NUMERICAL ANALYSIS AND MATHEMATICAL MODELLING
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 24
PWN–POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1990

ДОПУСТИМЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ИЛИ В ОСОБОЙ ТОЧКЕ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. А. АБРАМОВ, Н. Б. КОНЮХОВА

Вычислительный центр АН СССР, Москва, СССР

Дается определение допустимого граничного условия на бесконечности для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (о.д.у.). Приводятся достаточные условия, при которых граничное условие на бесконечности является допустимым, выделяющим семейство решений заданной размерности. Для систем уравнений с особенностями типа полюса выделяются достаточно широкие классы линейных соотношений, могущих задавать допустимые граничные условия в особой точке. Эти классы, в частности, охватывают практически важные случаи — условия типа ограниченности решений и типа излучения. Описываются способы устойчивого переноса допустимых граничных условий из особых точек при численном решении сингулярных краевых задач. Эти методы использовались, в частности, при решении конкретных прикладных задач, возникающих в океанологии, ядерной физике, радиофизике, акустике, квантовой хромодинамике и т.п.

Цель настоящей работы — описать достаточно целостную картину, сложившуюся из основных результатов [1–5], полученных в указанном направлении; как правило, ссылки на эти работы в дальнейшем изложении опущены. В [1–5], а также в примыкающих к ним обзорных работах [6–8] можно ознакомиться с другими результатами, доказательствами теорем, некоторыми дополнительными деталями, например, методами решения сопутствующих алгебраических задач (по этому поводу см. также [9, 10]), описаниями практического применения результатов, библиографий.

Для единообразия изложения в качестве особой рассматривается бесконечно удаленная точка; конечная особая точка типа полюса может быть перенесена в бесконечность соответствующей заменой независимой переменной. Определение и классификацию изолированных особых точек для систем линейных о.д.у. см. в [11–13]; мы более придерживаемся терминологии [12].

Далее используются обозначения: C^n — комплексное линейное пространство столбцов высоты n; $L(C^n)$, $L(C^n, C^m)$ — комплексные линейные пространства квадратных матриц порядка n и $m\times n$-матриц, соответственно; E_q — единичная матрица порядка q; $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — диагональная матрица с элементами на диагонали $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$; под прямой суммой $C\oplus D$ квадратных матриц C и D, не обязательно одинакового порядка, понимается квазидиагональная матрица $\left\|\begin{array}{c|c} C & O \\ \hline 0 & D\end{array}\right\|$; $\lambda(M)$ — собственные значения (с.з.) матрицы M.

§ I. Определение допустимого граничного условия

Пусть при $T_0 \leqslant t < \infty$ определена матричная функция $A(t)$, значениями которой являются линейные операторы в C^n — комплексные квадратные матрицы порядка n, $A\colon [T_0, \infty)\to L(C^n)$. Пусть элементы $A(t)$ суть функции изнеримые по Лебегу на $[T_0, \infty)$ и суммируемые на каждом конечном отрезке $[a, b] \subset [T_0, \infty)$. Систему n уравнений

$$x' = A(t)x \quad \text{почти всюду на } [T_0, \infty) \tag{1.1}$$

будем рассматривать на классе вектор-функций $x(t)$, абсолютно непрерывных на каждом конечном отрезке $[a, b] \subset [T_0, \infty)$ и принимающих значения в C^n.

Зададим в C^n какое-либо m-мерное подпространство C^m_∞ уравнением

$$\varphi_\infty x = 0, \qquad x\in C^n,$$

где $\varphi_\infty \in L(C^n, C^{n-m})$, $\operatorname{zank}\varphi_\infty = n-m$, $0\leqslant m\leqslant n$. Этому подпространству C^m_∞ поставим в соответствие граничное условие на бесконечности

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\varphi_\infty x(t)}{|x(t)|} = 0. \tag{1.2}$$

Здесь $x(t)$- нетривиальное решение (1.1), $|\cdot|$ — какая-либо норма, введенная в C^n (очевидно, справедливость (1.2) не зависит от выбора нормы). Полагаем по определению, что тривиальное решение удовлетворяет (1.2).

Определение I. Два подпространства C^m_∞ будем считать *эквивалентными*, если соответствующие им граничные условия (1.2) выделяют одну и ту же совокупность решений (1.1).

Определение II. Будем называть граничное условие (1.2) *допустимым*, если совокупность решений системы (1.1), удовлетворяющих условию (1.2), образует m-мерное подпространство в пространстве всех решений.

Если $A(t)$ такова, что существует конечный $\lim\limits_{t\to\infty} t^2 A(t)$, то система не имеет особенности на бесконечности, так как матрица системы, порожденной подстановкой в (1.1) $\tau = 1/t$, имеет при $\tau = 0$ не более, чем устранимую особенность. В этом случае, очевидно, каждое C^m_∞ обладает указанным в определении II свойством, так как линейное однородное уравнение без особенностей вместе с линейными однородными граничными условиями порождает линейное множество решений, имеющее нужную размерность. В общем случае не каждое φ_∞, или, что то же, не каждое C^m_∞, определяет допустимое граничное условие, в чем легко убедиться на простейших примерах (см. такие примеры в [3, 4]). Мы укажем способы построения некоторых классов C^m_∞, могущих задавать граничные условия на бесконечности для решений системы (1.1), при различных предположениях относительно поведения коэффициентов этой системы при больших t.

Зафиксируем какое-либо t, $T_0 \leqslant t < \infty$. Тогда значения $x(t)$ множества всех решений (1.1) заполняют все пространство C^n. Из определения допустимого условия следует, что значения $x(t)$ множества решений (1.1), удовлетворяющих (I. 2), заполняют некоторое m-мерное линейное подпространство $C^m(t)$ в C^n. Тем самым условие (1.2) эквивалентно условию

$$x(t) \in C^m(t). \tag{1.3}$$

Будем говорить, что условие (1.3) есть результат перенесения условия (1.2) в точку t. Для выделенных классов C^m_∞ мы укажем способы устойчивого переноса граничного условия (1.2) из бесконечности в конечную точку, т.е. способы построения $C^m(t)$, при численном решении сингулярных краевых задач.

Изучение задачи (1.1)–(1.2) мы начнем в § 2 со случая, когда матрица $A(t)$ имеет квазидиагональную главную часть, а φ_∞ имеет фиксированный вид. Почти все ситуации, изученные в [1–5], приводятся к такой задаче с помощью специальных замен переменных, связанных со способами построения подпространств C^m_∞, так что представляет интерес получение достаточно общих теорем для указанного случая.

§ 2. О выделении некоторых семейств решений систем линейных о.д.у. на бесконечном интервале

Пусть в системе (1.1) $A(t) = B(t) + V(t)$, где $B(t) = B_-(t) \oplus B_+(t)$, $B_- \in L(C^m)$, $B_+ \in L(C^{n-m})$. Для $V(t)$, $x(t)$ введем согласованное с квазидиагональным видом $B(t)$ разбиение на блоки:

$$V(t) = \underset{\leftarrow m \rightarrow \leftarrow n-m \rightarrow}{\left\| \begin{array}{c|c} V_{11}(t) & V_{12}(t) \\ \hline V_{21}(t) & V_{22}(t) \end{array} \right\|} \begin{array}{l} \}m \\ \}n-m \end{array}, \qquad x(t) = \left\| \begin{array}{c} x_-(t) \\ \hline x_+(t) \end{array} \right\| \begin{array}{l} \}m \\ \}n-m \end{array}.$$

Пусть в (1.2) $\varphi_\infty = \|0 \,\vdots\, E_{n-m}\|$, так что подпространство C^m_∞ задается уравнением

$$x_+ = 0, \qquad x \in C^n.$$

Тогда задача (1.1), (1.2) приобретает вид

(2.1) $$x' = (B(t)+V(t))x \quad \text{почти всюду на } [T_0, \infty),$$

(2.2) $$\lim_{t\to\infty} \frac{x_+(t)}{|x_-(t)|} = 0.$$

В дальнейшем $\Phi_-(t)$ — фундаментальная матрица решений (ф.м.р.) системы

(2.3) $$\varphi'_- = B_-(t)\varphi_- \quad \text{почти всюду на } [T_0, \infty),$$

а $\Phi_+(t)$ — ф.м.р. системы

(2.4) $$\varphi'_+ = B_+(t)\varphi_+ \quad \text{почти всюду на } [T_0, \infty).$$

1. Вспомогательная сингулярная задача Коши для матричного уравнения типа Риккати. Сопоставим системе (2.1) следующую нелинейную задачу Коши на бесконечности

(2.5а) $$\alpha' = B_+(t)\alpha - \alpha B_-(t) + V_{22}(t)\alpha - \alpha V_{11}(t) - \alpha V_{12}(t)\alpha + V_{21}(t) \quad \text{почти всюду на } [T, \infty),$$

(2.5б) $$\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = 0,$$

где $T_0 \leqslant T$ — достаточно велико, $\alpha \in \mathbf{L}(\mathbf{C}^m, \mathbf{C}^{n-m})$.

Введем обозначения:

$$I_{ij}(t) = \int_t^\infty |\Phi_+(t)\Phi_+^{-1}(s)|\,|V_{ij}(s)|\,|\Phi_-(s)\Phi_-^{-1}(t)|\,ds, \qquad i, j = 1, 2,\ t \geqslant T_0;$$

здесь и далее интегралы понимаются в смысле Лебега, а норма матриц согласована с нормой, введенной в $\mathbf{C}^n$.

Теорема 1. *Пусть система линейных* о.д.у.

(2.6) $$\omega' = B_+(t)\omega - \omega B_-(t) \quad \textit{почти всюду на } [T_0, \infty)$$

не имеет других решений, стремящихся к нулю при $t\to\infty$, *кроме* $\omega(t) \equiv 0$, *и пусть выполняются условия*

$$\lim_{t\to\infty} I_{ij}(t) = 0, \qquad i, j = 1, 2.$$

Тогда для достаточно большого T *существует единственная абсолютно непрерывная матричная функция* $\alpha(t)$, $\alpha\colon [T, \infty) \to \mathbf{L}(\mathbf{C}^m, \mathbf{C}^{n-m})$, *удовлетворяющая* (2.5). *Это решение задачи* (2.5) *может быть найдено методом последовательных приближений из сингулярного интегрального уравнения*

Вольтерра:

$$\alpha^{(0)}(t) \equiv 0, \qquad \alpha^{(k+1)}(t) = -\int_t^\infty \Phi_+(t)\Phi_+^{-1}(s)F(s, \alpha^{(k)}(s))\Phi_-(s)\Phi_-^{-1}(t)ds,$$

$$t \geqslant T, k = 0, 1, \ldots,$$

где

$$F(t, \alpha) = V_{22}(t)\alpha - \alpha V_{11}(t) - \alpha V_{12}(t)\alpha + V_{21}(t);$$

метод сходится со скоростью сходимости геометрической прогрессии.

Замечание 1. Если все нетривиальные решения (2.6) не ограничены при $t \to \infty$, то относительно $I_{12}(t)$ достаточно предполагать выполнение условия $\sup_{t \geqslant T_0} I_{12}(t) < +\infty$.

Замечание 2. Если все решения системы (2.3) ограничены при $t \to \infty$, а система (2.4) не имеет других решений, стремящихся к нулю при $t \to \infty$, кроме $\varphi_+(t) \equiv 0$, то для системы (2.6) выполняются предположения теоремы 1. Если при этом или все нетривиальные решения (2.4) не ограничены при $t \to \infty$, или все решения (2.3) стремятся к нулю при $t \to \infty$, то все нетривиальные решения (2.6) не ограничены при $t \to \infty$ (см. замечание 1).

2. Допустимые условия (2.2) и их перенос в конечную точку. Введем обозначения:

$$\mathcal{J}_{1j}^-(t, T) = \int_T^t |\Phi_-(t)\Phi_-^{-1}(s)|\,|V_{1j}(s)|ds, \qquad j = 1, 2,$$

$$\mathcal{J}_{i2}^+(t) = \int_t^\infty |\Phi_+(t)\Phi_+^{-1}(s)|\,|V_{i2}(s)|ds, \qquad i = 1, 2, \ t \geqslant T \geqslant T_0.$$

Теорема 2. *Пусть все решения системы* (2.3) *ограничены при* $t \to \infty$, *а система* (2.4) *не имеет других решений, стремящихся к нулю при* $t \to \infty$, *кроме* $\varphi_+(t) \equiv 0$; *пусть выполняются условия*

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{t \geqslant T} \mathcal{J}_{11}^-(t, T) = 0, \qquad \sup_{t \geqslant T_0} \mathcal{J}_{12}^-(t, T_0) < +\infty,$$

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{J}_{22}^+(t) = 0, \qquad \sup_{t \geqslant T_0} \mathcal{J}_{12}^+(t) < +\infty,$$

и пусть для достаточно большого T существует единственное решение задачи (2.5). *Тогда граничное условие* (2.2) *является допустимым граничным условием на бесконечности для решений системы* (2.1); *оно эквивалентно для достаточно больших t линейному соотношению*

$$x_+(t) = \alpha(t)x_-(t), \qquad t \geqslant T, \tag{2.7}$$

где $(n-m) \times m$*-матрица* $\alpha(t)$ *есть указанное решение задачи* (2.5).

Следствие 1. Пусть все нетривиальные решения системы (2.4) не ограничены при $t \to \infty$, а в остальном выполняются предположения теоремы 2. Тогда граничное условие (2.2) для решений системы (2.1) эквивалентно условию

$$|x(t)| \quad \text{ограничено при } t \to \infty.$$

Следствие 2. Пусть все решения системы (2.3) стремятся к нулю при $t \to \infty$, а в остальном выполняются предположения теоремы 2; пусть, кроме того, выполняются условия

$$\lim_{t \to \infty} \int_t^\infty |\Phi_-^{-1}(t)\Phi_-(s)||V_{11}(s)|ds = 0,$$

$$\sup_{t \geqslant T_0} \int_t^\infty |\Phi_-^{-1}(t)\Phi_-(s)||V_{12}(s)|ds < +\infty.$$

Тогда граничное условие (2.2) для решений системы (2.1) эквивалентно условию

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0.$$

§ 3. Системы с диагональной главной частью

Пусть в системе (2.1) будет

$$B_-(t) = \operatorname{diag}(\lambda_1^-(t), \ldots, \lambda_m^-(t)),$$

$$B_+(t) = \operatorname{diag}(\lambda_1^+(t), \ldots, \lambda_{n-m}^+(t)), \qquad t \geqslant T_0.$$

Теорема 3. *Пусть существует неотрицательная скалярная функция* $\varrho(t)$, *измеримая на* $[T_0, \infty)$ *и суммируемая на каждом конечном замкнутом подынтервале* $[a, b] \subset [T_0, \infty)$, *такая, что* $\int_{T_0}^\infty \varrho(t)dt = +\infty$ *и выполняются неравенства*

(3.1а) $\operatorname{Re}\lambda_k^-(t) \leqslant -\varrho(t)$ *почти всюду на* $[T_0, \infty)$, $k = 1, 2, \ldots, m$,

(3.1б) $\operatorname{Re}\lambda_j^+(t) \geqslant \varrho(t)$ *почти всюду на* $[T_0, \infty)$, $j = 1, 2, \ldots, n-m$;

пусть $V(t)$ *в системе* (2.1) *такова, что*

$$|V_{ij}(t)| = o(\varrho(t)), \quad t \to \infty, \; i \geqslant j, \; i, j = 1, 2,$$
$$|V_{12}(t)| = O(\varrho(t)), \quad t \to \infty. \tag{3.2}$$

Тогда справедливы заключения теорем 1, 2 *и следствий* 1, 2.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия*:

(3.3а) $\operatorname{Re}\lambda_k^-(t) \leqslant 0$ *почти всюду на* $[T_0, \infty)$, $k = 1, 2, \ldots, m$,

(3.3б) $\operatorname{Re}\lambda_j^+(t) \geqslant 0$ *почти всюду на* $[T_0, \infty)$, $j = 1, 2, \ldots, n-m$,

(3.4) $$\int_{T_0}^{\infty} |V_{ij}(t)|\,dt < +\infty \quad \textit{для } i, j = 1, 2.$$

Тогда справедливы заключения теорем 1, 2.

Замечание 3. В отличие от (3.1) в предположениях (3.3) возможно, что хотя бы для одного k, $1 \leqslant k \leqslant m$, и хотя бы одного j, $1 \leqslant j \leqslant n-m$, справедливо $\int_{T_0}^{\infty}(-\operatorname{Re}\lambda_k^-(t))dt < +\infty$, $\int_{T_0}^{\infty}\operatorname{Re}\lambda_j^+(t)dt < +\infty$.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия* (3.1а), (3.3б), *условия* (3.2) *при* $j = 1$, $i = 1, 2$ *и условия* (3.4) *при* $j = 2$, $i = 1, 2$. *Тогда справедливы заключения теорем* 1, 2 *и следствия* 2.

Теорема 6. *Пусть выполняются условия* (3.1б), (3.3а), *условия* (3.2) *при* $i = 2$, $j = 1, 2$ *и условия* (3.4) *при* $i = 1$, $j = 1, 2$. *Тогда справедливы заключения теорем* 1, 2 *и следствия* 1.

§ 4. Системы с особенностями типа полюса

Пусть в системе (1.1) матрица $A(t)$ непрерывна на $[T_0, \infty)$ и имеет при больших t заданное асимптотические представление

(4.1) $$A(t) \sim t^r(A_0 + A_1/t + A_2/t^2 + \ldots),$$

где $-1 \leqslant r$ — целое число, A_k — постоянные матрицы, $A_k \in L(C^n)$, $k = 0, 1, \ldots$. Тип особенности на бесконечности определяется типом особой точки в нуле системы линейных о.д.у., порожденной подстановкой в (1.1) $\tau = 1/t$ (см. [11–13]). Отсюда имеем, что точка $t = \infty$ при $r \leqslant -2$ является обыкновенной, при $r = -1$ — регулярной особой точкой (соответствует полюсу первого порядка матрицы порожденной системы), при $r \geqslant 0$ — иррегулярной особой точкой (соответствует полюсу порядка $r+2 \geqslant 2$ матрицы порожденной системы).

1. Классы допустимых граничных условий. Остановимся на вопросе, какие C_∞^m определяют допустимые условия (1.2) для решений системы (1.1), где матрица $A(t)$ имеет указанное асимптотическое разложение (4.1).

1.1 *Регулярная особая точка.* Для случая $r = -1$ может быть сформулирован достаточно полный ответ.

Теорема 7. *При* $r = -1$ *подпространства* C_∞^m, *порождающие допустимые граничные условия* (1.2), *и с точностью до эквивалентных только они,* *могут быть получены следующим образом. Зададим любое вещественное число* ν. *Возьмем все корневые векторы матрицы* A_0, *соответствующие* с.з. λ, *для которых* $\operatorname{Re}\lambda < \nu$. *Для каждого* с.з. λ, *для которого* $\operatorname{Re}\lambda = \nu$, *в соответствующем корневом пространстве* $C(\lambda)$ *возьмем какое-либо одно подпространство* $\tilde{C}$, *удовлетворяющее условиям* $(A_0 - \lambda E_n)\tilde{C} = 0$ и $(A_0 - \lambda E_n)C(\lambda) \cap \tilde{C} = 0$. *В качестве* C_∞^m *возьмем подпространство, порожденное всеми указанными векторами.*

Замечания. 4. Пусть на прямой $\operatorname{Re}\lambda = \nu$ нет с.з. A_0. Пусть C_∞^m — подпространство, порожденное всеми корневыми векторами A_0, отвечающими с.з. λ, для которых $\operatorname{Re}\lambda < \nu$. Тогда (1.2) для решений (1.1) эквивалентно условию

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\nu} x(t) = 0.$$

5. Пусть на прямой $\operatorname{Re}\lambda = \nu$ матрица A_0 имеет с.з., кратность которых совпадает с размерностью собственного подпространства, отвечающего данному с.з. Пусть $\tilde{C}$ — подпространство, порожденное *всеми* собственными векторами (с.в.), отвечающими с.з. A_0, для которых $\operatorname{Re}\lambda = \nu$ ($\tilde{C}$ — объединение всех собственных подпространств). Тогда (1.2) эквивалентно условию

$$|t^{-\nu} x(t)| \quad \text{ограничено при } t \to \infty.$$

Пусть теперь $\tilde{C}$ — подпространство, порожденное *всеми* с.в. A_0, отвечающими *вещественным* с.з. λ таким, что $\lambda = \nu$. Тогда (1.2) эквивалентно условию

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\nu} x(t) \quad \text{существует и конечен.}$$

Более тонкие замечания см. в [3, 4].

1.2. *Иррегулярная особая точка.* Для случая $r \geqslant 0$ следующие две теоремы выделяют достаточно широкие классы допустимых граничных условий.

ТЕОРЕМА 8. *Зададим любое вещественное число* ν. *Пусть все* с.з. *матрицы* A_0, *лежащие на прямой* $\operatorname{Re}\lambda = \nu$, *простые. Будем рассматривать матрицу* $W(t)$, $W(t) = A(t) - A_0$, *при больших* t *как возмущение* A_0. *Определим по теории возмущений поправки к этим* с.з., *учитывающие члены до* $1/t^{r+1}$ *включительно*:

$$\lambda(t) = \lambda^{(0)} + \lambda^{(1)}/t + \ldots + \lambda^{(r+1)}/t^{r+1} + o(1/t^{r+1}), \qquad t \to \infty, \ \operatorname{Re}\lambda^{(0)} = \nu.$$

Возьмем все корневые векторы A_0, *соответствующие тем* с.з. λ, *для которых* $\operatorname{Re}\lambda < \nu$. *Зададим любое вещественное число* ν_1; *возьмем все* с.в. *матрицы* A_0, *соответствующие тем* с.з. λ, *для которых* $\operatorname{Re}\lambda = \nu$, $\operatorname{Re}\lambda^{(1)} < \nu_1$. *Зададим любое вещественное число* ν_2; *возьмем все* с.в. *ма-*

трицы A_0, *соответствующие тем* с.з. λ, *для которых* $\mathrm{Re}\,\lambda = \nu$, $\mathrm{Re}\,\lambda^{(1)} = \nu_1$, $\mathrm{Re}\,\lambda^{(2)} < \nu_2 \ldots$ *Зададим любое вещественное число* ν_{r+1}; *возьмем все* с.в. *матрицы* A_0, *соответствующие тем* с.з. λ, *для которых* $\mathrm{Re}\,\lambda = \nu$, $\mathrm{Re}\,\lambda^{(1)} = \nu_1, \ldots, \mathrm{Re}\,\lambda^{(r)} = \nu_r$, $\mathrm{Re}\,\lambda^{(r+1)} < \nu_{r+1}$. *Возьмем, наконец, какие-нибудь* (*например, все или никакие*) с.в. *матрицы* A_0, *соответствующие тем* с.з. λ, *для которых* $\mathrm{Re}\,\lambda = \nu$, $\mathrm{Re}\,\lambda^{(1)} = \nu_1, \ldots, \mathrm{Re}\,\lambda^{(r+1)} = \nu_{r+1}$. *Тогда подпространство* C^m_∞, *порожденное всеми указанными векторами, порождает допустимое граничное условие* (1.2) *для решений системы* (1.1).

Замечания. 6. Пусть на прямой $\mathrm{Re}\,\lambda = \nu$ нет с.з. A_0. В качестве C^m_∞ возьмем подпространство, порожденное всеми корневыми векторами A_0, отвечающими с.з. λ, для которых $\mathrm{Re}\,\lambda < \nu$. Тогда (1.2) будет эквивалентно условию

$$\lim_{t\to\infty} x(t)\exp\left(\frac{-\nu t^{r+1}}{r+1}\right) = 0. \tag{4.2}$$

7. Пусть на прямой $\mathrm{Re}\,\lambda = \nu$ есть только некратные с.з. A_0. Пусть мы строим подпространство C^m_∞ по рецепту теоремы 6, причем на последнем шаге возьмем *все* с.в. A_0, соответствующие тем с.з. λ, для которых $\mathrm{Re}\,\lambda = \nu$, $\mathrm{Re}\,\lambda^{(1)} = \nu_1, \ldots, \mathrm{Re}\,\lambda^{(r+1)} = \nu_{r+1}$. Тогда (1.2) будет эквивалентно условию

$$\left| x(t)t^{-\nu_{r+1}}\exp\left(-\frac{\nu t^{r+1}}{r+1} - \sum_{k=1}^{r} \frac{\nu_k t^{r+1-k}}{r+1-k}\right)\right| \quad \text{ограничено при } t\to\infty.$$

Если же на последнем шаге мы возьмем только *все* те с.в. A_0, которые соответствуют *вещественным* λ таким, что $\lambda = \nu$, $\lambda^{(1)} = \nu_1, \ldots, \lambda^{(r+1)} = \nu_{r+1}$, то (1.2) будет эквивалентно условию

$$\lim_{t\to\infty} x(t)t^{-\nu_{r+1}}\exp\left(-\frac{\nu t^{r+1}}{r+1} - \sum_{k=1}^{r} \frac{\nu_k t^{r+1-k}}{r+1-k}\right)$$

существует и конечен.

Теорема 9. *Пусть в разложении* (4.1) *будет* $A_1 = A_2 = \ldots = A_{\varkappa(r+1)} = 0$, *где* $\varkappa \geqslant 1$. *Зададим любое вещественное число* ν. *Пусть* с.з. *матрицы* A_0, *лежащим на прямой* $\mathrm{Re}\,\lambda = \nu$, *соответствуют жордановы клетки порядка не более* $\varkappa$. *Разделим эти* с.з. *на две группы: к первой отнесем те* с.з. λ, $\mathrm{Re}\,\lambda = \nu$, *для которых кратность совпадает с размерностью собственного подпространства, отвечающего этому* с.з.; *ко второй отнесем остальные. Возьмем все корневые векторы матрицы* A_0, *соответствующие тем* с.з. λ, *для которых* $\mathrm{Re}\,\lambda < \nu$, *и собственные подпространства, отвечающие каким-нибудь* (*например, всем или никаким*) с.з. λ, *для которых* $\mathrm{Re}\,\lambda = \nu$ *и которые попали в первую группу. Тогда подпространство* C^m_∞, *порожденное всеми указанными векторами, порождает допустимое граничное условие* (1.2) *для решений системы* (1.1).

Замечания. 8. Пусть C_∞^m — подпространство, порожденное только всеми корневыми векторами A_0, отвечающими тем с.з. λ, для которых $\operatorname{Re}\lambda < \nu$. Тогда граничное условие (1.2) эквивалентно условию (4.2).

9. Пусть $\varkappa = 1$. Возьмем все корневые векторы A_0, соответствующие тем с.з. λ, для которых $\operatorname{Re}\lambda < \nu$, и *все* с.в. A_0, соответствующие тем с.з. λ, для которых $\operatorname{Re}\lambda = \nu$. Тогда если в качестве C_∞^m взять подпространство, порожденное всеми указанными векторами, то граничное условие (1.2) будет эквивалентно условию

$$\left| x(t)\exp\left(\frac{-\nu t^{r+1}}{r+1}\right)\right| \quad \text{ограничено при } t\to\infty.$$

10. Пусть $\varkappa = 1$. Возьмем все корневые векторы A_0, соответствующие тем с.з. λ, для которых $\operatorname{Re}\lambda < \nu$, и *все* те с.в. A_0, которые соответствуют *вещественным* с.з. λ таким, что $\lambda = \nu$. Тогда если в качестве C_∞^m взять подпространство, порожденное всеми указанными векторами, то граничное условие (1.2) будет эквивалентно условию

$$\lim_{t\to\infty} x(t)\exp\left(-\frac{\nu t^{r+1}}{r+1}\right) \quad \text{существует и конечен.}$$

Другие теоремы и замечания см. в [3, 4].

2. Перенос допустимых граничных условий из бесконечности. Остановимся теперь на свойствах дифференциального уравнения, служащего для переноса граничного условия (1.2) из бесконечности в конечную точку.

Пусть подпространство C_∞^m построено по рецепту одной из теорем 7, 8 или 9. Перейдем к новому базису, в котором $A_0 = A_0^- \oplus A_0^+$, $A_0^- \in \boldsymbol{L}(C^m)$, $A_0^+ \in \boldsymbol{L}(C^{n-m})$, $\operatorname{Re}\lambda(A_0^-) \leqslant \nu$, $\operatorname{Re}\lambda(A_0^+) \geqslant \nu$ и первые m базисных векторов — базис в C_∞^m (такой базис всегда существует). Соответственно представим

$$x(t) = \left\|\begin{array}{c} x_-(t) \\ \hline x_+(t)\end{array}\right\| \begin{array}{l}\}m \\ \}n-m\end{array}, \qquad W(t) = \left\|\begin{array}{c|c} W_{11}(t) & W_{12}(t) \\ \hline W_{21}(t) & W_{22}(t)\end{array}\right\| \begin{array}{l}\}m \\ \}n-m\end{array},$$

где $W(t) = A(t) - A_0$.

В новом базисе подпространство C_∞^m задается уравнением

$$x_+ = 0, \qquad x \in C^n,$$

а условие (1.2) переходит в условие

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x_+(t)}{|x_-(t)|} = 0. \tag{4.3}$$

Теорема 10. *Условие* (4.3) *эквивалентно для достаточно больших* t *линейному соотношению*

$$x_+(t) = \alpha(t) x_-(t), \qquad t \geqslant T. \tag{4.4}$$

Здесь $(n-m)\times m$ — *матрица* $\alpha(t)$ *является решением сингулярной задачи Коши*

$$t^r\alpha' = A_0^+\alpha-\alpha A_0^- + W_{22}(t)\alpha-\alpha W_{11}(t) -\alpha W_{12}(t)\alpha + W_{21}(t), \qquad T\leqslant t<\infty, \tag{4.5а}$$

$$\lim_{t\to\infty}\alpha(t)=0. \tag{4.5б}$$

Такое решение для достаточно больших t *существует, единственно и представляется асимптотическим (сходящимся, если* $r=-1$ *и ряд для* $A(t)$ *сходится) рядом*

$$\alpha(t)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k/t^k. \tag{4.6}$$

Величины α_k *определяются из* (4.5а) *формальной подстановкой разложений* (4,1), (4.6); *такая подстановка приводит к невырожденным системам линейных алгебраических уравнений для определения* $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots$

Замечание 11. Если выполнены предположения теоремы 9 и подпространство C^m_∞ построено по рецепту этой теоремы, то в разложении (4.6) будет

$$\alpha_1=\alpha_2=\ \ldots\ =\alpha_{\varkappa(r+1)}=0.$$

Замечание 12. Задача Коши (4.5) при больших t справа налево решается численно устойчиво, так как полагая $t=\infty$ в правой части уравнения (4.5а), получим

$$t^{-r}\alpha'=Z(\alpha), \qquad T\leqslant t<\infty,$$

где $Z(\alpha)=A_0^+\alpha-\alpha A_0^-$, $\operatorname{Re}\lambda(Z)\geqslant 0$. Поэтому малые погрешности, возникшие, например, в результате того, что в (4.6) взято лишь конечное число членов, в процессе дальнейших вычислений не могут существенно расти.

§ 5. Системы уравнений второго порядка

Рассматриваемые здесь задачи являются практически важными и приводят к новым наглядным ситуациям, представляющим самостоятельный интерес.

1. Условия излучения на бесконечности. Пусть на полубесконечном интервале задана система n линейных о.д.у. второго порядка

$$y''+B(t)y=0, \qquad T_0\leqslant t<\infty, \tag{5.1}$$

где для больших t матрица $B(t)$ представима асимптотическим рядом

$$B(t)\sim\sum_{k=0}^{\infty}B_k/t^k. \tag{5.2}$$

Здесь B_k — постоянные матрицы, $B_k \in \boldsymbol{L}(C^n)$, $k = 0, 1, \ldots$, причем B_0 имеет вид

$$B_0 = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n), \qquad \mu_j > 0, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Пусть требуется выделить решения системы (5.1), удовлетворяющие на бесконечности условиям излучения

$$\lim_{t \to \infty} \frac{y'(t) - iCy(t)}{|y(t)| + |y'(t)|} = 0, \tag{5.3}$$

где $C = \operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_n)$, $C^2 = B_0$.

Теорема 11. *Пусть $\mu_j \neq \mu_k$ при $j \neq k$, а c_j удовлетворяют неравенствам*

$$c_j \operatorname{Im}(B_1)_{jj} \geqslant 0$$

для всех $j = 1, 2, \ldots, n$, где $(B_1)_{jj}$ — диагональные элементы матрицы B_1. Тогда условия излучения (5.3) являются допустимым граничным условием на бесконечности для решений системы (5.1). Для достаточно больших t предельное условие (5.3) эквивалентно линейному соотношению

$$y'(t) = \beta(t) y(t), \qquad t \geqslant T,$$

где $\beta(t)$, β: $[T, \infty) \to \boldsymbol{L}(C^n)$, есть решение сингулярной задачи Коши

$$\beta' + \beta^2 + B(t) = 0, \qquad T \leqslant t < \infty, \tag{5.4а}$$

$$\lim_{t \to \infty} \beta(t) = iC. \tag{5.4б}$$

Решение задачи (5.4) для достаточно больших t существует, единственно и представимо асимптотическим рядом

$$\beta(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k / t^k,$$

где βk определяются рекуррентно:

$$\beta_0 = iC,$$

$$\beta_0 \beta_k + \beta_k \beta_0 = -\beta_k + (k-1)\beta_{k-1} - \sum_{j=1}^{k-1} \beta_j \beta_{k-j}, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Замечание 13. Пусть в разложении (5.2) будет $B_1 = 0$. Пусть μ_j не обязательно попарно различны, а c_j таковы, что из равенства $\mu_j = \mu_k$ следует равенство $c_j = c_k$. Тогда остается справедливым заключение теоремы 11.

2. Более общие задачи. 2.1. *Системы с иррегулярной особенностью на бесконечности.* Общая система n уравнений второго порядка с иррегулярной особенностью на бесконечности имеет вид

$$t^{-\sigma}y''+t^{-\sigma/2}A(t)y'+B(t)y=0,\qquad T_0\leqslant t<\infty, \tag{5.5}$$

где $-1\leqslant\sigma$ — целое число, $A(t)$ и $B(t)$ при больших t представимы асимптотическими рядами

$$A(t)\sim\sum_{j=0}^{\infty}A_j/t^{j/2},\qquad B(t)\sim\sum_{j=0}^{\infty}B_j/t^{j/2},$$

A_j, B_j — постоянные матрицы, A_j, $B_j\in L(C^n)$, $j=0,1,\ldots$.

Пусть требуется выделить решения системы (5.5), удовлетворяющие на бесконечности условию

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t^{-\sigma/2}y'(t)-Ly(t)}{|y(t)|+|t^{-\sigma/2}y'(t)|}=0, \tag{5.6}$$

где L — заданная постоянная матрица, $L\in L(C^n)$.

Выделение класса постоянных матриц L, задающих допустимое условие (5.6), тесно связано с некоторыми свойствами решений квадратного матричного уравнения

$$\Lambda^2+A_0\Lambda+B_0=0. \tag{5.7}$$

Теорема 12. *Пусть* $\{\Lambda_+,\Lambda_-\}$ *— пара решений* (5.7), $\Lambda_\pm\in L(C^n)$, *такая, что* $\operatorname{Re}\lambda(\Lambda_+)>\nu$, $\operatorname{Re}\lambda(\Lambda_-)<\nu$, *где* ν *— вещественное число. Тогда при* $L=\Lambda_-$ *предельное условие* (5.6) *является допустимым граничным условием на бесконечности для решений системы* (5.5) *и эквивалентно требованию*

$$\lim_{t\to\infty}y(t)\exp\left(-\frac{\nu t^{\sigma/2+1}}{\sigma/2+1}\right)=0. \tag{5.8}$$

Для достаточно больших t *условие* (5.6), *или, что то же, условие* (5.8), *эквивалентно линейному соотношению*

$$t^{-\sigma/2}y'(t)=\beta(t)y(t),\qquad t\geqslant T,$$

где $\beta(t)$, β: $[T,\infty)\to L(C^n)$, *есть решение сингулярной задачи Коши*

$$t^{-\sigma/2}\beta'+\beta^2+[A(t)+t^{-\sigma/2-1}\frac{\sigma}{2}E_n]\beta+B(t)=0,\qquad T\leqslant t<\infty, \tag{5.9а}$$

$$\lim_{t\to\infty}\beta(t)=\Lambda_-. \tag{5.9б}$$

Решение задачи (5.9) *для достаточно больших* t *существует, единственно и представимо асимптотическим рядом*

$$\beta(t)\sim\sum_{j=0}^{\infty}\beta_j/t^{j/2},$$

где β_j определяются рекуррентно:

$$\beta_0 = \Lambda_-,$$

$$\beta_0\beta_j+\beta_j\beta_0+A_0\beta_j = -B_j-\sum_{e=1}^{j-1}\beta_e\beta_{j-e}-\sum_{e=1}^{j}A_e\beta_{j-e}$$

$$+(j/2-\sigma-1)\times\begin{cases}\beta_{j-\sigma-2}, & j-\sigma-2\geqslant 0,\\ 0, & j-\sigma-2<0, j=1, 2, \dots\end{cases}$$

Следствие 3. Пусть в системе (5.5) будет $A_0 = 0$, а B_0 не имеет с.з. на неотрицательной вещественной полуоси. Тогда при $L = \Lambda_-$, $\Lambda_-^2 = -B_0$, $\operatorname{Re}\lambda(\Lambda_-) < 0$, граничное условие (5.6) допустимое и эквивалентно требованию

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

Примеры других задач вида (5.5), (5.6) см. в [3, 4], где также изучены некоторые свойства решений уравнения (5.7).

2.2. *Системы с регулярной особенностью в нуле.* Здесь для бо́льшей наглядности особую точку перенесем в ноль.

Общая система n уравнений второго порядка с регулярной особенностью в нуле имеет вид

(5.10) $$\tau^2 y''+\tau D(\tau)y'+C(\tau)y = 0, \quad 0<\tau\leqslant\tau_0,$$

где $D(\tau)$ и $C(\tau)$ разлагаются при малых τ в сходящиеся ряды

$$D(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k\tau^k, \qquad C(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\tau^k,$$

D_k, C_k — постоянные матрицы, D_k, $C_k\in \mathbf{L}(C^n)$, $k = 0, 1, \dots$

Пусть требуется выделить решения системы (5.10), удовлетворяющие в нуле предельному условию

(5.11) $$\lim_{\tau\to 0}\frac{\tau y'(\tau)-Ly(\tau)}{|y(\tau)|+|\tau y'(\tau)|} = 0,$$

где L — заданная постоянная матрица, $L\in \mathbf{L}(C^n)$.

Класс постоянных матриц L, задающих допустимые граничные условия (5.11), определяется решениями квадратного матричного уравнения

(5.12) $$\Lambda^2-(E_n-D_0)\Lambda+C_0 = 0.$$

Теорема 13. *Пусть Λ_+ и Λ_- — два решения* (5.12), $\Lambda_\pm\in \mathbf{L}(C^n)$, *такие, что либо справедливо*

(5.13) $$\operatorname{Re}\lambda(\Lambda_+) > \nu, \quad \operatorname{Re}\lambda(\Lambda_-)\leqslant\nu \quad (\text{I } \textit{случай}),$$

либо справедливо

$$\mathrm{Re}\,\lambda(\Lambda_+) \geqslant \nu, \qquad \mathrm{Re}\,\lambda(\Lambda_-) < \nu \qquad (\text{II } \textit{случай}), \tag{5.14}$$

где ν *— вещественное число, причем во* II *случае каждому* с.з. $\lambda(\Lambda_+)$, *лежащему на прямой* $\mathrm{Re}\,\lambda = \nu$, *соответствует столько* с.в., *какова кратность этого* с.з. *Тогда при* $L = \Lambda_+$ *граничное условие* (5.11) *допустимое и эквивалентно в* I *случае требованию*

$$\lim_{\tau\to 0} \tau^{-\nu} y(\tau) = 0,$$

а во II *случае — требованию*

$$|\tau^{-\nu} y(\tau)| \quad \textit{ограничено при } \tau \to 0.$$

Граничное условие (5.11) *при* $L = \Lambda_+$ *выделяет в* $2n$*-мерном пространстве всех решений* (5.10) *линейное* n*-мерное подпространство, задаваемое для малых* τ *уравнением*

$$\tau y'(\tau) = \beta(\tau) y(\tau), \qquad \tau \leqslant \hat{\tau},$$

где $\beta(\tau)$, β: $[0, \hat{\tau}] \to L(C^n)$, *есть решение сингулярной задачи Коши*

$$\tau\beta' + \beta^2 + [D(\tau) - E_n]\beta + C(\tau) = 0, \qquad 0 < \tau \leqslant \hat{\tau}, \tag{5.15а}$$

$$\lim_{\tau\to 0} \beta(\tau) = \Lambda_+. \tag{5.15б}$$

Решение задачи (5.15) *для достаточно малых* τ *существует, единственно и разлагается в сходящийся ряд*

$$\beta(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \tau^k, \qquad \tau \leqslant \hat{\tau},$$

где β_k *определяются рекуррентно:*

$$\beta_0 = \Lambda_+,$$

$$\beta_0\beta_k + \beta_k\beta_0 + [D_0 + (k-1)E_n]\beta_k = -C_k - \sum_{e=1}^{k-1} \beta_e \beta_{k-e} - \sum_{e=1}^{k} D_e \beta_{k-e}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Более тонкие примеры см. в [3, 4].

2.3. *Системы со степенным вырождением по параметру.* Интерес представляет изучение различных ситуаций для систем о.д.у. на бесконечном интервале с сингулярно входящим в уравнения большим параметром. Ограничимся рассмотрением упрощенного примера.

Определение III. Будем говорить, что функция $\xi(t, \mu)$, непрерывная по совокупности переменных (t, μ) в области $[T_0, \infty) \times [\mu_0, \infty)$, *представима* *при больших* μ *асимптотическим рядом* $\zeta(t)\sum_{k=p}^{\infty}\xi^{(k)}(t)/\mu^k$ *равномерно по* t *при* $t \geqslant T_0$, если для любого целого числа Q, $Q \geqslant p$, существует постоянная C_Q, $C_Q > 0$, такая, что справедлива оценка

$$\left|\xi(t,\mu)-\zeta(t)\sum_{k=p}^{Q-1}\xi^{(k)}(t)/\mu^k\right| \leqslant \frac{C_Q|\zeta(t)|}{\mu^Q} \tag{5.16}$$

для всех $t \geqslant T_0$ и всех достаточно больших μ (под случаем $Q = p$ подразумевается отсутствие суммы в неравенстве (5.16)).

Пусть на полубесконечном интервале задана система n линейных о.д.у. второго порядка, зависящих от вещественного положительного параметра μ:

$$\mu^{-2\sigma}y''+\mu^{-\sigma}A(t,\mu)y'+B(t,\mu)y=0, \qquad T_0 \leqslant t < \infty,\ \mu \geqslant \mu_0. \tag{5.17}$$

Здесь $1 \leqslant \sigma$ — целое число, матрицы $A(t,\mu)$, $B(t,\mu)$ непрерывны по (t,μ) на $[T_0,\infty)\times[\mu_0,\infty)$ и при больших μ разлагаются в асимптотические ряды

$$\begin{aligned}(A(t,\mu)-A_0) &\sim \varphi_A(t)\sum_{k=1}^{\infty}A_k(t)/\mu^k,\\ (B(t,\mu)-B_0) &\sim \varphi_B(t)\sum_{k=1}^{\infty}B_k(t)/\mu^k\end{aligned} \tag{5.18}$$

равномерно по t, $t \geqslant T_0$, где A_0, B_0 — постоянные матрицы, $A_0, B_0 \in \boldsymbol{L}(\boldsymbol{C}^n)$, а скалярные функции $\varphi_A(t)$, $\varphi_B(t)$ и элементы матриц $A_k(t)$, $B_k(t)$ суть бесконечно дифференцируемые функции на $[T_0,\infty)$, $k = 1, 2, \ldots$

Пусть требуется выделить решения системы (5.17), удовлетворяющие на бесконечности условию

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mu^{-\sigma}y'(t,\mu)-Ly(t,\mu)}{|y(t,\mu)|+|\mu^{-\sigma}y'(t,\mu)|}=0 \tag{5.19}$$

при каждом μ, $\mu \geqslant \mu_0$, где L — заданная постоянная матрица, $L \in \boldsymbol{L}(\boldsymbol{C}^n)$.

Теорема 14. *Пусть* Λ_+ *и* Λ_- *— два решения квадратного матричного уравнения* $\Lambda^2+A_0\Lambda+B_0=0$, $\Lambda_\pm \in \boldsymbol{L}(\boldsymbol{C}^n)$, *такие, что* $\operatorname{Re}\lambda(\Lambda_+) > 0$, $\operatorname{Re}\lambda(\Lambda_-) < 0$; *пусть коэффициенты разложений* (5.18) *удовлетворяют условиям*

$$|\varphi_A(t)| = o(1), \quad |\varphi_B(t)| = o(1), \quad t\to\infty,$$

$$\left|\frac{d^q}{dt^q}(\varphi_A(t)A_k(t))\right| = o(1), \quad t\to\infty,$$

$$\left|\frac{d^q}{dt^q}(\varphi_B(t)B_k(t))\right| = o(1), \quad t\to\infty,\ k = 1, 2, \ldots, q = 0, 1, 2, \ldots$$

Тогда при $L = \Lambda_-$ *предельное условие* (5.19) *является допустимым граничным условием на бесконечности для решений системы* (5.17); *условие* (5.19) *выполняется равномерно по* μ, $\mu \geqslant \mu_0$, *и эквивалентно требованию*

$$\lim_{t\to\infty} y(t, \mu) = 0 \quad \text{равномерно по } \mu, \ \mu \geqslant \mu_0.$$

Граничное условие (5.19) *выделяет в* $2n$*-мерном пространстве всех решений* (5.17) *линейное* n*-мерное подпространство, задаваемое для всех достаточно больших* t *уравнением*

$$\mu^{-\sigma} y'(t, \mu) = \beta(t, \mu)\, y(t, \mu), \qquad t \geqslant T,\ \mu \geqslant \mu_0,$$

где $\beta(t, \mu)$ *есть решение сингулярной задачи Коши с параметром*

(5.20а) $$\mu^{-\sigma}\beta' + \beta^2 + A(t, \mu)\beta + B(t, \mu) = 0, \qquad T \leqslant t < \infty,$$

(5.20б) $$\lim_{t\to\infty} \beta(t, \mu) = \Lambda_- \quad \text{при каждом } \mu,\ \mu \geqslant \mu_0.$$

Решение задачи (5.20) *для достаточно больших* t *существует, единственно, удовлетворяет условию* (5.20б) *равномерно по* μ, $\mu \geqslant \mu_0$, *и при больших* μ *разлагается в асимптотический ряд*

(5.21) $$\beta(t, \mu) \sim \Lambda_- + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(t)/\mu^k$$

равномерно по t, $t \geqslant T$, *где коэффициенты* $\beta_k(t)$ *определяются рекуррентно*:

$$\Lambda_-\beta_k + \beta_k\Lambda_- + A_0\beta_k = -\varphi_B B_k - \varphi_A A_k \Lambda_-$$
$$-\sum_{e=1}^{k-1} \beta_e\beta_{k-e} - \varphi_A \sum_{e=1}^{k-1} A_e\beta_{k-e} - \begin{cases} \beta'_{k-\sigma}, & k > \sigma, \\ 0, & k \leqslant \sigma,\ k = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

ряд (5.21) *является асимптотическим при фиксированном* t *и* $\mu \to \infty$ *и при фиксированном* μ *и* $t \to \infty$, *т.е. является двойной асимптотикой решения задачи* (5.20); *коэффициенты* $\beta_k(t)$ *суть бесконечно дифференцируемые функции на* $[T, \infty)$, *удовлетворяющие условиям*

$$\left|\frac{d^q}{dt^q}\beta_k(t)\right| = o(1), \qquad t \to \infty,\ k = 1, 2, \ldots,\ q = 0, 1, \ldots.$$

Достаточно общую теорию подобных задач см. в [5].

Литература

[1] А. А. Абрамов, *О граничных условиях в особой точке для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 11, № 1, (1971), 275-278.

[2] Н. Б. Конюхова, *О допустимых граничных условиях в иррегулярной особой точке для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 23, № 4, (1983), 806-824.

[3] А. А. Абрамов, Н. Б. Конюхова, *Перенос допустимых граничных условий из особой точки для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Сообщ. по прикл. матем. ВЦ АН СССР, Москва, 1985.

[4] A. A. Abramov and N. B. Konyukhova, *Transfer of admissible boundary conditions from a singular point for systems of linear ordinary differential equations*, Soviet J. Numer. Math. Modelling, 1 (4), (1986), 245–265.

[5] Н. Б. Конюхова, Т. В. Пак, *К переносу допустимых граничных условий из бесконечности для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с большим параметром*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 27, № 4, (1987), 847–866.

[6] А. А. Абрамов, К. Балла, Н. Б. Конюхова, *Перенос граничных условий из особых точек для систем обыкновенных дифференциальных уравнений*, Сообщ. по вычисл. матем. ВЦ АН СССР, Москва, 1981.

[7] А. А. Абрамов, К. Балла, Н. Б. Конюхова, *Устойчивые начальные многообразия и сингулярные краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений*, Banach Center Publ. 13, PWN, Warsaw, 1984, 319–351.

[8] А. А. Абрамов, Н. Б. Конюхова, *О допустимых граничных условиях в особой точке типа полюса для систем обыкновенных дифференциальных уравнений*, Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики, Наука, Новосибирск, 1983, 28–33.

[9] А. А. Абрамов, *О численном решении некоторых алгебраических задач, возникающих в теории устойчивости*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 24, № 3, (1984), 339–347.

[10] Х. Д. Икрамов, *Численное решение матричных уравнений*, Наука, Москва 1984.

[11] Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, Изд-во ин. лит., Москва, 1958.

[12] В. Вазов, *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, Мир. Москва, 1968.

[13] М. В. Федорюк, *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, Москва, 1983.

Presented to the Semester
Numerical Analysis and Mathematical Modelling
February 25 — May 29, 1987