ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XX (1968)

Les fonctions univalentes, p-symétriques et bornées dans le cercle unité

par Z. J. JAKUBOWSKI (Łódź)

Introduction. Désignons par p un nombre naturel quelconque fixé, par S_p la famille des fonctions holomorphes, univalentes et p-symétriques dans le cercle $|z| < 1$, de la forme

$$f(z) = a_1 z + a_{p+1} z^{p+1} + a_{2p+1} z^{2p+1} + \dots, \tag{1}$$

bornées au sens de Löwner, c'est-à-dire satisfaisant à la condition $|f(z)| < 1$ pour $|z| < 1$. Sans nuire à la généralité des raisonnements on peut admettre que $f(0) = a_1 > 0$. Soit $z \neq 0$ un point quelconque fixé du cercle unité. Posons

$$r = |z|, \quad v = |f(z)|, \quad v' = |f'(z)|, \quad \dots, \quad v^{(n)} = |f^{(n)}(z)|. \tag{2}$$

Les nombres $a_1, r, v, \dots, v^{(n)}$ satisfont aux inégalités:

$$0 < a_1 \leqslant 1, \quad 0 < v \leqslant r < 1, \quad 0 < v', \quad 0 \leqslant v'', \quad \dots, \quad 0 \leqslant v^{(n)};$$

en particulier, si $a_1 = 1$ ou $v = r$, on a $f(z) = z$, donc $v' = 1, v'' = \dots = v^{(n)} = 0$.

L'établissement de relations non triviales entre les grandeurs $a_1, r, v, \dots, v^{(n)}$ semble être un problème intéressant. Le présent travail a pour objet l'étude du cas $n = 1$ et constitue une extension des recherches précédentes de l'auteur [2].

Dans la première partie du travail nous utilisons l'équation de Löwner pour les fonctions p-symétriques [3], [1], pour établir deux inégalités fondamentales liant les nombres a_1, r, v, respectivement r, v, v'. De la seconde d'elles, en éliminant v, nous obtiendrons une limitation supérieure de v' pour r donné. Ensuite, en admettant successivement que les couples de nombres: 1) r, v; 2) r, v'; 3) a_1, r; 4) a_1, v et 5) v, v' sont donnés, leurs éléments étant des nombres quelconques qui satisfont aux conditions

$$0 < a_1 \leqslant 1, \quad 0 < v \leqslant r < 1, \quad 0 < v',$$

nous obtiendrons aux §§ 3-7 des limitations des deux grandeurs restantes d'entre les quatre a_1, r, v et v'. La méthode que nous appliquerons ne permettra pourtant pas d'obtenir des limitations exactes dans tous les cas considérés. Ainsi, par exemple, étant donnés les couples a_1 et r ou a_1 et v, les limitations inférieures de v' seront définitives, tandis que les limitations supérieures ne seront valables que pour certaines valeurs des données admissibles. Pour les autres valeurs, les limitations ne seront pas exactes.

Dans la seconde partie du travail (§ 8) nous résoudrons un problème isopérimétrique restant en étroit rapport avec l'équation de Löwner. En nous appuyant sur les résultats obtenus nous trouverons au § 10 de ce travail une limitation supérieure du module de la dérivée pour des valeurs données quelconques de a_1 et r.

Dans un travail ultérieur nous nous proposons d'établir une limitation exacte de la fonctionnelle v' en fonction de a_1 et v et aussi d'étendre notre étude à certaines autres classes de fonctions.

Certaines relations entre les grandeurs a_1, r, v, v' dans la famille des fonctions 1-symétriques bornées ont été étudiées par R. Robinson [4]. En posant dans les résultats de notre travail $p = 1$ nous retrouvons les résultats correspondants de Robinson.

§ 1. Inégalités fondamentales (I). Désignons par S_p^* la sous-classe des fonctions $w = f(z)$ de la famille S_p qui représentent le cercle unité sur le cercle $|w| < 1$ entaillé suivant un nombre fini d'arcs de Jordan. Aux fonctions de la classe S_p^* on peut appliquer le théorème de K. Löwner [3] généralisé par J. Bazylewicz [1]. En vertu de ce théorème il existe pour toute fonction $f(z) \epsilon S_p^*$ une fonction $k(t)$, $|k(t)| = 1$, continue par intervalles dans l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant t_0 = -p\log f'(0)$ et telle que la solution $f(z, t)$ de l'équation de Löwner

$$p\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = -f(z,t)\frac{1+k(t)f^p(z,t)}{1-k(t)f^p(z,t)} \tag{1.1}$$

avec la condition initiale

$$f(z, 0) = z \tag{1.2}$$

prend pour $t = t_0$ la valeur

$$f(z, t_0) = f(z) . \tag{1.3}$$

La fonction $f(z, t)$ est holomorphe et univalente dans le cercle $|z| < 1$ pour tout t fixé ($0 \leqslant t \leqslant t_0$) et satisfait aux conditions: $|f(z, t)| < 1$ lorsque $|z| < 1$, $f(0, t) = 0$ et $f'_z(0, t) = e^{-t/p}$.

Pour toute fonction $k(t)$, $|k(t)| = 1$, continue par intervalles dans l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant t_0$ il existe une solution $f(z, t)$ de l'équation (1.1) avec la condition initiale (1.2) telle que $f(z, t_0) \epsilon S_p$; par conséquent, en tenant compte du fait que la sous-classe S_p^* est dense dans la famille S_p, il suffira dans la suite d'étudier les fonctions de la forme $f(z, t_0)$.

Come $f_z'(0, t) = e^{-t/p}$, on a, en vertu de (1) et (1.3),

$$a_1 = e^{-t_0/p}\,. \tag{1.4}$$

D'autre part, l'équation (1.1) donne

$$p\frac{\partial}{\partial t}\log|f(z,t)| = -\frac{1-|f(z,t)|^{2p}}{|1-k(t)f^p(z,t)|^2}, \tag{1.5}$$

$$p\frac{\partial}{\partial t}\arg f(z,t) = -2\,\frac{\operatorname{im}\{k(t)f^p(z,t)\}}{|1-k(t)f^p(z,t)|^2}. \tag{1.6}$$

Le second membre de l'équation (1.5) est négatif ($|f(z,t)| < 1$), donc $s = |f(z,t)|$ est, pour z fixé, une fonction décroissante de t; de (2), (1.2) et (1.3) il résulte que si t croit de 0 à t_0, s décroit de r à v. On peut donc considérer s comme variable indépendante à valeurs dans l'intervalle $\langle v, r\rangle$ et t comme fonction de cette variable.

Posons ensuite

$$g(s) = k(t)\frac{f^p(z,t)}{|f(z,t)|^p} \tag{1.7}$$

et

$$h(s) = \frac{|1-s^p g(s)|^2}{1-s^{2p}}\,. \tag{1.8}$$

Des propriétés des fonctions $k(t)$ et $f(z, t)$ il résulte que $g(s)$ est une fonction définie et continue dans l'intervalle $\langle v, r\rangle$ à l'exception d'un nombre fini de points de discontinuité de première espèce. En vertu de la définition (1.8) on constate que la fonction $h(s)$ aura aussi les mêmes propriétés. De plus, $|g(s)| = 1$ et par suite la fonction $h(s)$ satisfait à l'inégalité

$$\frac{1-s^p}{1+s^p} \leqslant h(s) \leqslant \frac{1+s^p}{1-s^p}, \qquad v \leqslant s \leqslant r\,. \tag{1.9}$$

Avec les notations admises la formule (1.5) peut être mise sous la forme

$$p\frac{ds}{dt} = -sh^{-1}(s)\,. \tag{1.10}$$

On tire de là

$$t = p\int_s^r h(x)\frac{dx}{x}, \tag{1.11}$$

et, en particulier,

$$t_0 = p\int_v^r h(x)\frac{dx}{x}\,. \tag{1.12}$$

Si maintenant $g(s)$ est une fonction donnée quelconque, continue par intervalles dans l'intervalle $\langle v, r\rangle$, $|g(s)| = 1$, on obtiendra de (1.8) la fonction $h(s)$, aussi continue par intervalles. En outre, la relation (1.11) définit s comme fonction de t, $0 \leqslant t \leqslant t_0$, donc (1.7) permet de déterminer $k(t)f^p(z, t)$. En mettant ensuite l'expression obtenue dans l'équation (1.6), on déterminera $\arg f(z, t)$ et, par conséquent, aussi la fonction $f(z, t)$, où $f(z, 0) = z$. La fonction $k(t)$, $|k(t)| = 1$, sera ainsi univoquement définie et elle sera continue par intervalles pour $0 \leqslant t \leqslant t_0$.

Si $h(s)$ est une fonction donnée quelconque continue par intervalles et satisfaisant à la condition (1.9), on peut évidemment obtenir de (1.8) la fonction $g(s)$ et ensuite $k(t)$ et $f(z, t)$ et, par conséquent, une fonction de la forme (1.3) appartenant à la classe S_p.

On voit aisément que si $f(z, t)$ est une fonction continue, holomorphe par rapport à z pour tout t fixé de l'intervalle $\langle 0, t_0\rangle$ et telle que $f'_z(z, t)$ est une fonction continue, alors les fonctions $f''_{zt}(z, t)$ et $f''_{tz}(z, t)$ existent et sont égales.

De l'équation (1.1) nous tirons donc

$$p\frac{\partial f'_z(z, t)}{\partial t} = f'_z(z, t)\frac{k^2(t)f^{2p}(z, t) - 2pk(t)f^p(z, t) - 1}{[1 - k(t)f^p(z, t)]^2},$$

d'où

$$p\frac{\partial}{\partial t}\log|f'_z(z, t)| = \operatorname{re}\left\{\frac{k^2(t)f^{2p}(z, t) - 2pk(t)f^p(z, t) - 1}{[1 - k(t)f^p(z, t)]^2}\right\},$$

donc

$$p\frac{\partial}{\partial t}\log|f'_z(z, t)| = -p\frac{\left(1 - |f(z, t)|^{2p}\right)^2}{|1 - k(t)f^p(z, t)|^4} + \frac{(p+1)|f(z, t)|^{2p} + p - 1}{|1 - k(t)f^p(z, t)|^2}.$$

Avec les notations admises (1.7) et (1.8) nous déduisons donc de la relation (1.10)

$$d\log|f'_z(z, t)| = \left(\frac{p}{h(s)} - \frac{(p+1)s^{2p} + p - 1}{1 - s^{2p}}\right)\frac{ds}{s}. \tag{1.13}$$

En intégrant les deux membres de l'équation (1.13) on obtient

$$\log|f'_z(z, t_0)| = -p\int_v^r h^{-1}(s)\frac{ds}{s} + \int_v^r \frac{(p+1)s^{2p} + p - 1}{s(1 - s^{2p})}ds.$$

Finalement, en tenant compte de (2) et (1.3), on a

$$v' = \frac{r^{p-1}(1 - v^{2p})}{v^{p-1}(1 - r^{2p})}e^{-R}, \tag{1.14}$$

où

$$R = p\int_v^r h^{-1}(s)\frac{ds}{s}. \tag{1.15}$$

Remarquons ensuite que la relation (1.12) et l'inégalité (1.9) entraînent l'inégalité

$$p\int_v^r \frac{1-s^p}{1+s^p}\frac{ds}{s} \leqslant t_0 \leqslant p\int_v^r \frac{1+s^p}{1-s^p}\frac{ds}{s},$$

d'où il vient, en intégrant,

$$\log\frac{u_1(r)}{u_1(v)} \leqslant \frac{t_0}{p} \leqslant \log\frac{u_2(r)}{u_2(v)}, \tag{1.16}$$

où

$$u_1(x) = \frac{x}{(1+x^p)^{2/p}}, \qquad u_2(x) = \frac{x}{(1-x^p)^{2/p}}. \tag{1.17}$$

Par conséquent, avec (1.4), on obtient

$$\frac{u_2(v)}{u_2(r)} \leqslant a_1 \leqslant \frac{u_1(v)}{u_1(r)}. \tag{1.18}$$

D'une façon analogue on trouve, en tenant compte de (1.15) et (1.9) l'inégalité

$$p\int_v^r \frac{1-s^p}{1+s^p}\frac{ds}{s} \leqslant R \leqslant p\int_v^r \frac{1+s^p}{1-s^p}\frac{ds}{s},$$

d'où

$$\log\frac{u_1(r)}{u_1(v)} \leqslant \frac{R}{p} \leqslant \log\frac{u_2(r)}{u_2(v)}. \tag{1.19}$$

En tenant compte de (1.17) on déduit de (1.14) la relation

$$\frac{v}{r}\frac{u_3(r)}{u_3(v)} \leqslant v' \leqslant \frac{v}{r}\frac{u_3(v)}{u_3(r)} \tag{1.20}$$

où

$$u_3(x) = \frac{1-x^p}{1+x^p}. \tag{1.21}$$

Les inégalités (1.18) et (1.20) ont été établies en admetant que $v < r$. Elles restent pourtant vraies lorsque $v = r$, car on a alors $a_1 = v' = 1$.

Nous avons ainsi démontré le

THÉORÈME 1. *Si f est une fonction quelconque de la famille S_p, les grandeurs $a_1 = f'(0)$, $r = |z|$, $v = |f(z)|$ vérifient l'inégalité* (1.18) *et les grandeurs r, v et $v' = |f'(z)|$ vérifient l'inégalité* (1.20).

Remarquons que pour la fonction $w = f^*(z)$, de la classe S_p, définie par l'équation

$$\frac{w}{(1-e^{i\alpha}w^p)^{2/p}} = \frac{a_1 z}{(1-e^{i\alpha}z^p)^{2/p}} \tag{1.22}$$

les formules (1.18) *et* (1.20) *donnent l'égalité.*

§ 2. La borne supérieure du module de la dérivée pour r donné.

1. Nous allons d'abord démontrer le

THÉORÈME 2. *Si f est une fonction quelconque de la famille S_p, on a, pour tout $r = |z|$ fixé, les limitations exactes suivantes:*

$$v' = |f'(z)| \leqslant \begin{cases} 1 & si \quad 0 < r \leqslant r_0\,, \\ \dfrac{r_0}{r}\dfrac{u_3(r_0)}{u_3(r)} & si \quad r < r < 1 \end{cases} \tag{2.1}$$

où

$$r_0 = \sqrt[p]{\sqrt{p^2+1}-p} \tag{2.2}$$

et où la fonction $u_3(x)$ est définie par la formule (1.21).

Démonstration. Pour r donné, $0 < r < 1$, on tire de l'inégalité (1.20) la condition

$$v' \leqslant \frac{1}{ru_3(r)} \sup_{0<v<r} \{vu_3(v)\}\,. \tag{2.3}$$

Comme $xu_3(x)$ est une fonction croissante dans l'intervalle $(0, r_0)$ et décroissante dans l'intervalle $(r_0, 1)$, où r_0 est défini par la formule (2.2), on a

$$\sup_{0<v<r} \{vu_3(v)\} = \begin{cases} ru_3(r) & \text{si} \quad 0 < r \leqslant r_0\,, \\ r_0u_3(r_0) & \text{si} \quad r_0 < r < 1\,. \end{cases}$$

De là et de (2.3) résulte (2.1).

La limitation (2.1) est exacte, car l'égalité est réalisée dans le premier cas par la fonction identité, dans le second par la fonction (1.22) où a_1 est choisi de telle manière que l'on ait $v = r_0$.

2. Remarquons qu'il n'est pas possible de déduire de l'inégalité (1.20) d'autres relations non banales liant seulement deux d'entre les trois quantités v', r, v. En effet, en procédant de même que dans la démonstration du théorème 2, on tire de (1.20) les relations

$$\frac{u_3(r)}{r} \inf_{0<v<r} \frac{v}{u_3(v)} \leqslant v'\,,$$

$$\frac{v}{u_3(v)} \inf_{v<r<1} \frac{u_3(r)}{r} \leqslant v' \leqslant vu_3(v) \sup_{v<r<1} \left\{\frac{1}{ru_3(r)}\right\},$$

$$\frac{vu_3(r)}{ru_3(v)} \leqslant \frac{vu_3(v)}{ru_3(r)}\,,$$

d'où, en tenant compte de (1.21), on obtient

$$0 \leqslant v'\,, \quad 0 \leqslant v' \leqslant \infty\,, \quad v \leqslant r\,.$$

En procédant de même dans le cas de l'inégalité (1.18) on aura

$$\frac{1}{u_2(r)} \inf_{0<v<r} u_2(v) \leqslant a_1 \leqslant \frac{1}{u_1(r)} \sup_{0<v<r} u_1(v) ,$$

$$u_2(v) \inf_{v<r<1} \frac{1}{u_2(r)} \leqslant a_1 \leqslant u_1(v) \sup_{v<r<1} \frac{1}{u_1(r)} ,$$

$$\frac{u_2(v)}{u_2(r)} \leqslant \frac{u_1(v)}{u_1(r)} ,$$

d'où

$$0 \leqslant a_1 \leqslant 1 , \quad v \leqslant r .$$

§ 3. Les bornes des fonctionnelles a_1 et v' (r, v donnés). Admettons maintenant que r et v sont deux nombres quelconques donnés (¹).

Alors l'inegalité (1.18) fournit les limitations inférieure et supérieure du coefficient $a_1 = f'(0)$ pour les fonctions de la classe S_p de module v fixé, $v = |f(z)|$, $|z| = r$. D'une façon analogue, la condition (1.20) détermine les bornes inférieure et supérieure du module de la dérivée lorsque r et v sont donnés.

Il résulte de (1.22) que ces limitations sont exactes.

§ 4. Limitations inférieure et supérieure de v et a_1 (r, v' donnés).

1. Supposons donnés r et v' (¹). Alors l'inégalité (1.20) donne pour v les limitations suivantes:

$$\frac{v}{u_3(v)} \leqslant v' \frac{r}{u_3(r)} \tag{4.1}$$

et

$$v u_3(v) \geqslant v' r u_3(r) . \tag{4.2}$$

En profitant des inégalités (4.1) et (4.2) nous allons limiter v au moyen de r et v'.

Dans ce but remarquons qu'il suffit, en vertu du théorème 2, de considérer dans la suite les couples (r, v') qui appartiennent à l'ensemble

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 ,$$

où

$$A_1 = \left\{(r, v'):\ r_0 < r < 1 ,\ 1 \leqslant v' \leqslant \frac{r_0}{r} \frac{u_3(r_0)}{u_3(r)}\right\},$$

$$A_2 = \{(r, v'):\ 0 < r \leqslant r_0 ,\ v' = 1\} ,$$

$$A_3 = \{(r, v'):\ 0 < r < 1 ,\ 0 < v' < 1\} .$$

(¹) Satisfaisant évidemment aux conditions $0 < v \leqslant r < 1$. Dans toute la suite, nous maintiendrons en vigueur, sans en faire mention, les conditions respectives $0 < a_1 \leqslant 1$, $0 < v \leqslant r < 1$, $v' > 0$.

Nous étudierons trois cas:

1° $(r, v') \in A_1$. Alors l'inégalité (4.1) est vérifiée pour tous les $0 < v \leqslant r$, puisque la fonction $x/u_3(x)$ est croissante dans l'intervalle $(0, 1)$ et $v' \geqslant 1$, donc

$$\sup_{0<v\leqslant r} \frac{v}{u_3(v)} = \frac{r}{u_3(r)} \leqslant v' \frac{r}{u_3(r)} .$$

D'autre part, $xu_3(x)$ est une fonction croissante dans l'intervalle $(0, r_0)$ et décroissante dans l'intervalle $(r_0, 1)$. Comme $r_0 u_3(r_0) \geqslant v' r u_3(r)$, on obtient de l'inégalité (4.2)

$$v_1 \leqslant v \leqslant v_2 , \tag{4.3}$$

où $0 < v_1 \leqslant r_0$, $r_0 \leqslant v_2 \leqslant r$ sont racines de l'équation

$$vu_3(v) = v' r u_3(r) . \tag{4.4}$$

2° $(r, v') \in A_2$. Alors (4.1) et (4.2) donnent

$$\frac{v}{u_3(v)} \leqslant \frac{r}{u_3(r)} , \qquad vu_3(v) \geqslant ru_3(r) .$$

D'autre part, $r < r_0$ et les deux fonctions $x/u_3(x)$ et $xu_3(x)$ sont croissantes dans l'intervalle $(0, r_0)$; on a donc dans ce cas

$$v = r . \tag{4.5}$$

3° $(r, v') \in A_3$. Dans ce cas l'inégalité (4.1) a lieu pour tous les $0 < v < v_4$, où v_4, $0 < v_4 < r$, est racine de l'équation

$$\frac{v}{u_3(v)} = v' \frac{r}{u_3(r)} \tag{4.6}$$

et l'inégalité (4.2) a lieu pour $v_3 < v < r$, où v_3, $0 < v_3 < r_0$ désigne la racine de l'équation (4.4).

Remarquons que l'on a, par définition des nombres v_3 et v_4,

$$\frac{v_4}{v_3} = \frac{1-v_4^p}{1-r^p} \cdot \frac{1+r^p}{1+v_4^p} \cdot \frac{1-v_3^p}{1-r^p} \cdot \frac{1+r^p}{1+v_3^p} > 1 ,$$

d'où $v_4 > v_3$. Les deux inégalités (4.1) et (4.2) sont donc vérifiées pour

$$v_3 \leqslant v \leqslant v_4 . \tag{4.7}$$

Posons

$$v_n = \begin{cases} v_1 \\ r \\ v_3 \end{cases} \qquad v_N = \begin{cases} v_2 & \text{si} \quad (r, v') \in A_1 , \\ r & \text{si} \quad (r, v') \in A_2 , \\ v_4 & \text{si} \quad (r, v') \in A_3 , \end{cases} \tag{4.8}$$

où v_1, v_2, v_3, v_4 sont respectivement racines des équations (4.4), (4.6).

En rapprochant (4.3), (4.5), (4.7) et (4.8) on obtient donc le

THÉORÈME 3. *Si f est une fonction quelconque de la famille S_p satisfaisant à la condition $|f'(z)| = v'$, où v' et $r = |z|$ sont des nombres donnés quelconques, on a la limitation exacte*

$$v_n \leqslant v = |f(z)| \leqslant v_N , \tag{4.9}$$

v_n et v_N étant définis par (4.8).

La fonction extrémale est respectivement la fonction $w = f^*(z)$ (v. (1.22)) *ou la fonction identité.*

2. Si r et v' sont donnés, il résulte des inégalités (1.18) et (4.9) que le coefficient $a_1 = f'(0)$ de la fonction qui vérifie la condition $|f'(z)| = v'$ pour $|z| = r$ satisfait à l'inégalité:

$$u_2^{-1}(r) \min_{v_n \leqslant v \leqslant v_N} u_2(v) \leqslant a_1 \leqslant u_1^{-1}(r) \max_{v_n \leqslant v \leqslant v_N} u_1(v) .$$

Comme les deux fonctions $u_1(x)$ et $u_2(x)$ sont croissantes dans l'intervalle $(0, r)$, on obtient ainsi la limitation

$$\frac{u_2(v_n)}{u_2(r)} \leqslant a_1 \leqslant \frac{u_1(v_N)}{u_1(r)} \tag{4.10}$$

où v_n et v_N sont définis par les formules (4.8), les fonctions $u_1(x)$ et $u_2(x)$ par les formules (1.17).

La limitation inférieure (4.10) est exacte, la limitation supérieure l'est seulement pour les couples $(r, v') \in A_2 \cup A_3$.

§ 5. Bornes de la fonctionnelle v; limitation (partielle) de v'. Donnés: a_1, r.

1. Admettons maintenant que a_1 et r sont des nombres donnés quelconques. Alors l'inégalité (1.18) fournit aussi certaines limitations pour v. En effet, le module de la fonction v doit vérifier les conditions

$$u_1(v) \geqslant a_1 u_1(r) \tag{5.1}$$

et

$$u_2(v) \leqslant a_1 u_2(r) , \tag{5.2}$$

où $u_1(x)$, $u_2(x)$ sont définies par les formules (1.17).

Comme $u_1(x)$ est une fonction croissante dans l'intervalle $(0, r)$ et $0 < a_1 \leqslant 1$, l'inégalité (5.1) a lieu pour $v_m \leqslant v \leqslant r$, où $v_m > 0$ désigne la racine de l'équation

$$u_1(v_m) = a_1 u_1(r) . \tag{5.3}$$

D'autre part, $u_2(x)$ est aussi une fonction croissante dans l'intervalle $(0, r)$, donc l'inégalité (5.2) est vérifiée quand $0 < v \leqslant v_M$, où $v_M \leqslant r$ désigne la racine de l'équation

$$u_2(v_M) = a_1 u_2(r) . \tag{5.4}$$

Mais, en vertu de (5.3), (5.4) et (1.16), on a

$$\frac{v_M}{v_m} = \left(\frac{1-v_M^p}{1-r^p}\right)^{2/p} \left(\frac{1+r^p}{1+v_m^p}\right)^{2/p} \geqslant 1 ,$$

donc $v_M \geqslant v_m$. On obtient ainsi le

THÉORÈME 4. *Si f est une fonction quelconque de la classe S_p, satisfaisant à la condition $f'(0) = a_1$, et si a_1 et $r = |z|$ sont des nombres quelconques fixés, on a la limitation exacte suivante:*

$$v_m \leqslant v = |f(z)| \leqslant v_M, \tag{5.5}$$

où v_m et v_M sont respectivement racines des équations (5.3) *et* (5.4). *La fonction extrémale est la fonction $w = f^*(z)$ ou la fonction $w = z$.*

2. Si a_1 et r sont donnés, il résulte des inégalités (1.20) et (5.5) que

$$\frac{u_3(r)}{r} \min_{v_m \leqslant v \leqslant v_M} \left\{\frac{v}{u_3(v)}\right\} \leqslant v' \leqslant \frac{1}{ru_3(r)} \max_{v_m \leqslant v \leqslant v_M} \{vu_3(v)\} . \tag{5.6}$$

Comme $xu_3^{-1}(x)$ est une fonction croissante dans l'intervalle $(0, 1)$, on obtient immédiatement de (5.6) le théorème suivant fournissant la limitation inférieure du module de la dérivée:

THÉORÈME 5. *Si f est une fonction quelconque de la classe S_p vérifiant la condition $f'(0) = a_1$ et si a_1 et $r = |z|$ sont des nombres quelconques fixés, on a*

$$v' = |f'(z)| \geqslant \frac{u_3(r)\, v_m}{ru_3(v_m)} \tag{5.7}$$

où $0 < v_m \leqslant r$ est racine de l'équation (5.3). *L'égalité est réalisée par la fonction $w = f^*(z)$ (voir* (1.22)) *ou par la fonction identité.*

Comme la fonction $xu_3(x)$ est croissante dans l'intervalle $(0, r_0)$ et décroissante dans l'intervalle $(r_0, 1)$, on obtient en tenant compte de (5.6)

$$\max_{v_m \leqslant v \leqslant v_M} \{vu_3(v)\} = \begin{cases} v_m u_3(v_m) & \text{si} \quad r_0 < v_m , \\ r_0 u_3(r_0) & \text{si} \quad v_m \leqslant r_0 \leqslant v_M , \\ v_M u_3(v_M) & \text{si} \quad v_M < r_0 , \end{cases} \tag{5.8}$$

où r_0 est défini par la formule (2.2), v_m et v_M sont respectivement racines des équations (5.3) et (5.4).

Soient B_i $(i = 1, 2, 3)$ les ensembles suivants:

$$B_1 = \{(r, a_1)\colon\ r_0 < r < 1 ,\ u_1(r_0)u_1^{-1}(r) < a_1 \leqslant 1\} ,$$

$$B_2 = \{(r, a_1)\colon\ r_0 < r < 1 ,\ u_2(r_0)u_2^{-1}(r) \leqslant a_1 \leqslant u_1(r_0)u_1^{-1}(r)\} ,$$

et

$$B_3 = B_{31} \cup B_{32} ,$$

où

$$B_{31} = \{(r, a_1):\ 0 < r \leqslant r_0\ ,\ 0 < a_1 \leqslant 1\}\ ,$$
$$B_{32} = \{(r, a_1):\ r_0 < r < 1\ ,\ 0 < a_1 < u_2(r_0)u_2^{-1}(r)\}\ .$$

La définition des racines v_m, v_M et du nombre r_0 entraîne

$$\begin{array}{lll} r_0 < v_m & \text{lorsque} & (r, a_1) \in B_1\ , \\ v_m \leqslant r_0 \leqslant v_M & \text{lorsque} & (r, a_1) \in B_2\ , \\ v_M < r_0 & \text{lorsque} & (r, a_1) \in B_3\ , \end{array}$$

en tenant compte de (5.6) et (5.8) on obtient donc l'inégalité

$$v' \leqslant \begin{cases} \dfrac{v_m u_3(v_m)}{r u_3(r)} & \text{si} \quad (r, a_1) \in B_1\ , \\ \dfrac{r_0 u_3(r_0)}{r u_3(r)} & \text{si} \quad (r, a_1) \in B_2\ , \\ \dfrac{v_M u_3(v_M)}{r u_3(r)} & \text{si} \quad (r, a_1) \in B_3\ . \end{cases} \tag{5.9}$$

Seulement la troisième de ces limitations est exacte (voir (5.4), (5.9) et (1.22)). Les bornes supérieures de la fonctionnelle $v' = |f'(z)|$ pour les valeurs de $a_1 = |f'(0)|$ et $r = |z|$ telles que $(r, a_1) \in B_1 \cup B_2$ seront déterminées par une autre méthode dans la suite de ce travail.

§ 6. Intervalles de variation de r et v' en fonction de a_1 et v.

1. Supposons données a_1 et v. Alors l'inégalité (1.18) fournit les limitations suivantes pour r:

$$u_2(r) \geqslant a_1^{-1} u_2(v)\ , \tag{6.1}$$

$$u_1(r) \leqslant a_1^{-1} u_1(v)\ . \tag{6.2}$$

Comme $u_2(x)$ est une fonction croissante dans l'intervalle $(0, 1)$ admettant toutes ses valeurs positives, il résulte de (6.1) que $r_m \leqslant r < 1$, où r_m, $r_m \geqslant v$, est racine de l'équation

$$u_2(r_m) = a_1^{-1} u_2(v)\ . \tag{6.3}$$

Soient C_1 et C_2 les ensembles suivants:

$$C_1 = \{(v, a_1):\ 0 < v < 1\ ,\ 0 < a_1 \leqslant \sqrt[p]{4}\, u_1(v)\}\ ,$$
$$C_2 = \{(v, a_1):\ 0 < v < 1\ ,\ \sqrt[p]{4}\, u_1(v) < a_1 \leqslant 1\}\ .$$

Comme la fonction $u_1(x)$ est croissante dans l'intervalle $(0, 1)$, prenant les valeurs de zéro à $4^{-1/p}$, l'inégalité (6.2) a lieu pour tout $v \leqslant r < 1$ lorsque $(v, a_1) \in C_1$. Si $(v, a_1) \in C_2$, on tire de (6.2) $v \leqslant r \leqslant r_M$, où $r_M < 1$ désigne la racine de l'équation

$$u_1(r_M) = a_1^{-1} u_1(v)\ . \tag{6.4}$$

De (6.3) et (6.4) on obtient aussi $r_m \leqslant r_M$ et, en particulier, $r_m = r_M = v$ lorsque $a_1 = 1$.

Finalement, si la fonction $f \in S_p$ vérifie pour a_1, v donnés les conditions $f'(0) = a_1$, $|f(z)| = v$, alors $r = |z|$ satisfait à l'inégalité

$$r_m \leqslant r \begin{cases} < 1 & \text{si} \quad (v, a_1) \in C_1, \\ \leqslant r_M & \text{si} \quad (v, a_1) \in C_2, \end{cases} \tag{6.5}$$

où r_m et r_M sont respectivement racines des équations (6.3) et (6.4).

2. Dans le cas où a_1 et v sont donnés, on tire de l'inégalité (1.20)

$$vu_3^{-1}(v)\inf_r\{r^{-1}u_3(r)\} \leqslant v' \leqslant vu_3(v)\sup_r\{r^{-1}u_3^{-1}(r)\} \tag{6.6}$$

où r vérifie la condition (6.5).

Donc, si $(v, a_1) \in C_1$, on a $r_m \leqslant r < 1$. Par conséquent

$$\inf_{r_m \leqslant r < 1}\{r^{-1}u_3(r)\} = 0\,, \qquad \sup_{r_m \leqslant r < 1}\{r^{-1}u_3^{-1}(r)\} = \infty$$

et la formule (6.6) ne fournit pas, dans ce cas, de limitation pour v'.

Si $(v, a_1) \in C_2$, on tire de (6.5) $r_m \leqslant r \leqslant r_M$, d'où il vient $\inf_{r_m \leqslant r \leqslant r_M}\{r^{-1}u_3(r)\}$ $= r_M^{-1}u_3(r_M)$. En tenant compte de (6.6) on obtient donc le

THÉORÈME 6. *Pour toute fonction f de la famille S_p vérifiant les conditions $f'(0) = a_1$, $|f(z)| = v$, où $(v, a_1) \in C_2$, on a la limitation exacte suivante:*

$$v' = |f'(z)| \geqslant \frac{vu_3(r_M)}{r_M u_3(v)}. \tag{6.7}$$

D'autre part, la fonction $\big(xu_3(x)\big)^{-1}$ décroît dans l'intervalle $(0, r_0)$ de l'infini à $\big(r_0u_3(r_0)\big)^{-1}$ et croît pour $r_0 < r < 1$ indéfiniment, donc, si $(v, a_1) \in C_2$, on a en vertu de (6.5)

$$\sup_{r_m \leqslant r \leqslant r_M}\big(ru_3(r)\big)^{-1} \tag{6.8}$$

$$= \begin{cases} \big(r_m u_3(r_m)\big)^{-1} & \text{si} \quad r_M \leqslant r_0\,, \\ \max\left[\big(r_m u_3(r_m)\big)^{-1},\ \big(r_M u_3(r_M)\big)^{-1}\right] & \text{si} \quad r_m < r_0 < r_M\,, \\ \big(r_M u_3(r_M)\big)^{-1} & \text{si} \quad r_0 \leqslant r_m\,. \end{cases}$$

Soient D_i $(i = 1, 2, 3)$ les ensembles suivants:

$$D_1 = \{(v, a_1):\ 0 < v < r_0\,,\ u_3(v)u_1^{-1}(r_0) \leqslant a_1 < 1\}\,,$$
$$D_2 = D_{21} \cap D_{22}\,,$$
$$D_3 = D_{22} - (D_1 \cup D_2)\,,$$

où

$$D_{21} = \{(v, a_1):\ 0 < v < r_0\ ,\ u_2(v)u_2^{-1}(r_0) < a_1 < u_1(v)u_1^{-1}(r_0)\}\ ,$$

$$D_{22} = \{(v, a_1):\ 0 < v < 1\ ,\ \sqrt[p]{4}\,u_1(v) < a_1 < 1\}\ .$$

Les définitions des racines r_m, r_M et du nombre r_0 entraînent

$$\begin{array}{lll} r_M \leqslant r_0 & \text{lorsque} & (v, a_1) \in D_1\ , \\ r_m < r_0 < r_M & \text{lorsque} & (v, a_1) \in D_2\ , \\ r_0 \leqslant r_m & \text{lorsque} & (v, a_1) \in D_3\ , \end{array}$$

on a donc, en tenant compte de (6.6) et (6.8),

$$(6.9)\qquad v' \leqslant \begin{cases} \dfrac{vu_3(v)}{r_m u_3(r_m)} & \text{si} \quad (v, a_1) \in D_1\ , \\ vu_3(v)\max\left[\left(r_m u_3(r_m)\right)^{-1}\ ,\ \left(r_M u_3(r_M)\right)^{-1}\right] & \text{si} \quad (v, a_1) \in D_2\ , \\ \dfrac{vu_3(v)}{r_M u_3(r_M)} & \text{si} \quad (v, a_1) \in D_3\ . \end{cases}$$

La limitation (6.9) est exacte lorsque $(v, a_1) \in D_1$. Elle est aussi exacte dans le domaine $D_2' \subset D_2$ dans lequel

$$\max\left[\left(r_m u_3(r_m)\right)^{-1}, \left(r_M u_3(r_M)\right)^{-1}\right] = r_m^{-1}u_3^{-1}(r_m)\ .$$

§ 7. Intervalles de variation de r et a_1 en fonction de v et v'.

1. Soient v et v' des nombres donnés. Nous allons déterminer l'intervalle de variation de r. Comme v et v' sont donnés, on obtient de (1.20) les conditions suivantes pour r:

$$(7.1)\qquad ru_3^{-1}(r) \geqslant \frac{v}{v'}\,u_3^{-1}(v)\ ,$$

$$(7.2)\qquad ru_3(r) \leqslant \frac{v}{v'}\,u_3(v)\ .$$

Considérons la première de ces inégalités. La fonction $xu_3^{-1}(x)$ est croissante dans l'intervalle $(0, 1)$ et on a $r \geqslant v$. Donc, lorsque $v' \geqslant 1$, il vient $ru_3^{-1}(r) \geqslant vu_3^{-1}(v) \geqslant \frac{v}{v'}\,u_3^{-1}(v)$, l'inégalité (7.1) a donc lieu pour tout r, $v \leqslant r < 1$. Si $0 < v' < 1$, l'inégalité (7.1) a lieu pour $r_1 \leqslant r < 1$, où $r = r_1$ $(v < r_1 < 1)$ est racine de l'équation

$$(7.3)\qquad ru_3^{-1}(r) = \frac{v}{v'}\,u_3^{-1}(v)\ .$$

Soient E_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ les ensembles suivants:

$$E_1 = \left\{(v, v'):\ 0 < v < 1\ ,\ 0 < v' \leqslant \frac{vu_3(v)}{r_0 u_3(r_0)}\right\},$$

$$E_2 = \{(v, v'):\ 0 < v < 1\ ,\ v' \geqslant 1\}\ ,$$

$$E_3 = \left\{(v, v'):\ r_0 < v < 1\ ,\ \frac{vu_3(v)}{r_0 u_3(r_0)} < v' < 1\right\},$$

$$E_4 = \left\{(v, v'):\ 0 < v < r_0\ ,\ \frac{vu_3(v)}{r_0 u_3(r_0)} < v' < 1\right\}.$$

Nous allons considérer quatre cas.

1° $(v, v') \in E_1$. Comme la fonction $xu_3(x)$ corît dans l'intervalle $(0, r_0)$ et ensuite décroît jusqu'à zéro lorsque $r_0 < x < 1$, on a dans ce cas

$$ru_3(r) \leqslant r_0 u_3(r_0) \leqslant \frac{v}{v'} u_3(v) \qquad \text{pour tout } v \leqslant r < 1\ .$$

2° $(v, v') \in E_2$. Alors

$$\frac{v}{v'} u_3(v) \leqslant vu_3(v)\ ,$$

donc l'inégalité (7.2) a lieu lorsque $r_2 \leqslant r < 1$, où $r = r_2$ $(v \leqslant r_2 < 1)$ est racine de l'équation

$$ru_3(r) = \frac{v}{v'} u_3(v)\ . \tag{7.4}$$

3° $(v, v') \in E_3$. Alors (7.2) donne $v < r < 1$.

4° $(v, v') \in E_4$. Alors l'équation (7.4) a deux solutions $r = r_3$, $v < r_3 < r_0$, et $r = r_4$, $r_0 < r_4 < 1$, donc l'inégalité (7.2) est vérifiée pour

$$v < r \leqslant r_3 \quad \text{ou} \quad r_4 \leqslant r < 1\ .$$

Finalement, en comparant les solutions des inégalités (7.1) et (7.2) on obtient les intervalles de variation suivants du module de z:

$$\begin{aligned} & r_1 \leqslant r < 1 && \text{si} \quad (v, v') \in E_1 \cup E_3\ ,\\ & r_2 \leqslant r < 1 && \text{si} \quad (v, v') \in E_2\ ,\\ & r_1 \leqslant r \leqslant r_3 \quad \text{ou} \quad r_4 \leqslant r < 1 && \text{si} \quad (v, v') \in E_4\ , \end{aligned} \tag{7.5}$$

où r_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ sont respectivement les racines des équations (7.3) et (7.4).

Donc, si v et v' sont donnés et f est une fonction de la classe S_p satisfaisant en un point z du cercle unité aux conditions $|f(z)| = v$, $|f'(z)| = v'$ alors $r = |z|$ appartient aux intervalles (7.5).

2. Des inégalités (1.18) et (7.5) on déduit aisément la relation

$$a_1 \leqslant u_1(v)\, u_1^{-1}(r_n)\,,$$

où

$$r_n = \begin{cases} r_1 & \text{lorsque} \quad (v, v') \in E_1 \cup E_3 \cup E_4\,, \\ r_2 & \text{lorsque} \quad (v, v') \in E_2 \end{cases}$$

(voir (7.3) et (7.4)). Comme r peut être, dans le cas considéré, arbitrairement proche de l'unité, les inégalités (1.18) et (7.5) donnent $a_1 > 0$ et dans ce cas les inégalités (1.18) et (7.5) ne permettent pas d'obtenir une limitation inférieure du coefficient a_1.

§ 8. Problème isopérimétrique.

1. Admettons que $0 < v < r < 1$ et que t_0 et R sont définis par les formules (1.12) et (1.15), où $h(s)$ est une fonction quelconque admissible, c'est-à-dire définie et continue dans l'intervalle $\langle v, r\rangle$ à l'exception d'un nombre fini de points de discontinuité de première espèce et satisfaisant dans cet intervalle à l'inégalité (1.9). Nous établirons maintenant certaines relations entre les intégrales:

$$t_0 = p \int\limits_v^r h(s)\,\frac{ds}{s}\,, \qquad R = p \int\limits_v^r h^{-1}(s)\,\frac{ds}{s}\,.$$

Dans ce but, considérons les fonctions suivantes:

$$\varphi(x, r, v, p) = p \int\limits_v^x u_3(s)\,\frac{ds}{s} + p \int\limits_x^r u_3(x)\,\frac{ds}{s}\,, \tag{8.1}$$

$$\psi(x, r, v, p) = p \int\limits_x^v u_3^{-1}(s)\,\frac{ds}{s} + p \int\limits_x^r u_3^{-1}(x)\,\frac{ds}{s} \tag{8.2}$$

dans l'intervalle $v \leqslant x \leqslant r$. Comme

$$p \int\limits_v^x u_3(s)\,\frac{ds}{s} = \log\left[\frac{x^p}{v^p}\left(\frac{1+v^p}{1+x^p}\right)^2\right], \qquad p \int\limits_v^x u_3^{-1}(s)\,\frac{ds}{s} = \log\left[\frac{x^p}{v^p}\left(\frac{1-v^p}{1-x^p}\right)^2\right],$$

$$p \int\limits_x^r u_3(x)\,\frac{ds}{s} = u_3(x)\log\frac{r^p}{x^p}\,, \qquad p \int\limits_x^r u_3^{-1}(x)\,\frac{ds}{s} = u_3^{-1}(x)\log\frac{r^p}{x^p}\,,$$

on obtient, en vertu de (8.1), (8.2), (1.17) et (1.21),

$$\varphi(x, r, v, p) = \log\frac{u_1^p(x)}{u_1^p(v)} + u_1(x)\log\frac{r^p}{x^p}\,, \tag{8.3}$$

$$\psi(x, r, v, p) = \log\frac{u_2^p(x)}{u_2^p(v)} + u_2(x)\log\frac{r^p}{x^p}\,. \tag{8.4}$$

En particulier

$$\begin{aligned}\varphi(r,r,v,p) &= \log\frac{u_1^p(r)}{u_1^p(v)}, \quad \varphi(v,r,v,p) = u_3(v)\log\frac{r^p}{v^p},\\ \psi(r,r,v,p) &= \log\frac{u_2^p(r)}{u_2^p(v)}, \quad \psi(v,r,v,p) = u_3^{-1}(v)\log\frac{r^p}{v^p}.\end{aligned} \tag{8.5}$$

En dérivant membre à membre les relations (8.3) et (8.4) par rapport à x on obtient aisément

$$\varphi'_x(x,r,v,p) = -\frac{2p^2}{x}u_1^p(x)\log\frac{r}{x}, \quad \psi'_x(x,r,v,p) = \frac{2p^2}{x}u_2^p(x)\log\frac{r}{x}, \tag{8.6}$$

d'où il résulte que φ est une fonction décroissante dans l'intervalle $v \leqslant x \leqslant r$ et ψ une fonction croissante dans cet intervalle. En outre

$$\varphi(x,r,v,p)-\psi(x,r,v,p) = 2\log\frac{u_1(x)}{u_1(v)} - \frac{4px^p}{1-x^{2p}}\log\frac{r}{x} < 0$$

pour $v \leqslant x \leqslant r$. Donc

$$\varphi(r,r,v,p) < \varphi(v,r,v,p) < \psi(v,r,v,p) < \psi(r,r,v,p). \tag{8.7}$$

Remarquons encore que des formules (8.5), (1.16) et (1.19) il résulte que les intégrales t_0 et R satisfont respectivement aux conditions

$$\varphi(r,r,v,p) \leqslant t_0 \leqslant \psi(r,r,v,p), \tag{8.8}$$

$$\varphi(r,r,v,p) \leqslant R \leqslant \psi(r,r,v,p). \tag{8.9}$$

2. Soit t_0 un nombre arbitrairement fixé de l'intervalle (8.8). Nous allons montrer qu'on a la limitation exacte suivante:

$$R \leqslant \varphi(r,r,v,p)+\psi(r,r,v,p)-t_0. \tag{8.10}$$

Dans ce but, remarquons que pour toute fonction admissible $h(s)$ l'inégalité

$$h(s)+h^{-1}(s) \leqslant u_3(s)+u_3^{-1}(s)$$

est vérifiée (voir (1.9) et (1.21)), donc

$$p\int_v^r h(s)\frac{ds}{s} + p\int_v^r h^{-1}(s)\frac{ds}{s} \leqslant p\int_v^r u_3(s)\frac{ds}{s} + p\int_v^r u_3^{-1}(s)\frac{ds}{s}.$$

Par conséquent, d'accord avec (1.12), (1.15) et en vertu de (8.1) et (8.2), on obtient

$$t_0+R \leqslant \varphi(r,r,v,p)+\psi(r,r,v,p),$$

d'où résulte immédiatement l'inégalité (8.10).

Pour prouver que cette limitation est exacte, considérons la fonction

$$h_x(s) = \begin{cases} u_3^{-1}(s) & \text{pour} \quad v \leqslant s \leqslant x\,, \\ u_3(s) & \text{pour} \quad x \leqslant s \leqslant r\,, \end{cases}$$

où x est un point quelconque, mais fixé. Cette fonction est continue par intervalles et vérifie l'inégalité (1.9). En outre la fonction

$$u(x) = p \int_v^r h_x(s) \frac{ds}{s}$$

s'exprime par la formule

$$u(x) = 2 \log u_2(x) + \log \frac{u_3(r)}{u_3(v)}$$

d'où

$$u(v) = \varphi(r, r, v, p)\,, \qquad u(r) = \psi(r, r, v, p)\,, \qquad u'(x) = \frac{4px^{p-1}}{1-x^{2p}} > 0\,.$$

La fonction $u(x)$ est donc croissante pour $v < x < r$ et admet toute valeur de l'intervalle (8.8). Pour tout nombre fixé t_0 de l'intervalle (8.8) il existe donc exactement une valeur $x = x_0$ satisfaisant à l'équation $u(x) = t_0$. Alors on a pour la fonction $h_{x_0}(s)$

$$t_0 + R = p \int_v^r \big(h_{x_0}(s) + h_{x_0}^{-1}(s)\big) \frac{ds}{s} = \varphi(r, r, v, p) + \psi(r, r, v, p)\,.$$

Pour tout t_0 il existe donc une fonction $h(s)$ qui réalise l'égalité dans (8.10). La limitation (8.10) de l'intégrale R pour t_0 donné est donc exacte.

3. Nous déterminerons maintenant le minimum de l'intégrale R pour t_0 quelconque fixé, en démontrant que l'on a la limitation exacte suivante:

$$R \geqslant \begin{cases} \psi(\alpha, r, v, p) & \text{si} \quad \varphi(r, r, v, p) \leqslant t_0 \leqslant \varphi(v, r, v, p)\,, & (8.11) \\ t_0^{-1}\left(\log \dfrac{r^p}{v^p}\right)^2 & \text{si} \quad \varphi(v, r, v, p) \leqslant t_0 \leqslant \psi(v, r, v, p)\,, & (8.12) \\ \varphi(\beta, r, v, p) & \text{si} \quad \psi(v, r, v, p) \leqslant t_0 \leqslant \psi(r, r, v, p)\,, & (8.13) \end{cases}$$

où α et β sont respectivement racines des équations

$$\varphi(\alpha, r, v, p) = t_0\,, \tag{8.14}$$

$$\psi(\beta, r, v, p) = t_0 \tag{8.15}$$

et appartiennent à l'intervalle $\langle v, r \rangle$.

Remarquons d'abord que les intervalles de variation de t_0 dans (8.11)-(8.13) sont disjoints, leur somme étant l'intervalle (8.8).

1° Admettons que t_0 appartient à l'intervalle $\langle\varphi(r,r,v,p), \varphi(v,r,v,p)\rangle$. Comme la fonction $\varphi(x,r,v,p)$ est décroissante dans l'intervalle $\langle v,r\rangle$ (voir (8.1) et (8.6)), l'équation

$$\varphi(x,r,v,p) = t_0$$

admet alors toujours une solution $x = a$ vérifiant la condition $v \leqslant a \leqslant r$.

En comparant les formules (1.12) et (8.1) on obtient la fonction $h(s) = h_a(s)$. Elle a la forme

$$h_a(s) = \begin{cases} u_1(s) & \text{pour} \quad v \leqslant s \leqslant a\,, \\ u_1(a) & \text{pour} \quad a \leqslant s \leqslant r\,. \end{cases} \tag{8.16}$$

Nous allons montrer que pour la fonction $h_a(s)$ l'intégrale R atteint sa valeur minimum.

En effet, soit $h(s)$ une autre fonction admissible quelconque. Alors les formules (1.9), (1.21) et (8.16) entraînent l'inégalité suivante:

$$[h(s) - h_a(s)]\left[1 - \frac{u_3^2(a)}{h(s)h_a(s)}\right] \geqslant 0$$

pour $v \leqslant s \leqslant r$. Donc

$$h(s) - h_a(s) \geqslant u_3^2(a)[h_a^{-1}(s) - h^{-1}(s)]$$

d'où

$$p\int_v^r h(s)\frac{ds}{s} - p\int_v^r h_a(s)\frac{ds}{s} \geqslant pu_3^2(a)\left[\int_v^r h_a^{-1}(s)\frac{ds}{s} - \int_v^r h^{-1}(s)\frac{ds}{s}\right].$$

Comme les deux intégrales du premier membre de l'inégalité sont, par hypothèse, égales à t_0, on a

$$p\int_v^r h_a^{-1}(s)\frac{ds}{s} \leqslant p\int_v^r h^{-1}(s)\frac{ds}{s}\,;$$

la fonction $h(s)$ étant arbitraire, cela prouve, en vertu de la définition de R, que

$$R \geqslant p\int_v^r h_a^{-1}(s)\frac{ds}{s}\,.$$

En calculant ensuite cette dernière intégrale on obtient de cette inégalité la limitation (8.11).

2° Admettons que t_0 appartient à l'intervalle $\langle\varphi(v,r,v,p), \psi(v,r,v,p)\rangle$. Alors l'équation

$$t_0 = k\log\frac{r^p}{v^p} \tag{8.17}$$

admet exactement une solution et on tire de (8.5)

$$u_1(v) \leqslant k \leqslant u_2(v) \, .$$

De (1.12) et (8.17) il résulte que $h(s) = k$. Comme

$$t_0 + k^2 R = p \int_v^r [h(s) + k^2 h^{-1}(s)] \frac{ds}{s}$$

et l'expression sous le signe intégrale atteint son minimum aussi pour la fonction $h(s) = k$, il vient

$$t_0 + k^2 R \geqslant 2p \; k \int_v^r \frac{ds}{s} = 2t_0 \, .$$

Donc

$$R \geqslant t_0 k^{-2} \, ,$$

d'où on obtient, en vertu de (8.17), la limitation (8.12).

3° Nous omettons la démonstration de l'inégalité (8.13), analogue à celle de l'inégalité (8.11). Remarquons que dans la limitation (8.13) l'égalité est réalisée par la fonction

$$h_\beta(s) = \begin{cases} u_3^{-1}(s) & \text{pour} \quad v \leqslant s \leqslant \beta \, , \\ u_3^{-1}(\beta) & \text{pour} \quad \beta \leqslant s \leqslant r \, , \end{cases}$$

où β désigne la racine de l'équation (8.15).

§ 9. Inégalités fondamentales (II).

1. Dans ce paragraphe nous établirons quelques conséquences fondamentales des limitations (8.10)-(8.13) de l'intégrale R lorsque t_0 est une valeur quelconque fixée. Ainsi, les formules (1.14), (8.10) donnent

$$v' \geqslant \frac{r^{p-1}(1 - v^{2p})}{v^{p-1}(1 - r^{2p})} e^{t_0 - \varphi(r,r,v,p) - \psi(r,r,v,p)} \, ,$$

d'où on obtient, en tenant compte de (1.4) et (8.5), la condition

$$v' \geqslant \frac{v^{p+1}}{1 - v^{2p}} \cdot \frac{1 - r^{2p}}{r^{p+1}} a_1^{-p} \, . \tag{9.1}$$

Nous avons ainsi établi le

Théorème 7. *Si f est une fonction quelconque de la famille S_p, les quantités $a_1 = f'(0)$, $r = |z|$, $v = |f(z)|$, $v' = |f'(z)|$ admettent la limitation* (9.1). *La fonction extrémale est la fonction $w = f^*(z)$* (voir (1.22)).

Remarquons qu'on peut déduire de l'inégalité (9.1), en éliminant les quantités convenables, plusieurs des limitations obtenues précédemment.

Ainsi, par exemple, si r et v sont des nombres donnés quelconques, les formules (9.1) et (1.18) donnent la limitation inférieure du module de la dérivée (voir (1.20)). En procédant de même dans le cas où a_1 et r sont donnés, on obtient le résultat (5.7), tandis que si a_1 et v sont donnés, on trouve la limitation (6.7).

2. La limitation inférieure de l'intégrale R (voir (8.11)-(8.15)) et la formule (1.14) entraînent immédiatement le

Théorème 8. *Si f est une fonction quelconque de la classe S_p, les quantités a_1, r, v et v' satisfont à l'inégalité suivante:*

$$\log v' \leqslant M(a_1, r, v, p) \tag{9.2}$$

où

$$M(a_1, r, v, p) = \begin{cases} \log \dfrac{r^{p-1}(1-v^{2p})}{v^{p-1}(1-r^{2p})} - \psi(a, r, v, p) & (9.3) \\ \qquad \text{si } \varphi(r, r, v, p) \leqslant t_0 \leqslant \varphi(v, r, v, p), \\ \log \dfrac{r^{p-1}(1-v^{2p})}{v^{p-1}(1-r^{2p})} - t_0^{-1}\left(\log \dfrac{r^p}{v^p}\right)^2 & (9.4) \\ \qquad \text{si } \varphi(v, r, v, p) \leqslant t_0 \leqslant \psi(v, r, v, p), \\ \log \dfrac{r^{p-1}(1-v^{2p})}{v^{p-1}(1-r^{2p})} - \varphi(\beta, r, v, p) & (9.5) \\ \qquad \text{si } \psi(v, r, v, p) \leqslant t_0 \leqslant \psi(r, r, v, p), \end{cases}$$

a et β sont respectivement racines des équations

$$\varphi(a, r, v, p) = t_0, \tag{9.6}$$

$$\psi(\beta, r, v, p) = t_0, \tag{9.7}$$

appartenant à l'intervalle $\langle v, r\rangle$; les fonctions φ et ψ sont définies par les formules (8.1), (8.2),

$$t_0 = \log a_1^{-p}. \tag{9.8}$$

L'inégalité (9.2) établit la seconde relation fondamentale entre toutes les quatre quantités a_1, r, v, v'.

§ 10. Borne supérieure du module de la dérivée (donnés: a_1, r).

1. En profitant des inégalités (1.18), (1.20) nous avons trouvé au § 5, entre autres, une limitation supérieure de v' quand a_1 et r sont donnés (voir (5.9)). Cette limitation s'exprimait par trois formules différentes suivant la position du point (r, a_1) dans le plan, mais elle n'était exacte que dans le cas où $(r, a_1) \in B_3$.

Nous terminerons ce travail en indiquant une des applications possibles du théorème 8, qui fournira la borne supérieure de la fonctionnelle $|f'(z)|$ pour $a_1 = f'(0)$ et $r = |z|$ donnés.

Dans ce but, remarquons que si a_1 et r sont donnés, on a $v_m \leqslant v \leqslant v_M$ (voir (5.5)), où v_m et v_M sont respectivement racines des équations (5.3), (5.4).

La formule (9.2) entraîne donc

$$\log v' \leqslant \max_{v_m \leqslant v \leqslant v_M} M(a_1, r, v, p) . \tag{10.1}$$

Comme la fonction $M(a_1, r, v, p)$ est définie par des formules différentes, il y aura lieu de considérer les cas (9.3)-(9.5). Ces cas correspondant aux différentes positions de t_0 dans l'intervalle (8.8), il faudra, en premier lieu, les remplacer par les cas équivalents par rapport à la valeur de v.

Dans ce but remarquons d'abord que toutes les fonctions (8.5) sont des fonctions décroissantes de la variable v dans l'intervalle $(0, r)$. En effet, on tire de (1.17), (1.21) et (8.5)

$$\varphi'_v(r, r, v, p) = -\frac{p(1-v^p)}{v(1+v^p)}, \tag{10.2}$$

$$\varphi'_v(v, r, v, p) = -\frac{2p^2v^{p-1}}{(1+v^p)^2}\log\frac{r}{v} - \frac{p(1-v^p)}{v(1+v^p)}, \tag{10.3}$$

$$\psi'_v(r, r, v, p) = -\frac{p(1+v^p)}{v(1-v^p)}, \tag{10.4}$$

$$\psi'_v(v, r, v, p) = -\frac{pv^{p-1}}{(1-v^p)^2}\left[-\log\frac{r^{2p}}{v^{2p}} + \frac{1-v^{2p}}{v^p}\right]. \tag{10.5}$$

En posant

$$g(v) = \log v^{2p} + v^{-p} - v^p - \log r^{2p}, \qquad 0 < v \leqslant r,$$

on obtient

$$g'(v) = -\frac{p(1-v^p)^2}{v^{p+1}} < 0,$$

d'où il résulte que

$$g(v) \geqslant g(r) > 0 .$$

La formule (10.5) permet de conclure que la dérivée $\psi'_v(v, r, v, p)$ est aussi négative.

Par conséquent, chacune des fonctions considérées décroît dans l'intervalle $(0, r)$ de l'infini à zéro (voir (8.5)).

Donc si $a_1 = e^{-t_0/p}$ et r sont donnés, il existe dans l'intervalle $(0, r)$ exactement une solution (v_m, v_1, v_2, v_M) du système d'équations

$$\begin{aligned}\varphi(r, r, v_m, p) = \varphi(v_1, r, v_1, p) = \psi(v_2, r, v_2, p)\\ = \psi(r, r, v_M, p) = t_0 .\end{aligned} \tag{10.6}$$

De (8.7) il résulte, de plus, que

$$v_m < v_1 < v_2 < v_M . \tag{10.7}$$

Remarquons que les nombres v_m et v_M intervenaient déjà dans la limitation (5.5).

Nous avons donc montré que les relations (9.3)-(9.5) sont équivalentes aux suivantes:

$$M(a_1, r, v, p) = \begin{cases} \log\dfrac{r^{p-1}(1-v^{2p})}{v^{p-1}(1-r^{2p})} - \psi(a, r, v, p) & \text{si} \quad v_m \leqslant v \leqslant v_1, & (10.8) \\ \log\dfrac{r^{p-1}(1-v^{2p})}{v^{p-1}(1-r^{2p})} - t_0^{-1}\left(\log\dfrac{r^p}{v^p}\right)^2 & \text{si} \quad v_1 \leqslant v \leqslant v_2, & (10.9) \\ \log\dfrac{r^{p-1}(1-v^{2p})}{v^{p-1}(1-r^{2p})} - \varphi(\beta, r, v, p) & \text{si} \quad v_2 \leqslant v \leqslant v_M, & (10.10) \end{cases}$$

où a et β sont respectivement racines des équations (9.6) et (9.7).

En dérivant la fonction $M(a_1, r, v, p)$ par rapport à v on obtient, en tenant compte de (8.6), (10.2)-(10.5) et (9.6), (9.7), les formules suivantes:

$$M'_v(a_1, r, v, p) = \begin{cases} \dfrac{-v^{2p}+2pv^p+1}{v(1-v^{2p})} + p\left(\dfrac{1+a^p}{1-a^p}\right)\dfrac{1-v^p}{v(1+v^p)} & (10.11) \\ \qquad\qquad \text{si} \quad v_m \leqslant v \leqslant v_1, \\ \dfrac{-(p+1)v^{2p}+1-p}{v(1-v^{2p})} + \dfrac{2p^2}{t_0 v}\log\dfrac{r}{v} & (10.12) \\ \qquad\qquad \text{si} \quad v_1 \leqslant v \leqslant v_2, \\ \dfrac{-v^{2p}-2pv^p+1}{v(1-v^{2p})} + p\left(\dfrac{1-\beta^p}{1+\beta^p}\right)^2\dfrac{1+v^p}{v(1-v^p)} & (10.13) \\ \qquad\qquad \text{si} \quad v_2 \leqslant v \leqslant v_M. \end{cases}$$

Nous étudierons maintenant le signe de $M'_v(a_1, r, v, p)$ dans les différents intervalles de variation de v. Comme $0 < v < 1$, il résulte immédiatement de (10.11) que

$$M'_v(a_1, r, v, p) > 0 \quad \text{pour} \quad v_m \leqslant v \leqslant v_1. \tag{10.14}$$

Il suffit donc, dans ce qui suit, de se borner aux deux intervalles restants $\langle v_1, v_2\rangle$ et $\langle v_2, v_M\rangle$.

2. Soit $v_1 \leqslant v \leqslant v_2$. Alors, en vertu de (10.12) et de la définition de v_1, on a

$$M'_v(a_1, r, v_1, p) = \frac{(p-1)v_1^{2p}+4pv_1^p+p+1}{v_1(1-v_1^{2p})} > 0. \tag{10.15}$$

D'une façon analogue on tire de (10.12) et (10.6)

$$M'_v(a_1, r, v_2, p) = \frac{(p-1)v_1^{2p}-4pv_2^{2p}+p+1}{v_2(1-v_2^{2p})}. \tag{10.16}$$

Donc, si $p = 1$, on a

$$M_v'(a_1, r, v_2, 1) = \frac{2-4v_2}{v_2(1-v_2^2)},$$

d'où il résulte que

$$\begin{aligned} &M_v'(a_1, r, v_2, 1) > 0 \quad \text{si} \quad v_2 < \tfrac{1}{2}, \\ (10.17) \qquad &M_v'(a_1, r, v_2, 1) = 0 \quad \text{si} \quad v_2 = \tfrac{1}{2}, \\ &M_v'(a_1, r, v_2, 1) < 0 \quad \text{si} \quad v_2 > \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Si $p = 2, 3, \ldots$, on tire de (10.16)

$$\begin{aligned} &M_v'(a_1, r, v_2, p) > 0 \quad \text{si} \quad v_2 < \sqrt[p]{\frac{2p-\sqrt{3p^2+1}}{p-1}}, \\ (10.18) \qquad &M_v'(a_1, r, v_2, p) = 0 \quad \text{si} \quad v_2 = \sqrt[p]{\frac{2p-\sqrt{3p^2+1}}{p-1}}, \\ &M_v'(a_1, r, v_2, p) < 0 \quad \text{si} \quad v_2 > \sqrt[p]{\frac{2p-\sqrt{3p^2+1}}{p-1}}. \end{aligned}$$

Les formules (10.17) et (10.18) donnent donc pour $p = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} &M_v'(a_1, r, v_2, p) > 0 \quad \text{si} \quad v_2 < v_0, \\ (10.19) \qquad &M_v'(a_1, r, v_2, p) = 0 \quad \text{si} \quad v_2 = v_0, \\ &M_v'(a_1, r, v_2, p) < 0 \quad \text{si} \quad v_2 > v_0, \end{aligned}$$

où

$$(10.20) \qquad v_0 = \begin{cases} \tfrac{1}{2} & \text{pour} \quad p = 1, \\ \sqrt[p]{\dfrac{2p-\sqrt{3p^2+1}}{p-1}} & \text{pour} \quad p = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Nous avons ainsi établi le signe de la dérivée (10.12) aux extrémités de l'intervalle considéré $\langle v_1, v_2 \rangle$. Afin de déterminer ce signe à l'intérieur de cet intervalle, posons

$$(10.21) \qquad g_p(v) = \frac{2p^2}{vt_0}\log\frac{r}{v}, \qquad h_p(v) = \frac{(p+1)v^{2p}+p-1}{v(1-v^{2p})}.$$

Alors on tire de (10.12)

$$(10.22) \qquad M_v'(a_1, r, v, p) = g_p(v) - h_p(v).$$

Comme

$$g_p'(v) = -\frac{2p^2}{t_0 v^2}\left(\log\frac{r}{v}+1\right) < 0,$$

$$g_p''(v) = \frac{2p^2}{t_0 v^3}\left(2\log\frac{r}{v}+1\right) > 0,$$

la fonction $g_p(v)$ est une fonction décroissante et convexe dans l'intervalle (v_1, v_2).

D'autre part, on tire de (10.21)

$$h'_p(v) = \frac{(p+1)v^{4p}+2(2p^2-1)v^{2p}-p+1}{v^2(1-v^{2p})^2},$$

$$h''_p(v) = \frac{2(p+1)v^{6p}+2(4p^3+6p^2-p+1)v^{4p}+2(p-1)(4p^2-2p-3)v^{2p}+2(p-1)}{v^3(1-v^{2p})^3}.$$

On vérifie aisément que $h''_p(v) > 0$ et $h'_1(v) > 0$. De plus, on a pour $p = 2, 3, \dots$

$$h'_p(v) < 0 \quad \text{si} \quad v < \sqrt[2p]{\frac{1-2p^2+p\sqrt{4p^2-3}}{p+1}},$$

$$h'_p(v) = 0 \quad \text{si} \quad v = \sqrt[2p]{\frac{1-2p^2+p\sqrt{4p^2-3}}{p+1}},$$

$$h'_p(v) > 0 \quad \text{si} \quad v > \sqrt[2p]{\frac{1-2p^2+p\sqrt{4p^2-3}}{p+1}}.$$

La fonction $h_1(v)$ est donc croissante et convexe dans l'intervalle (v_1, v_2) et la fonction $h_p(v)$ $(p = 2, 3, \dots)$ est convexe, d'abord décroissante, ensuite croissante.

En outre, il résulte de (10.15) et (10.22) que

$$g_p(v_1) > h_p(v_1),$$

tandis que (10.19) et (10.22) donnent

$$g_p(v_2) > h_p(v_2) \quad \text{si} \quad v_2 < v_0,$$

$$g_p(v_2) = h_p(v_2) \quad \text{si} \quad v_2 = v_0,$$

$$g_p(v_2) < h_p(v_2) \quad \text{si} \quad v_2 > v_0.$$

Finalement on obtient de (10.22) en tenant compte des propriétés de la fonction (10.21) établies précédemment:

LEMME 1. *Si*

1° $v_2 < v_0$, *on a* $M'_v(a_1, r, v, p) > 0$ *dans l'intervalle* $\langle v_1, v_2\rangle$,

2° $v_2 = v_0$, *on a* $M'_v(a_1, r, v, p) > 0$ *pour* $v_1 \leqslant v < v_2$ *et* $M'_v(a_1, r, v_2, p) = 0$,

3° $v_2 > v_0$, *on a* $M'_v(a_1, r, v, p) > 0$ *pour* $v_1 \leqslant v < \gamma$, $M'_v(a_1, r, v, p) < 0$ *pour* $\gamma < v \leqslant v_2$, *où* γ $(v_1 < \gamma < v_2)$ *est la racine unique de l'équation*

$$\frac{p-1+(p+1)\gamma^{2p}}{1-\gamma^{2p}} = \frac{2p}{t_0}\log\frac{r^p}{\gamma^p}. \tag{10.23}$$

3. Supposons maintenant que $v_2 \leqslant v \leqslant v_M$. Alors les formules (10.13) et (9.7) donnent

$$(10.24) \qquad M'_v(a_1, r, v, p) = \frac{-v^{2p} - 2pv^p + 1}{v(1-v^{2p})} + p\left(\frac{1-\beta^p}{1+\beta^p}\right)^2 \frac{1+v^p}{v(1-v^p)},$$

où $v \leqslant \beta \leqslant r$ est racine de l'équation

$$(10.25) \qquad \psi(\beta, r, v, p) = t_0 .$$

De la formule (10.24) on tire

$$(10.26) \qquad M'_v(a_1, r, v, p) = \frac{\beta^p\big((p-1)v^{2p} + p + 1\big)}{v(1-v^{2p})(1+\beta^p)^2} [G(\beta) - H(v)],$$

où

$$(10.27) \qquad G(\beta) = \frac{(1+\beta^p)^2}{\beta^p}, \qquad H(v) = \frac{4p(1+v^p)^2}{p+1+(p-1)v^{2p}};$$

pour déterminer le signe de la dérivée (10.24) il faut donc étudier les fonctions (10.27) dans l'intervalle $v_2 \leqslant v \leqslant v_M$.

Dans ce but remarquons que

$$H'(v) = \frac{8p^2v^{p-1}(1+v^p)[p+1+(1-p)v^p]}{[p+1+(p-1)v^{2p}]^2} > 0,$$

donc la fonction $H(v)$ est croissante dans l'intervalle $\langle v_2, v_M \rangle$.

D'autre part, $\beta = \beta(v)$ est une fonction croissante dans l'intervalle $v_2 \leqslant v \leqslant v_M$, puisque $\beta'_v(v) = -\psi'_v/\psi'_\beta > 0$ (voir (10.25) et (8.2)). Comme

$$\beta(v_2) = v, \qquad \beta(v_M) = r, \qquad G'_\beta(\beta) = \frac{p}{\beta}(\beta^p - \beta^{-p}) < 0,$$

la fonction $G\big(\beta(v)\big)$ est décroissante dans l'intervalle $\langle v_2, v_M \rangle$ et elle décroît de la valeur $G(v)$ à $G(r)$.

Finalement, en tenant compte des propriétés des fonctions (10.27) démontrées plus haut, ainsi que des formules (10.26) et (10.19), on obtient aisément le

LEMME 2. *Si*

1° $v_2 \geqslant v_0$, *on a* $M'_v(a_1, r, v, p) < 0$ *dans l'intervalle* $(v_2, v_M\rangle$;

2° $v_2 < v_0$ *et* $G(r) \geqslant H(v_M)$, *alors* $M'_v(a_1, r, v, p) > 0$ *pour* $v_2 \leqslant v < v_M$;

3° $v_2 < v_0$ *et* $G(r) < H(v_M)$, *on a* $M'_v(a_1, r, v, p) > 0$ *pour* $v_2 \leqslant v < \delta$, $M'_v(a_1, r, v, p) < 0$ *pour* $\delta < v \leqslant v_M$, *où* δ $(v_2 < \delta < v_M)$ *est la racine unique de l'équation* $G(\beta) = H(\delta)$.

4. Récapitulant les raisonnements précédents sur le signe de la dérivée $M'_v(a_1, r, v, p)$ on arrive, en tenant compte des lemmes 1, 2 et de l'inégalité (10.14), aux résultats suivants:

1° Si

$$v_2 < v_0 \quad \text{et} \quad G(r) < H(v_M)\,, \tag{10.28}$$

on a

$$\begin{aligned} M'_v &> 0 \quad \text{lorsque} \quad v_m \leqslant v < \delta\,, \\ M'_v &= 0 \quad \text{lorsque} \quad v = \delta\,, \\ M'_v &< 0 \quad \text{lorsque} \quad \delta < v \leqslant v_M\,, \end{aligned}$$

où $M'_v = M'_v(a_1, r, v, p)$; β et δ sont les solutions du système d'équations

$$\begin{gathered} G(\beta) = H(\delta)\,, \\ \psi(\beta, r, \delta, p) = t_0\,, \end{gathered}$$

satisfaisant aux conditions

$$v_2 < \delta < v_M\,, \qquad \delta \leqslant \beta \leqslant r\,.$$

2° Si

$$v_2 < v_0 \quad \text{et} \quad G(r) \geqslant H(v_M)\,, \tag{10.29}$$

on a $M'_v > 0$ pour $v_m \leqslant v \leqslant v_M$ si $G(r) > H(v_M)$, et $M'_v > 0$ pour $v_m \leqslant v < v_M$ lorsque $G(r) = H(v_M)$; au point $v = v_M$ on a $M'_v = 0$.

3° Si

$$v_2 = v_0\,, \tag{10.30}$$

on a

$$\begin{aligned} M'_v &> 0 \quad \text{lorsque} \quad v_m \leqslant v < v_0\,, \\ M'_v &= 0 \quad \text{lorsque} \quad v = v_0\,, \\ M'_v &< 0 \quad \text{lorsque} \quad v_0 < v \leqslant v_M\,. \end{aligned}$$

4° Enfin, si

$$v_2 > v_0\,, \tag{10.31}$$

on a

$$\begin{aligned} M'_v &> 0 \quad \text{pour} \quad v_m \leqslant v < \gamma\,, \\ M'_v &= 0 \quad \text{pour} \quad v = \gamma\,, \\ M'_v &< 0 \quad \text{pour} \quad \gamma < v \leqslant v_M\,, \end{aligned}$$

où γ, $v_1 < \gamma < v_2$, est racine de l'équation (10.23).

Les théorèmes sur les extrêmes d'une fonction d'une variable et les formules (10.8)-(10.10), (8.3) et (10.6) permettent donc de conclure que:

$$\max_{v_m \leq v \leq v_M} M(a_1, r, v, p) \tag{10.32}$$

$$= \begin{cases} \log \dfrac{r^{p-1}\delta(1+\beta^p)^2(1-\delta^p)}{\beta^p(1-r^{2p})(1+\delta^p)} - \dfrac{1-\beta^p}{1+\beta^p}\log\dfrac{r^p}{\beta^p} & \text{dans le cas (10.28)}, \\ \log \dfrac{v_M(1-v_M^p)(1+r^p)}{r(1-r^p)(1+v_M^p)} & \text{dans le cas (10.29)}, \\ \log \dfrac{r^{p-1}(1-v_0^{2p})}{v_0^{p-1}(1-r^{2p})} - t_0^{-1}\left(\log\dfrac{r^p}{v_0^p}\right)^2 & \text{dans le cas (10.30)}, \\ \log \dfrac{r^{p-1}(1-\gamma^{2p})}{\gamma^{p-1}(1-r^{2p})} - t_0^{-1}\left(\log\dfrac{r^p}{\gamma^p}\right)^2 & \text{dans le cas (10.31)}. \end{cases}$$

5. Voyons maintenant quelles sont les conséquences qu'entraînent les conditions (10.28)-(10.31).

On sait que la fonction $\psi(v, r, v, p)$ est décroissante dans l'intervalle $0 < v < r$ et que $\psi(v_2, r, v_2, p) = t_0$ (voir (10.5), (10.6)). Il a donc équivalence entre les conditions suivantes:

$$\begin{aligned} v_2 < v_0 &\equiv \psi(v_0, r, v_0, p) < t_0, \\ v_2 = v_0 &\equiv \psi(v_0, r, v_0, p) = t_0, \\ v_2 > v_0 &\equiv \psi(v_0, r, v_0, p) > t_0. \end{aligned} \tag{10.33}$$

De (8.3) on tire

$$\psi(v_0, r, v_0, p) = \frac{1+v_0^p}{1-v_0^p}\log\frac{r^p}{v_0^p},$$

d'où on obtient, en tenant compte de (10.20),

$$\psi(v_0, r, v_0, p) = \frac{1+\sqrt{3p^2+1}}{p}\log\frac{r^p}{v_0^p}.$$

Par conséquent, à cause de (9.8), il y a équivalence entre les conditions suivantes:

$$\begin{aligned} \psi(v_0, r, v_0, p) < t_0 &\equiv \left(\frac{v_0}{r}\right)^{(1+\sqrt{3p^2+1})/p} > a_1, \\ \psi(v_0, r, v_0, p) = t_0 &\equiv \left(\frac{v_0}{r}\right)^{(1+\sqrt{3p^2+1})/p} = a_1, \\ \psi(v_0, r, v_0, p) > t_0 &\equiv \left(\frac{v_0}{r}\right)^{(1+\sqrt{3p^2+1})/p} < a_1. \end{aligned} \tag{10.34}$$

Les formules (10.33) et (10.34) donnent donc

$$v_2 < v_0 \equiv a_1 < \left(\frac{v_0}{r}\right)^{(1+\sqrt{8p^2+1})/p},$$

(10.35)
$$v_2 = v_0 \equiv a_1 = \left(\frac{v_0}{r}\right)^{(1+\sqrt{8p^2+1})/p},$$

$$v_2 > v_0 \equiv a_1 > \left(\frac{v_0}{r}\right)^{(1+\sqrt{8p^2+1})/p}.$$

Nous étudierons maintenant les conséquences qui découlent de l'égalité $G(r) = H(v_M)$. Les formules (5.4) et (10.27) donnent alors

(10.36)
$$a_1(r) = \frac{(1-r^p)^{2/p}}{r}\cdot\frac{v_M}{(1-v_M^p)^{2/p}} \quad \text{et} \quad \frac{(1+r^p)^2}{r^p} = \frac{4p(1+v_M^p)^2}{p+1+(p-1)v_M^{2p}}.$$

Il est évident que si $r \to 1$, on a $v_M \to v_0$, donc $\lim\limits_{r\to 1-} a_1(r) = 0$, $a_1(r) = 1$ si $r = v_M = v_0$. En outre

$$a_1'(r) = -a_1(r)\frac{1+r^p}{r}\left[\frac{1}{1-r^p} + \frac{(1+v_M^p)^2[p+1+(p-1)v_M^{2p}]}{2(1-v_M^p)[p+1+(1-p)v_M^p]}\right] < 0\,.$$

La fonction $a_1(r)$ définie par les équations (10.38) est donc définie dans l'intervalle $v_0 < r < 1$ et elle décroît de 1 à 0.

Considérons ensuite la condition $G(r) \geqslant H(v_M)$, où v_M est racine de la première des équations (10.36). Les fonctions $H(v_M)$ et $v_M/(1-v_M^p)^{2/p}$ sont des fonctions croissantes. En posant donc

$$x = \max v_M \quad \text{lorsque} \quad H(v_M) \leqslant G(r)\,,$$

on obtient

(10.37)
$$a_1(r) \leqslant \frac{(1-r^p)^{2/p}}{r}\cdot\frac{x}{(1-x^p)^{2/p}},$$

où

$$\frac{(1+r^p)^2}{r^p} = \frac{4p(1+x^p)^2}{p+1+(p-1)x^{2p}}, \qquad 0 < x < r\,.$$

En procédant de même dans le cas $G(r) < H(v_M)$, on obtient les conditions

(10.38)
$$a_1(r) > \frac{(1-r^p)^{2/p}}{r}\cdot\frac{x}{(1-x^p)^{2/p}}, \qquad \frac{(1+r^p)^2}{r^p} = \frac{4p(1+x^p)^2}{p+1+(p-1)x^{2p}}.$$

6. Soient F_i $(i = 1, 2, 3)$ les ensembles suivants du plan (r, a_1):

$$F_1 = \left\{(r, a_1):\ v_0 < r < 1\,,\ \left(\frac{v_0}{r}\right)^{(1+\sqrt{8p^2+1})/p} \leqslant a_1 < 1\right\},$$

$$F_2 = \left\{(r, a_1):\ v_0 < r < 1\,,\ \frac{(1-r^p)^{2/p}}{r}\cdot\frac{x}{(1-x^p)^{2/p}} < a_1 < \left(\frac{v_0}{r}\right)^{(1+\sqrt{8p^2+1})/p}\right\},$$

$$F_3 = F_{31} \cup F_{32}\,,$$

où

$$F_{31} = \{(r, a_1)\colon\ 0 < r \leqslant v_0\ ,\ 0 < a_1 < 1\}\ ,$$

$$F_{32} = \left\{(r, a_1)\colon\ v_0 < r < 1\ ,\ 0 < a_1 \leqslant \frac{(1-r^p)^{2p}}{r} \cdot \frac{x}{(1-x^p)^{2/p}}\right\},$$

et x $(0 < x < r)$ est racine de l'équation

$$\frac{(1+r^p)^{2/p}}{r} = \frac{4p(1+x^p)^2}{p+1+(p-1)x^{2p}}$$

(voir (10.38)).

Si le point (r, a_1) appartient à l'ensemble F_3, alors (10.35) entraîne $v_2 < v_0$ et (10.37) entraîne $G(r) \geqslant H(v_M)$. On a donc le cas (10.29).

Si $(r, a_1) \in F_2$, alors, en vertu de (10.35) et (10.37), on obtient le cas (10.28).

Enfin, si $(r, a_1) \in F_1$, on a $v_2 \geqslant v_0$ et alors ce sont les conditions (10.30) et (10.31) qui sont remplies.

Les formules (10.1) et (10.32), ainsi que les relations (10.20), (10.23), (10.27) et (9.8) mènent finalement au

Théorème 9. *Si f est une fonction quelconque de la classe S_p, satisfaisant à la condition $f'(0) = a_1$, et si a_1 et $r = |z|$ sont des nombres quelconques, on a la limitation exacte suivante:*

$$\log v' = \log|f'(z)| \tag{10.39}$$

$$\leqslant \begin{cases} \log\dfrac{r^{p-1}(1-\gamma^{2p})}{\gamma^{p-1}(1-r^{2p})} - (\log a_1^{-p})^{-1}\left(\log\dfrac{r^p}{\gamma^p}\right)^2 & si \quad (r, a_1) \in F_1\,, \\ \log\dfrac{r^p\delta(1+\beta^p)^2(1-\delta^p)}{\beta^p r(1-r^{2p})(1+\delta^p)} - \dfrac{1-\beta^p}{1+\beta^p}\log\dfrac{r^p}{\beta^p} & si \quad (r, a_1) \in F_2\,, \\ \log\dfrac{v_M(1-v_M^p)(1+r^p)}{r(1+v_M^p)(1-r^p)} & si \quad (r, a_1) \in F_3 \end{cases}$$

où β et δ sont les solutions du système d'équations

$$\frac{(1+\beta^p)^2}{\beta^p} = \frac{4p(1+\delta^p)^2}{p+1+(p-1)\delta^{2p}}\,,$$

$$\log\frac{\beta^p(1-\delta^p)^2}{\delta^p(1-\beta^p)^2} + \frac{1+\beta^p}{1-\beta^p}\log\frac{r^p}{\beta^p} = \log a_1^{-p}\ ,$$

vérifiant les conditions $v_2 < \delta < v_M$, $\delta \leqslant \beta \leqslant r$; γ, $v_1 < \gamma < v_2$, est racine de l'équation

$$\frac{p-1+(p+1)\gamma^{2p}}{1-\gamma^{2p}}\log a_1^{-1} = 2p\log\frac{r}{\gamma}\,,$$

et enfin v_1, v_2 et v_M satisfont au système d'équations (10.6).

Remarquons que la troisième des limitations (10.39) a déjà été obtenue précédemment, mais seulement dans un ensemble $B_3 \subset F_3$.

Dans un nouveau travail nous nous proposons d'étudier un problème analogue consistant à déterminer la borne supérieure du module de la dérivée d'une fonction de la famille S_p satisfaisant aux conditions $f'(0) = a_1$, $|f(z)| = v$, où a_1 et v sont donnés, et de continuer les recherches que nous venons d'exposer.

Les résultats (1.17), (1.18), (2.1), (5.5), (5.7) et (10.39) ont été publiés, avec des résumés des démonstrations, au Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences [2].

Travaux cités

[1] J. Bazylewicz, *Zum Koeffizientenproblem der schlichten Funktionen*, Mat. Sborn. 1(43) (2) (1936), p. 211-218.

[2] Z. J. Jakubowski, *Sur les fonctions univalentes p-symétriques et bornées dans le cercle unitaire*, Bull. Acad. Polon. Sci. 14(1966), p. 635-640.

[3] K. Löwner, *Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises*, Math. Ann. 89 (1923), p. 103-121.

[4] R. Robinson, *Bounded univalent functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 52 (1942), p. 426-449.

Reçu par la Rédaction le 1. 10. 1966