COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. LIII 1987 FASC. 2

SUR UN PROBLÈME DE RICCERI

PAR

ZBIGNIEW GRANDE (BYDGOSZCZ)

B. Ricceri m'a posé la question suivante:

QUESTION. Soient (T, ϱ_1), (X, ϱ_2) et (Y, d) trois espaces métriques et $F(T, Y)$ l'espace des fonctions définies dans T et à valeurs dans Y, considéré avec la métrique

$$h(p, q) = \min\{1, \sup_{t\in T} d(p(t), q(t))\}$$

et $g\colon X \to F(T, Y)$ une fonction borélienne de classe α et avec $g(X)$ séparable. Posons, pour $(t, x) \in T\times X$,

$$f(t, x) = g(x)(t).$$

En supposant que, pour $x \in X$, la fonction $f(\cdot, x)$ soit borélienne de classe β, avec $\alpha \leqslant \beta$, peut-on dire que la fonction f est elle-même borélienne de classe β?

La réponse affirmative résulte du suivant:

THÉORÈME. *La fonction f de Question est borélienne de classe β.*

Démonstration. Cas I. $\alpha = 0$ et $\beta = 0$. Démontrons que la fonction f est continue en tout point $(t, x) \in T\times X$. Fixons un point $(t_0, x_0) \in T\times X$ et un nombre $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < 1/2$). Les fonctions $t \to f(t, x_0)$ et g étant continues, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que

$$d(f(t, x_0), f(t_0, x_0)) < \varepsilon/2 \quad \text{lorsque } \varrho_1(t, t_0) < \delta$$

et

$$h(g(x), g(x_0)) < \varepsilon/2 \quad \text{lorsque } \varrho_2(x, x_0) < \delta.$$

Si $\varrho_1(t, t_0) < \delta$ et $\varrho_2(x, x_0) < \delta$, on a

$$d(f(t, x), f(t_0, x_0)) \leqslant d(f(t, x), f(t, x_0)) + d(f(t, x_0), f(t_0, x_0))$$

$$\leqslant \sup_{t \in T} d\big(f(t, x), f(t, x_0)\big) + d\big(f(t, x_0), f(t_0, x_0)\big)$$
$$= h\big(g(x), g(x_0)\big) + d\big(f(t, x_0), f(t_0, x_0)\big) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

ce qui termine la preuve dans ce cas.

Cas II. $\alpha = 0$ et $\beta > 0$. Afin d'établir que la fonction f est de classe β, il suffit de prouver que la fonction f est la limite de suite uniformément convergente de fonctions de classe β. Fixons un nombre $\varepsilon > 0$. L'espace $g(X)$ étant séparable, il existe un ensemble $A = \{p_1, p_2, \ldots\} \subset g(X)$ dénombrable et dense dans $g(X)$. Désignons par S_n $(n = 1, 2, \ldots)$ la sphère ouverte de centre p_n et de rayon $\varepsilon/4$ et par U_n $(n = 1, 2, \ldots)$ l'ensemble $g^{-1}(S_n)$. Remarquons que tous les ensembles U_n $(n = 1, 2, \ldots)$ sont ouverts. Si l'ensemble

$$V_n = U_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} U_k$$

n'est pas vide, fixons un point $x_n \in V_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ et posons $f_\varepsilon(t, x) = g(x_n)(t)$ lorsque $x \in V_n \neq \emptyset$ et $t \in T$. La fonction f_ε est borélienne de classe β. De plus, on a, pour tout (t, x),

$$d\big(f_\varepsilon(t, x), f(t, x)\big) < \varepsilon.$$

En effet, fixons un point $(t, x) \in T \times X$. Il existe un indice n_0 tel que $x \in V_{n_0}$. Par conséquent,

$$d\big(f_\varepsilon(t, x), f(t, x)\big) = d\big(g(x_{n_0})(t), g(x)(t)\big)$$
$$\leqslant \sup_{t \in T} d\big(g(x_{n_0}(t), g(x)(t)\big) = h\big(g(x_{n_0}), g(x)\big) < \varepsilon/2$$

et la preuve dans le cas II est achevée.

Cas III. $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\alpha \leqslant \beta$. De même que dans le cas II je démontrerai que la fonction f est la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions de classe β. Puisque l'espace $g(X)$ est séparable, la fonction g est la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions g_n $(n = 1, 2, \ldots)$ de classe α telles que tous les ensembles $g_n(X) \subset g(X)$ sont isolés(¹). Fixons le nombre $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < 1)$. Il existe une fonction $g_1\colon X \to g(X)$ de classe α telle que l'ensemble $g_1(X)$ est isolé et $h\big(g_1(x), g(x)\big) < \varepsilon/8$ pour tout $x \in X$. Rangeons tous les éléments de l'ensemble $g_1(X)$ en une suite $(p_1, p_2, \ldots)$ telle que $p_i \neq p_j$ lorsque $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, \ldots)$ et posons

$$A_n = g_1^{-1}(p_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

(¹) Voir C. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa 1957, p. 294.

Les ensembles A_n ($n = 1, 2, \ldots$) sont ambigus de classe α et disjoints deux-à-deux. La fonction

$$f_\varepsilon(t, x) = g_1(x)(t) \quad \text{lorsque } (t, x) \in T \times X$$

est borélienne de classe β et on a, de plus,

$$d\big(f_\varepsilon(t, x), f(t, x)\big) = d\big(g_1(x)(t), g(x)(t)\big)$$
$$\leqslant \sup_{t \in T} d\big(g_1(x)(t), g(x)(t)\big) = h\big(g_1(x), g(x)\big) < \varepsilon/8,$$

ce qui termine la preuve.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
ÉCOLE PEDAGOGIQUE SUPÉRIEURE
DE BYDGOSZCZ

Reçu par la Rédaction le 28. 2. 1983