COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. L 1985 FASC. 1

ОПЕРАЦИИ МАССИ В СУПЕРАЛГЕБРАХ ЛИ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ КВИЛЛЕНА

В. С. РЕТАХ (МОСКВА)

Пусть X — линейно связное односвязное топологическое пространство (все рассматриваемые в статье пространства пунктированы и имеют гомотопический тип CW-комплекса). *Спектральной последовательностью Квиллена* называют спектральную последовательность коалгебр

$$E^1 = S(\pi_*^Q(X)) \Rightarrow H_*(X, Q), \tag{1}$$

где $\pi^Q(X) = \pi(X) \otimes Q$, а S — сумма всех симметрических степеней градуированного модуля $\pi_*^Q(X)$.

Пусть L — дифференциальная Z-супералгебра Ли (дифференциальная Z-градуированная алгебра Ли) над полем k нулевой характеристики. По супералгебре L строится [14] «комплекс Козюля» $C(L)$ (аналог комплекса Козюля для обычных алгебр Ли) и спектральная последовательность коалгебр

$$E^1 = S(\sigma H(L)) \Rightarrow H(C(L)), \tag{2}$$

где σ увеличивает размерность на единицу. Пусть $\tilde{\sigma} = \sigma^{-1}$.

Д. Квиллен ([14]) реализовал Z-супералгебру Ли $\tilde{\sigma}\pi_*^Q(X)$ со скобкой Уайтхеда в виде супералгебры гомологий свободной дифференциальной Z-супералгебры Ли и вывел из спектральной последовательности (2) спектральную последовательность (1).

В параграфе 1 мы показываем, что $H(C(L))$ изоморфна как коалгебра $\mathrm{Tor}^{U(L)}(k, k)$, где $U(L)$ — обертывающая супералгебра дифференциальной супералгебры Ли L (это позволяет назвать $H(C(L))$ гомологиями дифференциальной Z-супералгебры Ли L) и что спектральная последовательность коалгебр (2), начиная со второго члена, естественно изоморфна спектральной последовательности Эйленберга–Мура $\mathrm{Tor}^{HU(L)}(k, k) \Rightarrow \mathrm{Tor}^{U(L)}(k, k)$. Нам кажется, что эти простые результаты не отмечены в литературе.

В параграфе 2, следуя работе автора [15], мы приводим определение n-местных операций Масси в (ко)гомологиях дифференциальных Z-градуированных супералгебр Ли. Теорема 9 этого параграфа выражает значения краевых дифференциалов d^n спектральной последовательности (2) через значения n-местных операций Масси.

Применительно к спектральной последовательности Квиллена для d^2 и d^3 этот результат принадлежит К. Олдэю ([2]). Отметим также, что теорема 9 аналогична теореме П. Мэя ([10]), выражающей значения краевых дифференциалов спектральной последовательности $\operatorname{Tor}^{HA}(k,k) \Rightarrow \operatorname{Tor}^{A}(k,k)$, где A — дифференциальная ассоциативная градуированная (супер)алгебра над полем k, через значения классических n-местных операций Масси в гомологиях A. Чтобы не перегружать текст, мы не приводим лиевых аналогов известных результатов из [8] и [11].

Топологические приложения полученных результатов приведены в параграфе 3. По реализации Квиллена мы определяем операции Масси $\langle\cdot,\dots,\cdot\rangle$ в $\tilde{\sigma}\pi_*^Q(X)$ и, следуя [2], высшие произведения Уайтхеда $\langle\cdot,\dots,\cdot\rangle_{\mathrm{Wh}}$. Используя результаты Ф. Д. Вильямса ([18], [19]) вместе с приложением к данной статье, мы доказываем, что если определена операция $\langle x_1,\dots,x_n\rangle_{\mathrm{Wh}}$, то определена и операция $\langle\tilde{\sigma}x_1,\dots,\tilde{\sigma}x_n\rangle$, причем значения $\tilde{\sigma}\langle x_1,\dots,x_n\rangle_{\mathrm{Wh}}$ принадлежат множеству значений $\pm\langle\tilde{\sigma}x_1,\dots,\tilde{\sigma}x_n\rangle$.

Мы показываем, что значения операций Масси в $\tilde{\sigma}\pi_*^Q(X)$ лежат в ядре рационального гомоморфизма Гуревича и справедлива

Теорема. *Следующие условия равносильны:*

а) *рационализация Сулливана пространства X — H-пространство,*

б) *для любого n и любого набора элементов $(x_i)_{i=1}^n \subset \pi_*^Q(X)$ определена операция $\langle x_1,\dots,x_n\rangle_{\mathrm{Wh}}$,*

в) *для любого n и любого набора элементов $(x_i)_1^n \subset \tilde{\sigma}\pi_*^Q(X)$ определена операция Масси $\langle x_1,\dots,x_n\rangle$,*

г) *рациональный гомоморфизм Гуревича $h\otimes Q$ инъективен,*

д) *все k-инварианты X конечного порядка,*

е) *рационализация пространства X гомотопически эквивалентна произведению пространств Эйленберга–Маклейна.*

Эта теорема обобщает результаты из [4] и [17].

Автор признателен И. Н. Бернштейну и Д. Б. Фуксу за моральную поддержку.

1.1. Пусть L — дифференциальная Z-супералгебра Ли с дифференциалом d_L степени -1 и $L_n=0$ при $n<0$. Через $U(L)$ обозначим соответствующую обертывающую дифференциальную градуированную алгебру.

Через K обозначим цилиндр тождественного отображения L в L. Это означает, что $K_n=(\sigma L)_n\oplus L_n=L_{n-1}\oplus L_n$. Если $\sigma\colon L\to\sigma L\to K$ и $\theta\colon L\to K$ — канонические вложения, то дифференциал $d^{\#}$ в K определен формулами

$$d^{\#}(\sigma a)=\theta a-\sigma d_L a,\qquad d^{\#}(\theta a)=\theta d_L a.$$

Построим в K стягивающую гомотопию s, определив ее формулами $s(\theta a)=\sigma a$, $s(\sigma a)=0$. Очевидно, $sd^{\#}+d^{\#}s=\mathrm{id}$, что влечет ацикличность K.

Введем в K структуру дифференциальной супералгебры Ли, положив $[\sigma a, \sigma b] = 0$, $[\theta a, \theta b] = \theta[a, b]_L$, $[\sigma a, \theta b] = \sigma[a, b]_L$. В таком случае

$$[\theta a, \theta b] = (-1)^{|a|} \cdot \theta[a, b].$$

По определению $|a| = \deg a$.

Следуя Квиллену ([14]), рассмотрим обертывающую дифференциальную алгебру $U(K)$, которую для краткости обозначим через U, как правый $U(L)$-модуль. Отображение $U(L) \to U$ индуцировано отображением θ. Через $C(L)$ обозначим дифференциальную коалгебру $U \otimes_{U(L)} k$ с индуцированным из U дифференциалом, а через $H_*(L)$ соответствующую коалгебру гомологий.

1.2. Исследуем подробнее структуру алгебры U. Для элемента $x \in L$ положим $x = (-1)^{|x|} \cdot x$. Для перестановки $\tau: (1, \ldots, n) \to (i_1, \ldots, i_n)$ и набора элементов $a_1, \ldots, a_n$ из L через $\varepsilon(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$ обозначим сумму чисел вида $(\deg a_{i_s} + 1)(\deg a_{i_t} + 1)$ по всем парам i_s, i_t таким, что $s < t$, но $\tau^{-1}(i_t) < \tau^{-1}(i_s)$.

Лемма 2.

$$\theta(a_1)\sigma(a_2) \cdot \ldots \cdot \sigma(a_n) =$$
$$= \sigma(\bar{a}_2) \cdot \ldots \cdot \sigma(\bar{a}_n)\theta(a_1) \cdot (-1)^{\alpha_1} -$$
$$- \sum_{i=2}^{n} \sigma([\bar{a}_1, a_i])\sigma(a_2) \ldots \widehat{\sigma(a_i)} \ldots \sigma(a_n) \cdot (-1)^{\alpha_i},$$

где $\alpha_1 = \varepsilon(a_2, \ldots, a_n, a_1)$, $\alpha_i = \varepsilon(a_1, a_i, a_2, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_n)$, $i \geqslant 2$.

Доказательство лемм 2–5 проводится простой индукцией и поэтому опускается.

1.3. Из леммы 2 следует, что каждый элемент U представим в виде линейной комбинации элементов вида $\sigma(a_1) \ldots \sigma(a_n)\theta(b_1) \ldots \theta(b_m)$, где $a_i, b_j \in L$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$.

Заметим, что элемент $\sigma(a_1) \ldots \sigma(a_n)$ можно рассматривать как элемент из $S(\sigma L)$, и определим гомоморфизм коалгебр

$$i: S(\sigma L) \otimes U(L) \to U$$

формулой

$$\sigma(a_1) \ldots \sigma(a_n) \otimes b_1 \ldots b_m \mapsto \sigma(a_1) \ldots \sigma(a_n)\theta(b_1) \ldots \theta(b_m).$$

По теореме Пуанкаре–Биркгофа–Витта (см.[14]) i — изоморфизм коалгебр.

Дифференциал $d^{\#}$ в супералгебре Ли K определяет дифференциал d в алгебре U. Наша ближайшая задача — определить возрастающую фильтрацию $(F_r U)_{r=-1}^{\infty}$ в U и показать, что U с этой фильтрацией является резольвентой Кюннета ([8]) поля k. Отсюда (см. [8]) сразу следует, что коалгебра $H_*(L)$ изоморфна коалгебре $\mathrm{Tor}_*^{U(L)}(k, k)$.

Определим возрастающую фильтрацию S_r в $S(\sigma L)$. Биградуируем $S(\sigma L)$, относя элементу $\sigma(a_1)\ldots\sigma(a_p)$ пару p и $q=\sum|a_i|$. Положим $S_r=\sum\limits_{p\leqslant r}S(\sigma L)_{p,q}$ и $F_{-1}=k$, $F_rU=i\bigl(S_r\otimes U(L)\bigr)$ при $r\geqslant 0$.

Из приводимой ниже леммы и леммы 2 вытекает, что F_rU — дифференциальный $U(L)$-модуль.

Лемма 3.

$$d\bigl(\sigma(a_1)\ldots\sigma(a_n)\bigr)=\sum_{i=1}^{n}\sigma(\bar a_1)\ldots\sigma(\bar a_{i-1})\theta(a_i)\ldots\sigma(a_n)-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\sigma(\bar a_1)\ldots\sigma(\bar a_{i-1})\sigma(d_La_i)\ldots\sigma(a_n).$$

1.4. Положим

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma(\bar a_1)\ldots\sigma(\bar a_{i-1})\theta(a_i)\ldots\sigma(a_n)=d_1\bigl(\sigma(a_1)\ldots\sigma(a_n)\bigr)$$

и

$$-\sum_{i=1}^{n}\sigma(\bar a_1)\ldots\sigma(\bar a_{i-1})\sigma(d_La_i)\ldots\sigma(a_n)=d_0\bigl(\sigma(a_1)\ldots\sigma(a_n)\bigr).$$

Пусть $d_0(Q)=d_1(Q)=0$. Для $z=yt$, где $y=\sigma(a_1)\ldots\sigma(a_n)$, $t=\theta(b_1)\ldots\theta(b_m)$ определим $d_1(z)=d^1(y)t$, $d_0(z)=d_0(y)t+(-1)^{|y|}y\,dt$ и распространим по линейности d_1 и d_0 на все U. Очевидно, $d=d_0+d_1$. В самом деле, по лемме 3, $d(y)=d_0(y)+d_1(y)$. Далее,

$$d(z)=d(y)t+(-1)^{|y|}\cdot y\,dt=d_1(y)t+d_0(y)t+(-1)^{|y|}y\,dt=d_0(z)+d_1(z).$$

Лемма 4.

$$(d_0)^2=(d_1)^2=d_0d_1+d_1d_0^2=0.$$

1.5. Из леммы 4 следует, что U с фильтрацией F_rU является расщепляющимся объектом Кюннета ([8]). Покажем, что U резольвента в смысле [8] поля k.

Рассмотрим определенную фильтрацией (F_rU) спектральную последовательность $\{E^r\}$. Дифференциал d_0 определяет дифференциал в каждом комплексе $E^0_{p,*}$, а дифференциал d_1 — отображение таких комплексов.

Продолжим далее гомотопию s в супералгебре K до дифференцирования $\tilde s$ степени $+1$ в алгебре U.

Лемма 5. *Если* $x=\sigma(a_1)\ldots\sigma(a_n)\theta(b_1)\ldots\theta(b_m)$, *то*

$$(d_1\tilde s+\tilde sd_1)x=(n+m)x.$$

Кроме того, $d_0\tilde s+\tilde sd_0=0$.

Покажем теперь, что соответствующий фильтрации комплекс $E^1_{p,*}$ точен. Пусть $x\in E^0_{p,*}$ и $d_0x=d_1x=0$. Тогда $d_0sx=-sd_0x=0$ и d_1sx кратно x, откуда следует точность комплекса циклов $Z^0_{p,*}$. Далее, если $d_1(d_0y) = 0$, то $d_1(sd_0y)$ кратен d_0y, откуда следует точность комплекса границ $B^0_{p,*}$. Следовательно, точен и комплекс $E^1_{p,*} = Z^0_{p,*}/B^0_{p,*}$, и U с фильтрацией (F_rU) — резольвента поля k.

Напомним, что коалгебра $C(L) = U \otimes_{U(L)} k$. Фильтрация коалгебрами F_rU определяет фильтрацию $F_rC(L) = F_rU \otimes_{U(L)} k$. Поскольку U — резольвента k, из [8] вытекает, что спектральная последовательность коалгебр $E^r(C(L))$ сходится к $\mathrm{Tor}_*^{U(L)}(k, k)$, причем $E^2(C(L)) \simeq \mathrm{Tor}_*^{HU(L)}(k, k)$. Отсюда следует, что $H_*(L) \simeq \mathrm{Tor}_*^{U(L)}(k, k)$.

2.1. Выпишем теперь явно действие дифференциала $\partial \doteq d \otimes_{U(L)} k$ в $C(L)$. Для этого достаточно выписать действие дифференциалов $\partial_0 = d_0 \otimes_{U(L)} k$ и $\partial_1 = d_1 \otimes_{U(L)} k$, поскольку $\partial = \partial_0 + \partial_1$.

Для этого прежде всего отметим, что как коалгебра $C(L)$ естественно изоморфна $S(\sigma L)$, как это вытекает из п. 1.3. Это дает основание интерпретировать элементы из $C(L)$ как суммы произведений вида $a\sigma(a_1)\ldots\sigma(a_n)$, где a_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — элементы из L, $a \in k$.

Предложение 1.

$$\partial_1\big(\sigma(a_1)\ldots\sigma(a_n)\big) =$$
$$= -\sum_{i<j} \sigma([\bar{a}_i, a_j])\sigma(a_1)\ldots\widehat{\sigma(a_i)}\ldots\widehat{\sigma(a_j)}\ldots\sigma(a_n)\cdot(-1)^{\varepsilon(a_i, a_j, a_1, \ldots, a_n)}.$$

Доказательство. По определению

$$d_1\big(\sigma(a_1)\ldots\sigma(a_n)\big) = \sum_{i=1}^{n} \sigma(a_1)\cdot\ldots\cdot\sigma(\bar{a}_{i-1})\theta(\bar{a}_{i-1})\theta(a_i)\ldots\sigma(a_n).$$

По лемме 2

$$\theta(a_i)\sigma(a_{i+1})\ldots\sigma(a_n) =$$
$$= -\sum_{k=i+1}^{n} \sigma([\bar{a}_i, a_k])\sigma(a_{i+1})\ldots\widehat{\sigma(a_k)}\ldots\sigma(a_n)\cdot(-1)^{\beta_{ik}} \pm \sigma(a_{i+1})\ldots\sigma(a_n)\theta(a_i),$$

где $\beta_{ik} = \varepsilon(a_i, a_k, \ldots, \hat{a}_k, \ldots, a_n)$.

●

Заметим далее, что

$$\sigma(\bar{a}_1)\ldots\sigma(\bar{a}_{i-1})\sigma([\bar{a}_i, a_k]) = (-1)^{\alpha_{ik}}\cdot\sigma([a_i, a_k])\sigma(a_1)\ldots\sigma(a_{i-1}),$$

где $\alpha_{ik} = (|a_i| + |a_k| + 1)\sum_{p=1}^{i-1}(|a_p|+1) + \sum_{p=1}^{i-1}(|a_p|+1)$.

Преобразуем α_{ik} к виду $(|a_i|+1)\sum_{p=1}^{i-1}(|a_p|+1)+(|a_k|+1)\sum_{p=1}^{i-1}(|a_p|+1)$, что по определению есть $\varepsilon(a_i, a_k, a_1, \dots \hat{a}_i \dots, a_{i-1})$.

Итак

$$d_1\big(\sigma(a_1)\dots\sigma(a_n)\big) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{k=i+1}^{n}\sigma([\bar{a}_i, a_k])\sigma(a_1)\dots\sigma(a_n)\cdot(-1)^{\alpha_{ik}+\beta_{ik}} \pm \sigma(a_1)\dots\sigma(a_n)\theta(a_i)\Big).$$

Поскольку $\alpha_{ik}+\beta_{ik} = \varepsilon(a_i, a_k, \dots, a_{i-1})+\varepsilon(a_i, a_k, \dots, a_n) = \varepsilon(a_i, a_k, \dots, a_n)$, имеем:

$$\partial_1\big(\sigma(a_1)\dots\sigma(a_n)\big) = -\sum_{i<k}\sigma([\bar{a}_i, a_k])\sigma(a_1)\dots\sigma(a_n)\cdot(-1)^{\varepsilon(a_i, a_j, a_1, \dots, a_n)},$$

что и требовалось доказать. □

Отметим, что из описания d_0 следует, что ∂_0 определен той же формулой. Заметим теперь, что

$$\sigma(\bar{a})\sigma(d_L b) = \sigma(d_L b)\sigma(a)\cdot(-1)^{(|a|+1)(|b|+1)},$$

откуда

$$\partial_0\big(\sigma(a_1)\dots\sigma(a_n)\big) = -\sum\sigma(d_L a_i)\sigma(a_1)\dots\widehat{\sigma(a_i)}\dots\sigma(a_n)\cdot(-1)^{\varepsilon(a_i, a_1, \dots, a_n)}.$$

Описание коалгебры $C(L)$ и ее дифференциала показывает, что комплекс $\big(C(L), \partial\big)$, по которому вычисляется гомология дифференциальной супералгебры Ли, является естественным обобщением комплекса Козюля для вычисления гомологий обычных алгебр Ли.

2.2. Перейдем к подробному описанию спектральной последовательности $E^r\big(C(L)\big)$. Отметим, что фильтрация $F_r C(L)$ совпадает с примитивной фильтрацией коалгебры $C(L)$ (см. [11]).

Предложение 2.

$$E^1\big(C(L)\big) \simeq S\big(\sigma H(L)\big).$$

Доказательство. Комплекс $E^0\big(C(L)\big)_{p,*}$ с определенным ∂_0 дифференциалом естественно изоморфен p-й симметрической степени комплекса $(\sigma L, \sigma d_L)$. Поэтому $E^1_p\big(C(L)\big)_{p,*}$ естественно изоморфен $H\big(S^p(\sigma L)\big)$. Ввиду перестановочности функторов гомологий и симметрической степени (см. [14]) $E^1\big(C(L)\big)$ естественно изоморфен $S\big(H\sigma(L)\big)$ и, следовательно, $S\big(\sigma H(L)\big)$. □

2.3. Напомним определение операций Масси в гомологиях дифференциальной супералгебры Ли ([15]).

Пусть M — вполне упорядоченное множество. Разбиение M на непересекающиеся вполне упорядоченные подмножества $M_1, \ldots, M_k$ назовем *регулярным*, если минимальный элемент M_i предшествует минимальному элементу M_{i+1} $(i = 1, \ldots, k-1)$. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — набор однородных элементов из $H(L)$. Будем говорить, что *определена n-местная операция Масси* $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, если для любого упорядоченного набора $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$ существуют однородные элементы $y_{i_1\ldots i_k} \in L$ такие, что y_i — представители x_i и для $k < n$

$$d_L y_{i_1\ldots i_k} = \bar{y}_{i_1\ldots i_k},$$

где $\bar{y}_{i_1\ldots i_k} = \sum [\bar{y}_{s_1\ldots s_p}, y_{t_1\ldots t_q}] \cdot (-1)^{\varepsilon(v_{s_1},\ldots,v_{s_p}, v_{t_1},\ldots,v_{t_q})}$ (сумма берется по всем попарным регулярным разбиениям $s_1, \ldots, s_p$ и $t_1, \ldots, t_q$ набора $i_1, \ldots, i_k$). Элементы $(y_{i_1\ldots i_k})_{k=1}^{n-1}$ называются *определяющей системой операции* $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, элемент $\bar{y}_{1\ldots n}$ является циклом, и его класс гомологий называется *значением операции* $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$. Множество значений операции $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ обозначим тем же символом $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$. Очевидно, если операция $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ определена, то множество значений любой операции $\langle x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-1}}\rangle$ содержит нуль.

Вообще говоря, операция $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ однозначна лишь по модулю значений $(n-1)$-местных операций. Однако, если $(y\ldots)$ — определяющая система операции $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ и $z_1, \ldots, z_n$ — произвольный набор однородных представителей $x_1, \ldots, x_n$, то существует определяющая система $(z_{i_1\ldots i_k})$ с $\bar{z}_{1\ldots n}$, гомологичным $\bar{y}_{1\ldots n}$ (см. [15]).

2.4. Предложение 3. *Пусть $\varphi_0 = \sigma(y_1)\ldots\sigma(y_n) \in C(L)$, y_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — однородные представители элементов $x_i \in H(L)$ и определена операция $\sigma\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$. Тогда существуют элементы $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1} \in C(L)$ такие, что $\partial_0\varphi_{a+1} + \partial_1\varphi_a = 0$ при $0 \leqslant a < n-1$ и $(-1)^n\partial_1\varphi_{n-1}$ представляет одно из значений операции $\sigma\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$.*

2.5. Доказательству предпошлем несколько лемм.

Лемма 6.

$$\deg y_{i_1\ldots i_k} = \deg y_{i_1} + \ldots + \deg y_{i_k} + k - 1.$$

Доказательство проведем индукцией по k. Для $k = 1$ лемма верна. Предположим, что она верна для $k < m$ и докажем ее для $k = m$.

Пусть $s_1, \ldots, s_p$ и $t_1, \ldots, t_q$ — регулярное разбиение $i_1, \ldots, i_m$ на два набора. Тогда

$$|[y_{s_1\ldots s_p}, y_{t_1\ldots t_q}]| = |y_{i_1}| + \ldots + |y_{i_m}| + p - 1 + q - 1 = |y_{i_1}| + \ldots + |y_{i_m}| + m - 2.$$

Следовательно, $|y_{i_1\ldots i_m}| = |y_{i_1}| + \ldots + |y_{i_m}| + m - 1$. Лемма доказана. □

2.6. Лемма 7. *Пусть $s_1, \ldots, s_p$ и $t_1, \ldots, t_q$ — разбиение набора $i_1, \ldots, i_k$ на* *два упорядоченных поднабора и определены* $y_{s_1\dots s_p}$ *и* $y_{t_1\dots t_q}$. *Тогда*

$$\varepsilon(y_{s_1},\dots,y_{s_p},y_{t_1},\dots,y_{t_q})+\varepsilon(y_{t_1},\dots,y_{t_q},y_{s_1},\dots y_{s_p}) =$$
$$= (|y_{s_1\dots s_p}|+1)(|y_{t_1\dots t_q}|+1).$$

Доказательство. Левая часть равенства состоит из суммы чисел $(|y_{s_\alpha}|+1)(|y_{t_\beta}|+1)$, где $1\leqslant\alpha\leqslant p$, $1\leqslant\beta\leqslant q$, и, следовательно, равна $\sum\limits_{\alpha,\beta}|y_{s_\alpha}||y_{t_\beta}|+q\sum\limits_{\alpha}|y_{s_\alpha}|+p\sum\limits_{\beta}|y_{t_\beta}|+pq$. Правая часть по лемме 6 равна $(|y_{s_1}|+\dots+|y_{s_p}|+p)(|y_{t_1}|+\dots+|y_{t_q}|+q)$ и, очевидно, равна левой. □

2.7. Доказательство предложения 3. Пусть $(y_{i_1\dots i_k})$ — определяющая система операции $\langle x_1,\dots,x_n\rangle$. Положим

$$\varphi_a = (-1)^a\cdot\sum\sigma y_{A_1}\dots\sigma y_{A_{n-a}}\cdot(-1)^{\varepsilon(A_1,\dots,A_{n-a})},$$

где сумма берется по всем регулярным разбиениям набора $1,\dots,n$ на непересекающиеся наборы $A_1=(s_1,\dots,s_p),\dots,A_{n-a}=(t_1,\dots,t_q)$ и $y_{A_1}=y_{s_1\dots s_p},\dots$ $\dots,y_{A_{n-a}}=y_{t_1\dots t_q}$, $\varepsilon(A_1,\dots,A_{n-a})=\varepsilon(y_{s_1},\dots,y_{s_p},\dots,y_{t_1},\dots,y_{t_q})$. Отсюда

$$(*)\quad \partial_1\varphi_a=(-1)^{a-1}\cdot\sum_{i<j}\sum\sigma([\bar y_{A_i},y_{A_j}])\sigma(y_{A_1})\dots$$
$$\dots\widehat{\sigma(y_{A_i})}\dots\widehat{\sigma(y_{A_j})}\dots\sigma(y_{A_{n-a}})\cdot(-1)^{f(i,j)},$$

где $f(i,j)=\varepsilon(A_1,\dots,A_{n-j})+\varepsilon(A_i,A_j,A_1,\dots,A_{n-a})$, а вторая сумма берется по всем регулярным разбиениям $A_1,\dots,A_{n-a}$ набора $1,\dots,n$. По лемме 7, $f(i,j)=\varepsilon(A_i,A_j,A_1,\dots,A_{n-a})$. Отсюда следует, что $(-1)^n\partial_1\varphi_{n-1}$ представляет одно из значений операции $\sigma\langle x_1,\dots,x_n\rangle$. С другой стороны,

$$(**)\quad \partial_0\varphi_{a+1}=$$
$$=(-1)^a\sum\sum_{k=1}^{n-a-1}\sigma(d_Ly_{B_k})\sigma(y_{B_1})\dots\widehat{\sigma(y_{B_k})}\dots\sigma(y_{B_{n-a-1}})\cdot(-1)^{g(k)},$$

где $g(k)=\varepsilon(B_1,\dots,B_{n-a-1})-\varepsilon(B_k,\dots,B_{n-a-1})$, а первая сумма берется по всем регулярным разбиениям набора $1,\dots,n$ на непересекающиеся наборы $B_1,\dots,B_{n-a-1}$. По той же лемме $g(k)=\varepsilon(B_k,B_1,\dots,B_{n-a-1})$.

По определению

$$d_Ly_{B_k}=\sum[\bar y_{A_i},y_{A_j}]\cdot(-1)^{\varepsilon(A_i,A_j)},$$

где сумма берется по всем регулярным разбиениям набора B_k на непересекающиеся наборы A_i и A_j. Подставляя разложение $d_Ly_{B_k}$ в разложение $(**)$ убедимся, что при $a\leqslant n-2$ в разложениях $(*)$ и $(**)$ присутствуют одни и те же члены вида $\pm\sigma([\bar y_{A_i},y_{A_j}])\sigma(y_{A_1})\dots\sigma(y_{A_{n-a}})$. При этом показатель степени при -1 равен $a-1+\varepsilon(A_i,A_j,A_1,\dots,A_{n-a})$ в разложении $(*)$ и равен $a+\varepsilon(A_i,A_j)+\varepsilon(A_i+A_j,A_1,\dots,A_{n-a})$ в разложении $(**)$, где через A_i+A_j обозначен упорядоченный набор, образованный из $A_i \cup A_j$. Очевидно, $\varepsilon(A_i, A_j)+\varepsilon(A_i+ +A_j, A_1, \ldots, A_{n-a}) = \varepsilon(A_i, A_j, A_1, \ldots, A_{n-a})$, откуда $\partial_0\varphi_{a+1}+\partial_1\varphi_a = 0$. □

2.8. Следствие 1([14]). *Для любой определяющей системы $(y_{i_1\ldots i_k})$ операции $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ элемент $\tilde{y}_{1\ldots n}$ является циклом, поскольку*

$$\sigma d_L(\partial_1\varphi_{n-1}) = \partial_0(\partial_1\varphi_{n-1}) = \partial^2(\varphi_0+ \ldots +\varphi_{n-1}) = 0.$$

2.9. Рассмотрим спектральную последовательность $E^r(C(L))$. Из предложения 3 и конструкции $E^r(C(L))$ немедленно вытекает теорема, позволяющая описывать краевые дифференциалы в этой последовательности.

Теорема 1. *Если для $x_1, \ldots, x_n \in H(L)$ определена операция Масси, то элемент $\sigma x_1 \ldots \sigma x_n \in S(\sigma H(L)) = E^1$ доживает до элемента $\theta \in E^{n-1}$, причем любой элемент из $\sigma\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in E^1$ представляет $(-1)^n d^{n-1}\theta$.*

3. В статье Квиллена [14] построен функтор μ, реализующий суперaлгебру Ли $\tilde{\sigma}\pi_*^Q(X)$ рациональных гомотопий линейно связного односвязного пространства X в виде суперaлгебры Ли гомологий свободной связной суперaлгебры Ли $\mu(X)$. Напомним что суперaлгебра Ли называется свободной, если она изоморфна алгебре примитивных элементов кобарконструкций ([1]) кокоммутативной градуированной коалгебры. Конкретные описания этого функтора приведены в [17] и [7].

Каждая такая реализация дает возможность определить высшие операции в суперaлгебре $\tilde{\sigma}\pi_*^Q(X)$ как операции Масси в гомологиях $\mu(X)$.

3.1. Предложение 4. *Пусть $\varphi: \lambda_1 \to \lambda_2$ — слабая эквивалентность связных свободных дифференциальных Z-суперaлгебр Ли (т. е. φ — гомоморфизм суперaлгебр Ли и $\varphi_* = H(\varphi)$ — изоморфизм). Операция Масси $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ в $H(\lambda_1)$ определена, если и только если определена операция $\langle \varphi_* x_1, \ldots, \varphi_* x_n\rangle$, причем*

$$\varphi_*(\langle x_1, \ldots, x_n\rangle) = \langle \varphi_* x_1, \ldots, \varphi_* x_n\rangle.$$

Доказательство. На основании предложения 3.1 из [7] построим слабые эквивалентности $\pi_i: \lambda_i \to \Lambda_i$ и $r_i: \Lambda_i \to \lambda_i$ такие, что $\pi_i r_i = \mathrm{Id}_i$ и Λ_i — минимальные суперaлгебры Ли (т.е. $d_i\Lambda_i \subset [\Lambda_i, \Lambda_i]$) для $i = 1, 2$. Отсюда (см. [7]) вытекает, что слабая эквивалентность суперaлгебр Ли $\varphi' = \pi_2\varphi r_1$ является изоморфизмом. Для гомоморфизмов r_1 и r_2 утверждение предложения очевидно. Отсюда следует его справедливость для φ. □

3.2. Таким образом, операции Масси в суперaлгебре $\tilde{\sigma}\pi_*^Q(X)$ не зависят от выбора реализации функтора μ, и мы будем говорить об операциях Масси в $\tilde{\sigma}\pi_*^Q(X)$. Тумер ([17]) называет эти операции (до третьего порядка включительно) производными произведениями Уайтхеда.

3.3. Наша ближайшая цель — сравнить высшие произведения Уайтхеда и операции Масси в суперaлгебре Ли $\tilde{\sigma}\pi_*^Q(X)$. Для операций третьего порядка другими методами это сделано в [2].

Высшие произведения Уайтхеда в $\pi_*^Q(X)$ можно определить ([2]), следуя известному ([13]) определению этих операций в $\pi_*(X)$, если используемые в этой статье пространства заменить их рационализациями Сулливана.

Начнем с удобного способа определения операций Масси в суперлгебре Ли $\tilde{\sigma}\pi_*^Q(X)$.

Одна из возможностей реализации функтора μ состоит в следующем (см. [7]). Рассмотрим фактор-комплекс $\hat{S}(X)$ комплекса, порожденного всеми сингулярными симплексами $\delta:\sigma^n \to X$, переводящими одномерный остов σ^n в отмеченную точку x_0, по подкомплексу стянутых симплексов $\sigma^n \to x_0$. Добавив к $\hat{S}(X)$ нульмерную компоненту Q, получим комплекс $S(X)$. В $\hat{S}(X)$, а значит, и в $S(X)$ стандартным образом вводится коумножение ([7]). Покажем, что в качестве $\mu(X)$ можно взять супералгебру Ли примитивных элементов кобарконструкции $A\big(S(X) \otimes Q\big)$ (для однородных $a, b \in \mu(X)$ имеем $[a, b]_{\mu(X)} = ab-(-1)^{|ab|}ba$).

Пространство петель ΩX является H-пространством, поэтому $S(\Omega X)$ — алгебра Хопфа. Следуя [1] и [5], можно установить, что алгебры $A\big(S(X) \otimes Q\big)$ и $S(\Omega X) \otimes Q$ гомотопны друг другу, причем цепные эквивалентности согласуются со структурой алгебр Хопфа.

Через $P(X)$ обозначим Z-супералгебру Ли примитивных элементов алгебры Хопфа $S(\Omega X) \otimes Q$. Согласно [16], супералгебра Ли гомологий $P(X)$ естественно изоморфна супералгебре Ли примитивных элементов алгебры Хопфа $H\big(S(\Omega X) \otimes Q\big)$. Последняя супералгебра Ли по теореме Картана–Серра изоморфна $\pi_*^Q(X)$.

Таким образом, супералгебра Ли гомологий супералгебры Ли примитивных элементов $A\big(S(X) \otimes Q\big)$ естественно изоморфна $\pi_*^Q(X)$, и операции Масси в последней можно определить, исходя из супералгебры Ли примитивных элементов алгебры $H\big(S(\Omega X) \otimes Q\big)$.

3.4. Рациональные высшие произведения Уайтхеда определены в [2]. Также можно определить аналог рациональных высших произведений Самельсона ([19]). Следуя [19], можно показать, что

$$T(\langle g_1, \ldots, g_n \rangle)_{\mathrm{Wh}} = \langle Tg_1, \ldots, Tg_n \rangle_{\mathrm{S}},$$

где $T: \sigma\pi_*(X) \to \pi_*(\Omega X)$ — естественный изоморфизм, а $\langle \ldots \rangle_{\mathrm{Wh}}$ и $\langle \ldots \rangle_{\mathrm{S}}$ — значения рациональных произведений Уайтхеда и Самельсона, и

$$h \otimes Q(\langle Tg_1, \ldots, Tg_n \rangle_{\mathrm{S}}) \subset \langle Tg_1, \ldots, Tg_n \rangle_{\mathrm{W}},$$

где $\langle \ldots \rangle_{\mathrm{W}}$ — значения операций Вильямса (см. приложение) и $h \otimes Q$ — рациональный гомоморфизм Гурвича.

Легко видеть, что последнее включение справедливо, если $C_*(\Omega Y)$ заменить на $S(\Omega Y)$, а после на супералгебру Ли ее примитивных элементов.

Применив к описанной ситуации функтор рационализации Сулливана, теорему Картана–Серра и результат приложения, получим следующий результат.

Теорема 2. *Пусть* $x_i \in \pi_*^Q(X)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. *Если определена операция* $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle_{\mathrm{Wh}}$, *то определена и операция Масси* $\langle \tilde{\sigma}x_1 \ldots\rangle$, *причем* $\tilde{\sigma}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle_{\mathrm{Wh}} \subset \pm\langle\tilde{\sigma}x_1, \ldots, \tilde{\sigma}x_n\rangle$ (см. приложение).

3.5. Перейдем к построению спектральной последовательности Квиллена для линейно связного односвязного пространства:

Рассмотрим построенную в параграфе 1 спектральную последовательность для приведенной реализации $\mu(X)$. Из теоремы 7.5 на стр. 293 в [14] следует, что эта спектральная последовательность сходится к $H_*^Q(X)$. Отсюда и из теоремы 1 вытекает

Теорема 3. *Пусть* $E^1 = S(\sigma\pi_*^Q(X)) \Rightarrow H_*^Q(X)$ — *спектральная последовательность Квиллена. Если для* $x_1, \ldots, x_n \in \pi_*^Q(X)$ *определена операция Масси, то элемент* $x_1 \ldots x_n$ *доживает до элемента* $\theta \in E^{n-1}$, *причем любой элемент из* $\sigma\langle\tilde{\sigma}x_1, \ldots, \tilde{\sigma}x_n\rangle \in E$ *представляет* $(-1)^n d^{n-1}\theta$.

3.6. Следствие 2. *Образы операций Масси в* $\pi_*^Q(X)$ *лежат в ядре рационального гомоморфизма Гуревича.*

Для доказательства достаточно заметить, что по [9] этот гомоморфизм представим в виде $\pi_n^Q(X) \simeq E^1_{1,n-1} \to E^\infty_{1,n-1} \rightarrowtail H_n^Q(X)$.

Из теоремы 3 нетрудно вывести условия того, чтобы ядро этого гомоморфизма состояло бы только из значений операций Масси, и указать пространства, удовлетворяющим этим условиям.

3.7. Следствие 3. *Пусть* $k > (n+3)/4$. *Если операции Уайтхеда до* k*-го порядка содержат нуль, то существует отображение пространства* X *в произведение пространств Эйлинберга–Маклейна, индуцирующее изоморфизм рациональных групп гомотопий до* n*-й включительно.*

Доказательство. Из теоремы 3 следует, что $h_p \otimes Q$ для $p \leqslant n$ инъективен. Остается воспользоваться предложением 4.1 из [3]. □

3.8. Доказательство теоремы из введения. Импликация а) $\Rightarrow$ б) — это «рационализация» результата из [13]. По теореме 2 и 3 б) следует в). Из в) следует, что все операции Масси содержат нуль, поэтому по теореме 3 все краевые дифференциалы равны нулю и выполнено г). По [3] (см. также [17]) г) $\Rightarrow$ д), а по следствию 3, д) $\Rightarrow$ е). Это также следует из локализации Сулливана. Импликация е) $\Rightarrow$ а) следует из [12]. □

3.9. Следствие 4 ([6], [17]). *Если* $\pi_i^Q = 0$ *для* $2 \leqslant n \leqslant 3(n-1)$, *то равенство нулю всех обычных произведений Уайтхеда в* $\pi_*^Q(X)$ *равносильно конечности порядка всех* k*-инвариантов.*

3.10. Следствие 5. *Пусть* Y — *линейно связное пространство. Если определены все операции Масси в* $\pi_*^Q(X)$, *то гомоморфизм надстройки* $S\colon [Y, X_0] \to [SY, SX_0]$ *инъективен.*

Это следствие обобщает теорему 2.5 из [17] и доказывается по той же схеме.

4. Приложение. Пусть A — дифференциальная ассоциативная градуированная алгебра. Операция коммутатирования $ab-(-1)^{|ab|}ba$ определяет на A структуру Z-градуированной супералгебры Ли A_L. В статье [18] Ф. Д. Вильямс ввел высшие операции в гомологиях C_L, где C — алгебра сингулярных цепей на H-пространстве. Наша цель сравнить операции Масси, определенные тем же способом, и операции из $\pi_*^Q(X)$, которые мы назовем W-операциями.

4.1. Определение 1. Пусть $(x_i)_{i=1}^n$ — набор однородных элементов из $H(C_L)$. Говорят, что определена *n-местная* W-*операция* $\langle x_1, \dots, x_n\rangle_W$, если для любого упорядоченного набора $i_j \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant k$ существуют однородные элементы $y_{(i_j)} \in C_L$ такие, что y_i — представители x_i и для $k<n$

$$dy_{i_1\dots i_k} = \tilde{y}_{(i_j)},$$

где $\tilde{y}_{(i_j)} = \sum y_{s_1\dots s_p} y_{t_1\dots t_q} \cdot (-1)^{\delta(s_1,\dots,s_p,t_1,\dots,t_q)}$.

Здесь сумма берется по всем попарным упорядоченным разбиениям $s_1,\dots,s_p$ и $t_1,\dots,t_q$ набора $i_1,\dots,i_k$, а $\delta(s_1,\dots,s_p,t_1,\dots,t_q)$ равно четности подстановки $\pi\left((i_j)\right) = (s_1\dots s_p\, t_1\dots t_q)$ плюс $(q-1)(1+|y_{s_1\dots s_p}|)$ плюс всевозможные суммы чисел $|y_{s_\alpha}|\cdot|y_{t_\beta}|$, где $t_\beta < s_\alpha$.

Элементы $(y_{i_1\dots i_k})_{k=1}^{n-1}$ называются *определяющей системой операции* $\langle x_1,\dots$ $\dots, x_n\rangle_W$. Элемент $y_{1\dots n}$ является циклом, и его класс гомологии называется *значением этой операции*. Через $\langle x_1,\dots,x_n\rangle_W$ обозначим множество всех таких значений.

Заметим, что сумма четностей подстановок π и $(ij)\mapsto(t_1\dots t_q s_1\dots s_p)$ сравнима с произведением pq ([1]). Отсюда по лемме 6 имеем:

$$\delta(s_1,\dots,s_p,t_1,\dots,t_q) \equiv \delta(t_1,\dots,t_q,s_1,\dots,s_p)+|y_{s_1\dots s_p}|\cdot|y_{t_1\dots t_q}|.$$

Следовательно, в определении $\tilde{y}_{i_1\dots i_k}$ произведение элементов из C можно заменить скобкой в C_L, если производить суммирование только по регулярным разбиениям.

С помощью такого модифицированного разбиения распространим определение W-операций на произвольную дифференциальную супералгебру Ли L.

4.2. Предложение 5. *Пусть* $x_1,\dots,x_n \in H(L)$. *Система* $(y_{(i_j)})$ *является определяющей для операции Масси* $\langle x_1,\dots,x_n\rangle$, *если и только если система* $\left(y_{(i_j)}\cdot(-1)^{\gamma((i_j))}\right)$, *где* $\gamma\left((i_j)\right) = \sum_{j=1}^{k-1}(k-j)(|x_j|+1)$, *является определяющей для операции* $\langle x_1,\dots,x_n\rangle_W$. *Кроме того,* $\langle x_1,\dots,x_n\rangle = (-1)^{\gamma(1,\dots,n)}\langle x_1,\dots,x_n\rangle_W$.

Достаточно проверить, что для любого попарного упорядоченного разбиения $s_1,\dots,s_p$ и $t_1,\dots,t_q$ набора $i_1,\dots,i_k$ имеет место

$$\gamma(i_1,\dots,i_k)+\gamma(s_1,\dots,s_p)+\gamma(t_1,\dots,t_q)+\delta(s_1,\dots,s_p,t_1,\dots,t_q) \equiv$$
$$\equiv 1+|y_{s_1\dots s_p}|+\varepsilon(s_1,\dots,s_p,t_1,\dots,t_q).$$

([1]) Все сравнения понимаются по модулю 2.

(Здесь под $|y_{s_1\ldots s_p}|$ понимается сумма из леммы 6, которая не зависит от существования $y_{s_1\ldots s_p}$.)

По лемме 6

$$(q-1)(1+|y_{s_1\ldots s_p}|) \equiv 1+|y_{s_1\ldots s_p}|+q(|y_{s_1}|+\ldots+|y_{s_p}|)+qr.$$

Кроме того,

$$\frac{(p-1)p}{2}+\frac{(q-1)q}{2}+\frac{k(k-1)}{2} \equiv qr.$$

Поэтому левая часть искомого сравнения сравнима с

$$1+|y_{s_1\ldots s_p}|+\sum_{\alpha=1}^{p}(k-i_\alpha+p-\alpha+q)|y_{i_\alpha}|+\sum_{\beta=1}^{q}(k-j_\beta+q-\beta)|y_{j_\beta}|+$$
$$+\sum_{j_\beta<i_\alpha}|y_{i_\alpha}|\cdot|y_{j_\beta}|+\operatorname{sgn}\pi \equiv$$
$$\equiv 1+|y_{s_1\ldots s_p}|+\sum_{j_\beta<i_\alpha}|y_{i_\alpha}|\cdot|y_{j_\beta}|+\sum_{\alpha=1}^{p}(i_\alpha-\alpha)|y_{i_\alpha}|+\sum_{\beta=1}^{q}(p+\beta-j_\beta)|y_{j_\beta}|.$$

Легко убедиться, что полученное выражение равно правой части искомого сравнения.

Примечание при корректуре. Результаты этой статьи изложены в одноименной заметке автора (Функциональный анализ и его приложения 12 (1978), n°4, стр. 91–92). После сдачи этой заметки в печать появились статьи, содержащие часть результатов параграфа 3, полученных другими методами:

C. Allday, Houston Journal of Mathematics 3 (1977), p. 301–308;

P. Andrews and M. Arkowitz, Canadian Journal of Mathematics 30 (1978), n° 5, p. 961–982.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. F. Adams, *On the cobar construction*, Colloque de topologie algébrique, Louvain 1956.

[2] C. Allday, *Rational Whitehead products and a spectral sequence of Quillen*, Pacific Journal of Mathematics 46 (1973), p. 313–323.

[3] M. Arkowitz and C. R. Curjel, *The Hurewicz homomorphism and finite homotopy invariants*, Transactions of the American Mathematical Society 110 (1964), p. 538–551.

[4] —, —, *Zum Begriff des H-Raumes* mod *p*, Archiv der Mathematik (Basel) 16 (1965), p. 186–190.

[5] E. H. Brown, Jr., *Twisted tensor products. I*, Annals of Mathematics 69 (1959), p. 223–246.

[6] M. Dyer, *Rational homology and Whitehead products*, Pacific Journal of Mathematics 40 (1972), p. 59–71.

[7] А. Д. Гаврилов, *Эффективная вычислимость рационального гомотопического типа*, Известия Академии Наук СССР 40 (1976), стр. 1308–1331.

[8] V. K. A. M. Guggenheim and J. P. May, *On the theory and applications of differential torsion products*, Memoires of the American Mathematical Society 142 (1974).

[9] D. W. Kahn, *The spectral sequence of a Postnikov system*, Commentarii Mathematici Helvetici 40 (1966), p. 196–198.

[10] J. P. May, *The cohomology of augmented algebras and generalised Massey products for DGA-algebras*, Transactions of the American Mathematical Society 122 (1966), p. 334–341.

[11] —, *Matric Massey products*, Journal of Algebra 12 (1969), p. 533–568.

[12] J. Milnor and J. C. Moore, *On the structure of Hopf algebras*, Annals of Mathematics 81 (1965), p. 211–264.

[13] G. J. Porter, *Higher order Whitehead products*, Topology 3 (1965), p. 123–135.

[14] D. Quillen, *Rational homotopy theory*, Annals of Mathematics 90 (1969), p. 205–295.

[15] В. С. Ретах, *Операции Масси в супералгебрах Ли и деформации комплексно-аналитических алгебр*, Функциональный анализ и его приложения 11 (1977), стр. 88–89.

[16] L. Smith, *Lectures on the Eilenberg-Moore sequence*, Lecture Notes in Mathematics 134, Springer-Verlag, Berlin 1970.

[17] G. H. Toomer, *The kernel of the rationalized Freudenthal suspension homomorphism*, Journal of Pure and Applied Algebra 6 (1975), p. 305–311.

[18] F. D. Williams, *Higher homotopy-commutativity and extension of maps*, Proceedings of the American Mathematical Society 26 (1970), p. 664–670.

[19] —, *Higher Samelson products*, Journal of Pure and Applied Algebra 2 (1972), p. 249–260.

Reçu par la Rédaction le 1.07.1978