \geqslant \tau - 1$ on a $x(t) \geqslant x(\tau) > 0$ $(x(t) \leqslant x(\tau) < 0)$ pour $t \geqslant \tau$, ce qui est incompatible avec (4.10). La solution $x(t)$ change donc de signe dans chaque intervalle $T \leqslant t < \infty$.

Références

[1] O. Arino et P. Sérguier, Thèse de doctorat d'etat, Publications Mathématiques, Université de Pau et du Pays de l'Adour (1980).

[2] V. Laksmikantham and S. Leela, *Differential and integral inequalities*, Vol. 11, Academic Press, New York and London 1969.

Reçu par la Rédaction le 1981.04.30