

Über die speziellen s -Vektorfelder auf den Sphären

von M. KUCHARZEWSKI (Katowice)

Einleitung. Die erste und doch schon weitgehende Aussage über die tangentialen Vektorfelder auf den Sphären folgt aus dem Satz von Poincaré-Brouwer (vgl. [2], S. 548-555). Diese stellt fest, dass es auf den Sphären der geraden Dimension kein tangenciales stetiges und nullfreies Vektorfeld gibt. Unabhängig davon beschäftigten sich mit diesem Problem viele andere Autoren wie z.B. Hopf, Stiefel [9], [10] und Eckmann [3], [4], [5]. Alle Zahlen s , für welche ein tangenciales lineares s -Vektorfeld auf der Sphäre S^{n-1} existiert, wurden mit Hilfe eines Satzes von Hurwitz [6], [7], Radon [8] und Eckmann [5] bestimmt. Zu diesem hat dann Eckmann [5] einen ergänzenden Satz bewiesen, der die Anzahl der nicht-äquivalenten linearen s -Vektorfelder auf S^{n-1} bei den gegebenen s und n bestimmt. Auf diese Weise wurden alle solche Felder und zwar bis auf Äquivalenz gefunden. Endlich hat Adams im Jahre 1962 gezeigt, dass es kein tangenciales stetiges s -Vektorfeld auf S^{n-1} gibt, wenn $s \geq \rho(n)$ ist, wo $\rho(n)$ eine so genannte Hurwitz-Radonsche Zahl bedeutet. Dadurch wurde die Frage über die Existenz der stetigen tangentialen s -Vektorfelder auf den Sphären vollständig gelöst.

Hier betrachte ich spezielle s -Vektorfelder auf den Sphären d.h. die s -Vektorfelder, die zu den $(s+1)$ -Vektorfeldern nicht ergänzt werden können.

Die vorliegende Arbeit besteht aus zwei Teilen. In dem ersten sind die grundlegenden Definitionen und Sätze versammelt, die im weiteren benutzt werden. § 1 enthält die Definition des linearen tangentialen s -Vektorfeldes und den Satz 1.1, der den Zusammenhang zwischen diesen Feldern und Matrizen darbietet. Obwohl dieser Satz bekannt ist, wird er hier bewiesen, weil ich ihn in der Literatur nicht getroffen habe und weil er andererseits eine grundlegende Bedeutung für die ganze Arbeit hat. Im § 2 wird der Satz von Hurwitz-Radon-Eckmann und im § 3 der Satz von Eckmann über die Anzahl der nicht äquivalenten s -Vektorfelder auf S^{n-1} gegeben, Diese zwei Sätze sind hier nicht bewiesen, weil man die Beweise in der Literatur [5] finden kann.

Im zweiten Teil beschäftige ich mich mit den speziellen s -Vektorfeldern. Insbesondere werden die Sätze über die Existenz, die Anzahl und die Konstruktion dieser Felder bewiesen. Mit Hilfe dieser gebe ich ein Verfahren zur Bestimmung aller nicht äquivalenten s -Vektorfelder auf den Sphären. Für die Werte n von 1 bis 64 sind diese auf einem Diagramm dargestellt. Der zweite Teil enthält im allgemeinen neue Ergebnisse. Sie ermöglichen — glaube ich — in die Struktur der linearen s -Vektorfelder besser einzudringen.

Gewisse Ergebnisse über die speziellen Vektorfelder hat auch Vrănceanu [11] erhalten.

1. LINEARE TANGENTIALE VEKTORFELDER AUF DEN SPHÄREN

§ 1. Das lineare tangentielle s -Vektorfeld. Im n -dimensionalen Euklidischen Raume R^n sei eine Sphäre S^{n-1} mit dem Radius 1 und mit dem Zentrum im Ursprung des Koordinatensystems gegeben. Bezeichnen wir mit

$$(x, y) = \sum_{\alpha=1}^n x^\alpha y^\alpha$$

das skalare Produkt der Vektoren $x(x^\alpha)$ und $y(y^\alpha)$, $\alpha = 1, 2, \dots, n$, so kann die Gleichung der Sphäre S^{n-1} in der Form

$$(1.1) \quad (x, x) = 1$$

geschrieben werden.

Wir sagen, dass ein *tangentiales s -Vektorfeld* auf S^{n-1} definiert ist, wenn s -Einheitsvektoren

$$(1.2) \quad v_i = v_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, s$$

jedem Punkte x der Sphäre S^{n-1} zugeordnet sind, die miteinander orthogonal und zur S^{n-1} tangential sind. Dann müssen die Funktionen (1.2) die nachstehenden Relationen

$$(1.3) \quad (v_i, v_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, s,$$

$$(1.4) \quad (v_i, x) = 0$$

erfüllen. Sind (1.2) hinsichtlich x linear homogen, so wird das s -Vektorfeld *linear* genannt. In diesem Falle haben sie die Form

$$(1.5) \quad v_i = K_i x,$$

wo K die quadratischen Matrizen der Ordnung n sind und v bzw. x die einspaltige Matrix $\|v^a\|$ bzw. $\|x^a\|$ bedeutet.

Das lineare *s*-Vektorfeld ist also durch die Matrizen

$$(1.6) \quad K_i, \quad i = 1, 2, \dots, s$$

vollständig bestimmt. Diese können offenbar nicht beliebig sein, sondern müssen gewisse Bedingungen erfüllen, die im nachstehenden Satz enthalten sind.

SATZ 1.1. *Die Formel (1.5) bestimmt dann und nur dann ein lineares tangentiales s-Vektorfeld auf S^{n-1} , wenn die Matrizen (1.6) die Bedingungen*

$$(1.7) \quad K_i^2 = -E,$$

$$(1.8) \quad K_i^T = -K_i,$$

$$(1.9) \quad K_i \cdot K_j = -K_j \cdot K_i, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, s$$

erfüllen.

E bedeutet die Einheitsmatrix der Ordnung n und K^T die zur K transponierte Matrix.

Falls $s = 1$ ist, d.h. handelt es sich um ein lineares tangentiales 1-Vektorfeld, so sind die Bedingungen (1.9) wegzulassen.

Beweis. Um die Rechnungen zu vereinfachen, werden wir im weiteren das skalare Produkt (x, y) auch in der Matrizenform

$$(x, y) = x^T \cdot y = y^T \cdot x$$

schreiben.

Zuerst zeigen wir, dass (1.7)-(1.9) hinreichend sind. Darum müssen wir beweisen, dass die Vektoren (1.5) ein orthonormales System bilden und dass diese zum normalen Vektor x der Sphäre S^{n-1} orthogonal sind.

In der Tat haben wir einerseits für $i \neq j$

$$(1.10) \quad (v_i, v_j) = v_i^T v_j = (K_i x)^T K_j x = x^T K_i^T K_j x = -x^T K_j K_i x$$

und andererseits

$$(1.11) \quad (v_j, v_i) = x^T K_j^T K_i x = -x^T K_i K_j x = x^T K_i K_j x.$$

Aus (1.10) und (1.11) ergibt sich

$$(1.12) \quad (v_i, v_j) = 0, \quad i \neq j.$$

Falls $i = j$ ist, erhält man die Relation

$$(1.13) \quad (v, v) = -x^T K^2 x = x^T x = 1$$

weil x auf S^{n-1} liegt. Die Vektoren v bilden also ein orthonormales System.

Um zu beweisen, dass diese Vektoren zur S^{n-1} tangential sind, betrachten wir die folgenden skalaren Produkte

$$(1.14) \quad (v, x) = v^T x = x^T K^T x = -x^T K x,$$

$$(1.15) \quad (x, v) = x^T \cdot v = x^T K x$$

(1.14) und (1.15) haben als Folge

$$(1.16) \quad (v, x) = 0,$$

was bedeutet, dass v zur S^{n-1} tangential sind. Die Bedingungen (1.7)-(1.9) sind also hinreichend. Die Notwendigkeit zeigen wir folgendermassen: Aus $(v, v) = 1$ ergibt sich für $x \in S^{n-1}$

$$(1.17) \quad \begin{aligned} x^T K^T K x &= x^T x, \\ x^T (K^T K - E) x &= 0, \\ K^T K &= E, \quad i = 1, 2, \dots, s. \end{aligned}$$

Aus $(v, x) = 0 = (x, v)$ erhält man weiter

$$(1.18) \quad \begin{aligned} x^T K^T x &= -x^T K x, \\ x^T (K^T + K) x &= 0, \\ K^T &= -K. \end{aligned}$$

Aus $(v, v) = 0 = (v, v)$ haben wir für $i \neq j$

$$(1.19) \quad \begin{aligned} x^T K^T K x &= -x^T K^T K x, \\ x^T (K^T K + K^T K) x &= 0, \\ K^T K &= -K^T K. \end{aligned}$$

Die Bedingungen (1.17)-(1.19) sind mit (1.7)-(1.9) äquivalent. Der Beweis ist auf diese Weise beendet.

Mit Hilfe des Satzes 1.1 ist die Bestimmung des linearen tangentialen *s*-Vektorfeldes auf S^{n-1} auf die Bestimmung die *s*-Tupel der Matrizen (1.6) zurückgeführt, die (1.7)-(1.9) erfüllen.

§ 2. Die Anzahl *s* der Matrizen, die den Bedingungen (1.7)-(1.9) genügen, bestimmt ein Satz von Hurwitz [6], [7], Radon [8] und Eckmann [5]. Bei unseren Bezeichnungen kann er so formuliert werden:

SATZ 2.1. *Schreibt man n in der Form*

$$(2.1) \quad n = u \cdot 2^{4\alpha + \beta}$$

(*u* — ungerade; $\beta = 0, 1, 2, 3$), *so gibt es dann und nur dann s, n — reihige Matrizen, die den Gleichungen (1.7)-(1.9) genügen, wenn*

$$(2.2) \quad s \leq 8\alpha + 2^\beta - 1 = \rho(n) - 1$$

ist.

Mit Hilfe der Sätze 1.1 und 2.1 ist das Problem der Existenz eines linearen tangentialen *s*-Vektorfeldes auf jeder Sphäre vollständig gelöst.

Der Satz 2.1 wurde von Adams [1] auf die beliebigen stetigen tangentialen *s*-Vektorfelder folgendermassen verallgemeinert:

SATZ 2.2. *Ist (2.2) nicht erfüllt, dann gibt es überhaupt kein stetiges tangenciales *s*-Vektorfeld auf S^{n-1} .*

Auf diese Weise wurde auch das Problem der Existenz beliebiger, nicht notwendig linearer, tangentialer und stetiger *s*-Vektorfelder auf den Sphären vollständig gelöst.

§ 3. Es entsteht jetzt die Frage: wieviel gibt es lineare tangentiale *s*-Vektorfelder auf der Sphäre S^{n-1} , wenn *s* natürlich (2.2) erfüllt? Wir bemerken zuerst, dass es unendlich viele *s*-Tupel von Matrizen

$$(3.1) \quad (\underset{1}{\tilde{K}}, \dots, \underset{s}{\tilde{K}})$$

gibt, die (1.7)-(1.9) erfüllen, wenn nur ein solches *s*-Tupel (1.6) existiert. Sie können nämlich folgendermassen

$$(3.2) \quad \underset{i}{\tilde{K}} = P \underset{i}{K} P^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

gebildet werden, wo *P* beliebige orthogonale Matrix ist. Um also die Frage über die Anzahl der linearen tangentialen *s*-Vektorfelder beantworten zu können, führen wir zunächst eine Äquivalenzrelation in der Menge der *s*-Tupel von Matrizen \mathfrak{M}_s ein. Diese kann offenbar auch in

der Menge der linearen tangentialen s -Vektorfelder auf der Sphäre S^{n-1} bestimmt werden.

DEFINITION 3.1. Zwei s -Tupel von Matrizen (K) und (\tilde{K}) werden *äquivalent* genannt, wenn es eine orthogonale Matrix P gibt, so dass (3.2) erfüllt ist.

Die Anzahl der nichtäquivalenten s -Tupel von Matrizen, die bei gegebenen n und s , (1.7)-(1.9) erfüllen, bestimmt der von Eckmann [5] als Nachsatz zum 2.1 bewiesene Satz:

SATZ 3.1. *Genügt s der Bedingung (2.2), so gibt es für*

$$(3.3) \quad s+1 \not\equiv 0 \pmod{4}$$

bis auf Äquivalenz genau eine Lösung, für

$$(3.4) \quad s+1 \equiv 0 \pmod{4}$$

dagegen $m+1$ verschiedene, wo m entweder

$$(3.5) \quad m = \frac{n}{2^{(s-1)/2}}, \quad s+1 \equiv 0 \pmod{8}$$

oder

$$(3.6) \quad m = \frac{n}{2^{(s+1)/2}}, \quad s+1 \equiv 4 \pmod{8}$$

gleich ist.

2. SPEZIELLE VEKTORFELDER AUF DEN SPHÄREN

§ 4. Die Existenz und die Eindeutigkeit der linearen tangentialen s -Vektorfelder auf den Sphären S^{n-1} bestimmen die Sätze 2.1 und 3.1. Eine Methode zur Konstruktion dieser wurde unter anderen auch in der Arbeit von Vranceanu [11] gegeben. Im weiteren beschäftige ich mich mit den so genannten speziellen Vektorfeldern. Über diese werden einige Sätze bewiesen, welche gewisse Informationen über die Existenz und den Aufbau dieser Felder enthalten. Mit Hilfe dieser Sätze können alle speziellen Vektorfelder wenigstens für kleine Werte n bestimmt werden. Die im allgemeinen nicht linearen speziellen Vektorfelder untersuchte auch Vranceanu in [11].

DEFINITION 4.1. Ein lineares tangenciales s -Vektorfeld nennen wir *speziell*, wenn es zum linearen tangentialen $(s+1)$ -Vektorfeld nicht ergänzt werden kann.

Aus der Formel (2.2) ergibt sich trivialerweise, dass die speziellen s -Vektorfelder auf den Sphären existieren, nämlich dann, wenn in (2.2)

das Gleichheitszeichen auftritt. Der Satz 3.1 zeigt weiter, dass diejenigen Vektorfelder auch dann existieren, wenn s die Ungleichung

$$(4.1) \quad s < 8\alpha + 2^\beta - 1$$

erfüllt. Im folgenden wird eine einfache Methode zur Konstruktion dieser Felder dargestellt.

Zuerst muss ich aber einige Hilfssätze über die Matrizen beweisen.

HILFSSATZ 4.1. *Es seien s -Matrizen (1.6) gegeben, die (1.7)-(1.9) erfüllen. Das Produkt*

$$(4.2) \quad K = \underset{1}{K} \cdot \underset{2}{K} \dots \underset{s}{K}$$

dieser Matrizen erfüllt dann und nur dann gemeinsam mit (1.6) dieselben Relationen, d.h. es gilt

$$(4.3) \quad K^2 = -E,$$

$$(4.4) \quad K^T = -K,$$

$$(4.5) \quad K \underset{i}{K} = -\underset{i}{K} K,$$

wenn

$$(4.6) \quad s = 4t + 2, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

ist.

Beweis. Ich zeige zuerst, dass (4.6) notwendig ist. Wir nehmen also an, dass (4.3)-(4.5) erfüllt sind. Aus der Definition von K (4.2) erhalten wir folgende Relationen:

$$(4.7) \quad K^T = (-1)^{s(s+1)/2} K,$$

$$(4.8) \quad K^2 = (-1)^{s(s+1)/2} E,$$

$$(4.9) \quad \underset{i}{K} K = (-1)^{s-i+1} \underset{1}{K} \dots \underset{i-1}{K} \cdot \underset{i+1}{K} \dots \underset{s}{K},$$

$$(4.10) \quad \underset{i}{K} K = (-1)^i \underset{1}{K} \dots \underset{i-1}{K} \cdot \underset{i+1}{K} \dots \underset{s}{K}.$$

Aus (4.9) und (4.10) ergibt sich weiter

$$(4.11) \quad \underset{i}{K} K = (-1)^{s+1} \underset{1}{K} \cdot \underset{i}{K}.$$

Sind (4.3) und (4.4) erfüllt, so muss $s(s+1)/2$, wegen (4.7) und (4.8) ungerade sein

$$(4.12) \quad \frac{s(s+1)}{2} = 2l + 1.$$

Überdies folgt aus (4.5) und (4.11), dass s gerade ist

$$(4.13) \quad s = 4k.$$

In (4.13) muss k ungerade sein

$$(4.14) \quad k = 2t + 1$$

Andernfalls wäre $s(s+1)/2 = k(2k+1)$ gerade, was (4.12) widerspricht. Setzt man (4.14) in (4.13), so erhält man (4.6) und die Notwendigkeit wurde bewiesen.

Hat s die Form (4.6), so sind (4.3)-(4.5) auf Grund der Relationen (4.7), (4.8) und (4.11), erfüllt. (4.6) ist also auch hinreichend. Auf diese Weise ist der Beweis beendet.

Sind $s = 4t + 2$, $t = 0, 1, 2, \dots$ Matrizen (1.6) gegeben, die (1.7)-(1.9) erfüllen, dann kann man also eine weitere Matrix K mit Hilfe der Formel (4.2) finden, so dass die Matrizen K, \dots, K, K den Bedingungen (1.7)-(1.9) genügen. Bei diesen Voraussetzungen gilt

HILFSSATZ 4.2. *Es gibt keine weitere Matrix mehr, die mit K, \dots, K, K dieselben Bedingungen erfüllt.*

Beweis. Zum indirekten Beweis nehmen wir an, dass es eine Matrix \tilde{K} gibt, die mit den Matrizen K, \dots, K, K die Bedingungen (1.7)-(1.9) erfüllt. \tilde{K} ist mit K schiefvertauschbar. Da $K = K \dots K$ und s gerade ist, muss \tilde{K} mit K vertauschbar sein. Das widerspricht aber der Voraussetzung, dass \tilde{K} und K schiefvertauschbar sind. Der Beweis ist also beendet.

Aus den obigen Hilfssätzen erhält man ohne weiteres den nachstehenden Satz über die linearen tangentialen s -Vektorfelder auf den Sphären.

SATZ 4.1. *Ist ein tangenciales lineares s -Vektorfeld vorhanden, so kann es zu demjenigen $(s+1)$ ergänzt werden, wenn s die Bedingung (4.6) erfüllt.*

Die Matrizen, die dieses $(s+1)$ -Vektorfeld bestimmen, haben die Form $K_1, K_2, \dots, K_s, K = K \cdot K \dots K$, wo $K_i, i = 1, 2, \dots, s$ diese Matrizen bezeichnen, welche dem angegebenen s -Vektorfeld zugeordnet sind. Dieses $(s+1)$ -Vektorfeld ist speziell.

§ 5. Jetzt möchte ich einige Bemerkungen über die Anzahl der nicht äquivalenten speziellen s -Vektorfelder machen. Sei s eine Zahl der Form (4.6), die (2.2) erfüllt. Bezeichnen wir mit

$$(5.1) \quad K_i, \dots, K_s$$

beliebige *s*-Matrizen, die (1.7)-(1.9) erfüllen. Dann kann man eine zusätzliche Matrix

$$(5.2) \quad K = \underset{1}{K} \dots \underset{s}{K}$$

bilden, die mit (5.1) denselben Bedingungen genügt. Ausser der Matrix (5.2) hat dieselben Eigenschaften die Matrix

$$(5.3) \quad \tilde{K} = -K .$$

Auf diese Weise haben wir wenigstens zwei (*s*+1)-Tupeln von Matrizen

$$(5.4) \quad \mathfrak{S}(\underset{1}{K}, \dots, \underset{s}{K}, K) ,$$

$$(5.5) \quad \mathfrak{S}(\underset{1}{K}, \dots, \underset{s}{K}, -K)$$

die (1.7)-(1.9) erfüllen und die zu demjenigen (*s*+2)-Tupel nicht ergänzt werden können. Die Matrizen (5.4) und (5.5) bestimmen also spezielle tangentielle (*s*+1)-Vektorfelder auf S^{n-1} .

Wir zeigen noch, dass die (*s*+1)-Tupeln von Matrizen (5.4) und (5.5) in Sinne der Definition 4.1 nicht äquivalent sind.

Zum indirekten Beweis nehmen wir an, dass (5.4) und (5.5) äquivalent sind. Wir bezeichnen mit *P* die orthogonale Matrix, welche diese Äquivalenz feststellt. *P* muss also die Relationen

$$(5.6) \quad \underset{i}{K} P = P \underset{i}{K} , \quad i = 1, 2, \dots, s ,$$

$$(5.7) \quad -KP = PK$$

erfüllen. Überdies folgt aus (5.6), dass *P* mit allen $\underset{i}{K}$ vertauschbar ist. Sie muss also wegen (5.2) und (4.6) auch mit $\underset{i}{K}$ vertauschbar sein

$$(5.8) \quad KP = PK .$$

Die Bezeichnungen (5.7) und (5.8) haben $KP = 0$ als Folge. Da $\underset{i}{K}$ nicht singulär ist, ergibt sich $P = 0$ daraus, was der Orthogonalität von *P* widerspricht. Wir haben also folgenden Satz bewiesen:

SATZ 5.1. *Für jedes s der Form (4.6), das (2.2) erfüllt, gibt es wenigstens zwei lineare tangentielle (s+1)-Vektorfelder, die speziell und miteinander nicht äquivalent sind. Diese sind durch die (s+1)-Tupeln (5.4) und (5.5) von Matrizen bestimmt.*

§ 6. Im folgenden ist ein Verfahren dargestellt, mit Hilfe dessen die Lösungen von (1.7)-(1.9) der Ordnung *m*·*n* gebildet werden können, wenn diejenigen der Ordnung *n* bekannt sind.

Sind r -Matrizen der Ordnung n

$$(6.1) \quad \left(\underset{1}{K}, \dots, \underset{r}{K} \right)$$

gegeben, die (1.7)-(1.9) erfüllen, so kann man ohne weiteres r -Matrizen der Ordnung $m \cdot n$ bilden, die auch (1.7)-(1.9) erfüllen, und zwar in der folgenden quasidiagonalen Form

$$\mathbf{K} = \left\{ \underset{j}{\overset{(1)}{K}}, \dots, \underset{j}{\overset{(m)}{K}} \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

$\left\{ \underset{j}{\overset{(1)}{K}}, \dots, \underset{j}{\overset{(m)}{K}} \right\}$ bedeutet eine quasidiagonale Matrix, die auf der Hauptdiagonale die Matrizen $\underset{j}{K}$ besitzt. Der obere Index bezeichnet die Position der Matrix $\underset{j}{K}$ auf der Hauptdiagonale.

Sind zwei r -Tupeln von Matrizen (6.1) und

$$(6.2) \quad \left(\underset{1}{\tilde{K}}, \dots, \underset{r}{\tilde{K}} \right)$$

gegeben, so kann man die $(m+1)$ folgenden r -Tupeln von Matrizen der Ordnung $m \cdot n$ bilden

$$(6.3) \quad \underset{j}{\overset{\varrho}{K}} = \left\{ \underset{j}{\overset{(1)}{K}}, \dots, \underset{j}{\overset{(\varrho)}{K}}, \underset{j}{\overset{(\varrho+1)}{K}}, \dots, \underset{j}{\overset{(m)}{K}} \right\}_{j=1,2,\dots,r}^{\varrho=0,1,\dots,m}.$$

Diese haben auf den ϱ ersten Stellen der Hauptdiagonale die Matrizen aus (6.2) und auf den übrigen aus (6.1). Bei festem ϱ erfüllen die Matrizen (6.3) die Bedingungen (1.7)-(1.9). Sie bilden also ein r -Tupel ($j = 1, 2, \dots, r$) von Lösungen der Gleichungen (1.7)-(1.9). Für $\varrho = 0, 1, \dots, m$ erhalten wir also $(m+1)$ derjenigen Lösungen. Auf diese Weise kann man aus je zwei Lösungen (6.1) und (6.2) der Ordnung n die $m+1$ Lösungen (6.3) der Ordnung $m \cdot n$ bilden.

Insbesondere aus den zwei Lösungen (5.4) und (5.5) erhalten wir, analog wie im (6.3), $m+1$ Lösungen der Ordnung $m \cdot n$

$$(6.4) \quad \underset{i}{\overset{\varrho}{K}} = \left\{ \underset{i}{\overset{(1)}{\tilde{K}}}, \dots, \underset{i}{\overset{(\varrho)}{\tilde{K}}}, \underset{i}{\overset{(\varrho+1)}{K}}, \dots, \underset{i}{\overset{(m)}{K}} \right\}_{i=1,2,\dots,s+1}^{\varrho=0,1,\dots,m}.$$

$\underset{i}{\tilde{K}}$ bedeutet i -te Matrix von (5.5) und $\underset{i}{K}$ diejenige von (5.4). D.h. es ist

$$(6.5) \quad \underset{i}{\tilde{K}} = \underset{i}{K}, \quad i = 1, 2, \dots, s$$

und

$$(6.6) \quad \underset{s+1}{\tilde{K}} = -\underset{s+1}{K} = -\underset{s+1}{K}.$$

Über diese Matrizen tupeln zeigen wir den nachstehenden Hilfssatz.

HILFSSATZ 6.1. *Je zwei verschiedene unter den Lösungen (6.4) sind nicht äquivalent.*

Beweis. Wir nehmen in Betracht ein von (6.4) verschiedenes Tupel von Matrizen der Form

$$(6.7) \quad \overset{\sigma}{\mathbf{K}}_i = \{ \overset{(1)}{\mathbf{K}}_i, \dots, \overset{(\sigma)}{\mathbf{K}}_i, \overset{(\sigma+1)}{\mathbf{K}}_i, \dots, \overset{(m)}{\mathbf{K}}_i \}.$$

Da (6.4) und (6.7) verschieden sind, gilt die Ungleichung

$$(6.8) \quad \varrho \neq \sigma.$$

Aus (6.5) und (6.6) folgen die Relationen

$$(6.9) \quad \overset{\varrho}{\mathbf{K}}_i = \overset{\sigma}{\mathbf{K}}_i, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

$$(6.10) \quad \overset{\varrho}{\mathbf{K}}_{s+1} = \{ -\overset{(1)}{\mathbf{K}}_{s+1}, \dots, -\overset{(\varrho)}{\mathbf{K}}_{s+1}, \overset{(\varrho+1)}{\mathbf{K}}_{s+1}, \dots, \overset{(m)}{\mathbf{K}}_{s+1} \}, \quad \overset{\sigma}{\mathbf{K}}_{s+1} = \{ -\overset{(1)}{\mathbf{K}}_{s+1}, \dots, -\overset{(\sigma)}{\mathbf{K}}_{s+1}, \overset{(\sigma+1)}{\mathbf{K}}_{s+1}, \dots, \overset{(m)}{\mathbf{K}}_{s+1} \}.$$

Zum indirekten Beweis nehmen wir an, dass (6.4) und (6.7) äquivalent sind. Es sei P diejenige orthogonale Matrix, die diese Äquivalenz bestimmt. P muss also die Gleichungen

$$(6.11) \quad P \overset{\varrho}{\mathbf{K}}_i = \overset{\sigma}{\mathbf{K}}_i P, \quad i = 1, 2, \dots, s+1$$

erfüllen. Stellen wir P in der Form

$$P = \|P_{\alpha\beta}\|, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, m$$

dar, wo $P_{\alpha\beta}$ die Matrizen der Ordnung n sind, so ergibt sich aus (6.11) und (6.9), dass $P_{\alpha\beta}$ mit $\overset{(1)}{\mathbf{K}}_i, \dots, \overset{(s)}{\mathbf{K}}_i$ vertauschbar sind: $P_{\alpha\beta} \overset{(1)}{\mathbf{K}}_i = \overset{(1)}{\mathbf{K}}_i P_{\alpha\beta}$, $i = 1, 2, \dots, s$; $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, m$. Da s gerade ist, müssen $P_{\alpha\beta}$ auch mit $\overset{(s)}{\mathbf{K}}_i$ vertauschbar sein

$$(6.12) \quad P_{\alpha\beta} \overset{(s)}{\mathbf{K}}_i = \overset{(s)}{\mathbf{K}}_i P_{\alpha\beta}.$$

Jetzt betrachten wir die letzte der Relationen (6.11). Sie hat die Form

$$(6.13) \quad P \cdot \overset{\varrho}{\mathbf{K}}_{s+1} = \overset{\sigma}{\mathbf{K}}_{s+1} \cdot P.$$

Die linke Seite von (6.13) stellt die Matrix $\overset{\varrho}{P \mathbf{K}}_{s+1}$ dar, derer $n\varrho$ erste Spalten mit (-1) multipliziert sind. Die rechte ist dagegen die $\overset{\sigma}{\mathbf{K}}_{s+1} \cdot P$,

derer $n\sigma$ erste Reihen mit (-1) multipliziert sind. Da $P\overset{0}{K}_{s+1} = \overset{0}{K}_{s+1}P$ wegen (6.12) ist, müssen alle Matrizen

$$P_{rs}, \quad r = 1, 2, \dots, \sigma; \quad s = \varrho + 1, \dots, m$$

und

$$P_{pq}, \quad p = \sigma + 1, \dots, m; \quad q = 1, 2, \dots, \varrho$$

gleich Null sein. Die Matrix P ist nicht singular. Die Summe der Dimensionen der verschwindenden Rechtecke muss also nicht grösser als $m \cdot n$ sein. D.h. es gilt

$$m - \varrho + \sigma \leq m$$

und gleichzeitig

$$m - \sigma + \varrho \leq m.$$

Daraus folgt $\varrho = \sigma$. Das widerspricht aber (6.8). Der Hilfssatz ist also bewiesen.

Dieser kann für die linearen Vektorfelder so umformuliert werden:

SATZ 6.1. *Für jedes s der Form (4.6), die der Ungleichung (2.2) genügt, gibt es $(m+1)$ lineare tangentielle nicht äquivalente $(s+1)$ -Vektorfelder auf den Sphären S^{mn-1} . Diese sind durch die Matrizen (6.4) bestimmt.*

§ 7. Es entsteht jetzt die Frage, welche von den $(m+1)$ im Satz 6.1 beschriebenen $(s+1)$ -Vektorfeldern zu einem $(s+2)$ -Vektorfeld ergänzt werden können. Um diese Frage zu beantworten, beweisen wir zuerst den entsprechenden Hilfssatz über die $(s+1)$ -Tupeln von Matrizen (6.4).

HILFSSATZ 7.1. *Das $(s+1)$ -Tupel von Matrizen (6.4) kann dann und nur dann zu einem $(s+2)$ -Tupel ergänzt werden, wenn*

$$(7.1) \quad \varrho = m/2$$

ist.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass (7.1) notwendig ist. Wir nehmen also an, dass (6.4) zum $(s+2)$ -Tupel von Matrizen ergänzt werden kann. D.h. es gibt eine Matrix B , die mit (6.4) gemeinsam die Bedingungen (1.7)-(1.9) erfüllt. Wir stellen B in der Form

$$(7.2) \quad B = \|B_{\alpha\beta}\|, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, m,$$

dar, wo $B_{\alpha\beta}$ quadratische Matrizen der Ordnung n sind. Da (7.2) mit $\overset{\varrho}{K}_i$, $i = 1, 2, \dots, s$, schiefvertauschbar ist, müssen alle $B_{\alpha\beta}$ mit $\overset{\varrho}{K}_i$, $i = 1, 2, \dots, s$, auch schiefvertauschbar sein:

$$(7.3) \quad \overset{\varrho}{K}_i B_{\alpha\beta} = -B_{\alpha\beta} \overset{\varrho}{K}_i.$$

Daraus folgt, dass $B_{\alpha\beta}$ mit $\overset{\varrho}{K}_i$ vertauschbar ist:

$$(7.4) \quad \overset{\varrho}{K}_i B_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} \overset{\varrho}{K}_i.$$

Gleichfalls muss B mit der Matrix $\overset{0}{\underset{s+1}{K}}$ schiefvertauschbar sein

$$(7.5) \quad \overset{0}{\underset{s+1}{BK}} = -\overset{0}{\underset{s+1}{KB}}.$$

Die linke Seite von (7.5) stellt folgende Matrix

$$(7.6) \quad \overset{0}{\underset{s+1}{BK}} = B \left\{ -\overset{(1)}{K}, \dots, -\overset{(\varrho)}{K}, \overset{\varrho+1}{K}, \dots, \overset{(m)}{K} \right\}$$

dar. Sie entsteht, wenn man die $n\varrho$ ersten Spalten in der Matrix $\overset{0}{\underset{s+1}{BK}}$ mit (-1) multipliziert. Die rechte Seite ist dagegen der Matrix $\overset{0}{\underset{s+1}{KB}}$ gleich, deren die $n(m-\varrho)$ letzten Reihen mit (-1) multipliziert sind. Da die Matrizen $\overset{0}{\underset{s+1}{BK}}$ und $\overset{0}{\underset{s+1}{KB}}$ wegen (7.4) miteinander gleich sind, erhält man daraus die folgenden Relationen

$$2\varrho \leq m, \quad 2(m-\varrho) \leq m$$

die bedeuten, dass die Matrix B nicht singulär ist. Aus diesen ergibt sich $\varrho = m/2$ und der Beweis ist beendet. Aus dem nachstehenden Hilfssatz 7.2 folgt ohne weiteres, dass (7.1) auch hinreichend ist. Er wird jetzt formuliert und bewiesen.

Sind $s = 4t + 2$ Matrizen der Ordnung n (5.1) gegeben, die (1.7)-(1.9) erfüllen, und bezeichnen wir mit K das Produkt dieser (5.2), so können zwei $(s+1)$ -Tupel von Matrizen derselben Ordnung n (5.4) und (5.5) gebildet werden (Hilfssatz 4.1, Satz 4.1), die (1.7)-(1.9) erfüllen und nicht äquivalent sind. Aus diesen kann man drei nicht äquivalente $(s+1)$ -Tupel von Matrizen der Ordnung $2n$ (Hilfssatz 6.1, $m = 2$) erhalten, unter denen auch das folgende

$$(7.7) \quad \overset{1}{\underset{i}{K}} = \left\{ \overset{1}{\underset{i}{K}}, \overset{1}{\underset{i}{K}} \right\}, \quad \overset{1}{\underset{s+1}{K}} = \left\{ -\overset{1}{\underset{s+1}{K}}, \overset{1}{\underset{s+1}{K}} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, s$$

auftritt.

HILFSSATZ 7.2. *Es gibt mindestens eine Matrix der Ordnung $2n$, die mit (7.7) gemeinsam (1.7)-(1.9) erfüllt. Sie hat die Form*

$$(7.8) \quad \mathbf{K} = \left\| \left\| \begin{array}{c|c} 0 & K \\ \hline K & 0 \end{array} \right\| \right\|.$$

In der Tat ist es leicht zu prüfen, dass die Matrix (7.8) alle erfordernten Eigenschaften hat.

Um die Existenz der Matrix B im Hilfssatz 7.1 zu zeigen, wenn (7.1) erfüllt ist, genügt es nur zu bemerken, dass die Matrizen $\bar{K} = \{\overset{(1)}{K}_i, \dots, \overset{(s)}{K}_i\}$, $i = 1, 2, \dots, s$; $\varrho = m/2$, alle Voraussetzungen des Hilfssatzes 7.2 erfüllen.

§ 8. Die vorigen Betrachtungen geben eine Methode für die Bestimmung aller linearen speziellen nicht äquivalenten s -Vektorfelder auf den Sphären S^{n-1} . Bei dieser wird vorausgesetzt, dass wenigstens ein s -Vektorfeld auf der Sphäre der kleinsten Dimension bekannt ist, d.h., dass ein s -Tupel von Matrizen $(\underset{1}{K}, \dots, \underset{s}{K})$ bekannt ist, die dieses s -Vektorfeld bestimmen.

Zuerst machen wir zwei Bemerkungen, die man leicht beweisen kann.

Bemerkung 8.1. Sind zwei s -Vektorfelder $\underset{1}{\xi}$ und $\underset{2}{\xi}$ äquivalent und ist $\underset{1}{\xi}$ speziell, so muss auch $\underset{2}{\xi}$ speziell sein. Anders gesagt: die Eigenschaft, dass „ein s -Vektorfeld speziell ist“ stimmt mit der durch die Definition 3.1 erklärten Äquivalenzrelation überein.

Bemerkung 8.2. Es seien n und n_1 durch die folgenden Formeln

$$n = u \cdot 2^{4\alpha_1 + \beta_1}, \quad n_1 = 2^{4\alpha_1 + \beta_1}$$

bestimmt, wo u, α, α_1 nicht negative ganze Zahlen und $\beta, \beta_1 = 0, 1, 2, 3$ sind. Dann folgt aus der Ungleichung

$$(8.1) \quad 8\alpha_1 + 2^{\beta_1} \leq 8\alpha + 2^\beta$$

die Relation

$$(8.2) \quad n = m_1 \cdot n_1,$$

wo m_1 eine natürliche Zahl ist.

Bezeichnen wir mit s und n zwei natürliche Zahlen, die den Relationen (2.1) und (2.2) genügen. Im folgenden möchte ich alle nichtäquivalenten und speziellen s -Vektorfelder auf der Sphäre S^{n-1} bestimmen.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

$$(8.3) \quad s+1 \not\equiv 0 \pmod{4},$$

$$(8.4) \quad s+1 \equiv 0 \pmod{4}.$$

Im ersten Fall gibt es auf Grund des Satzes 3.1 bis auf Äquivalenz nur ein s -Vektorfeld. Dieses ist speziell, wenn

$$(8.5) \quad s = 8\alpha + 2^\beta - 1$$

und nicht speziell, wenn

$$(8.6) \quad s < 8\alpha + 2^\beta - 1$$

ist.

Die erste Aussage folgt ohne weiteres aus dem Satz 2.1. Die zweite kann man folgendermassen beweisen. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{H}(s, n)$ ein *s*-Vektorfeld auf S^{n-1} . Wir zeigen, dass $\mathfrak{H}(s, n)$ nicht speziell ist. Aus der Ungleichung (8.6) und aus dem Satz 2.1 ergibt sich, dass ein $(s+1)$ -Vektorfeld $\mathfrak{H}(s+1, n)$ auf der S^{n-1} existiert. Dieses bestimmt ein *s*-Vektorfeld $\overline{\mathfrak{H}}(s, n)$, das offensichtlich nicht speziell ist. Jede zwei *s*-Vektorfelder sind aber wegen (8.3) und des Satzes 3.1 äquivalent. $\mathfrak{H}(s, n)$ und $\overline{\mathfrak{H}}(s, n)$ sind also äquivalent. Sie sind auch nicht speziell, weil $\overline{\mathfrak{H}}(s, n)$ nicht speziell ist (Bemerkung 8.1).

Jetzt zeigen wir noch, wie man diese *s*-Vektorfelder bestimmen kann. Aus dem Satz 3.1 folgt, dass es im Falle (8.3) nur ein *s*-Vektorfeld gibt. Wegen (8.5) ist *s* die kleinste Zahl derart, dass das *s*-Vektorfeld auf S^{n-1} existiert. Dieses soll also nach Voraussetzung bekannt sein.

Wenn (8.6) erfüllt ist, suchen wir die ganzen Zahlen α_1, β_1 ($\beta_1 = 0, 1, 2, 3$), so dass die Zahl $8\alpha_1 + 2^{\beta_1} - 1$ den möglichst kleinsten Wert annimmt und der Ungleichung

$$(8.7) \quad s \leq 8\alpha_1 + 2^{\beta_1} - 1 \leq 8\alpha + 2^\beta - 1$$

genügt. Ist n_1 durch die Formel

$$n_1 = 2^{4\alpha_1 + \beta_1}$$

definiert, so erhält man aus (8.7) und aus der Bemerkung 8.2

$$n = m_1 \cdot n_1,$$

wo m_1 eine entsprechende natürliche Zahl ist. Gleichfalls ist n_1 die kleinste Zahl derart, dass ein *s*-Vektorfeld auf S^{n_1-1} existiert. Es sei $\mathfrak{H}(s, n_1)$ das nach Voraussetzung bekannte *s*-Vektorfeld auf S^{n_1-1} : $\mathfrak{H}(s, n_1) \left(\underset{1}{K}, \dots, \underset{s}{K} \right)$.

Das einzige *s*-Vektorfeld $\mathfrak{H}(s, n)$ auf S^{n-1} hat die Form

$$\mathfrak{H}(s, n): \left(\underset{1}{K}, \dots, \underset{s}{K} \right), \quad \underset{i}{K} = \left\{ \overset{(1)}{\underset{i}{K}}, \dots, \overset{(m_1)}{\underset{i}{K}} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Dieses ist durch die quasidiagonalen Matrizen der Ordnung *n* bestimmt, die auf den Hauptdiagonalen die Matrizen aus $\mathfrak{H}(s, n_1)$ enthalten.

Jetzt betrachten wir den Fall (8.4). In dem sind zwei Unterfälle zu unterscheiden:

$$(8.8) \quad s+1 \equiv 4 \pmod{8}$$

und

$$(8.9) \quad s+1 \equiv 0 \pmod{8}.$$

Im Falle (8.4) hat s die Form

$$(8.10) \quad s = 8a_1 + 2^{\beta_1} - 1,$$

wobei β_1 gleich 2 bzw. 3 ist, wenn (8.8) bzw. (8.9) gilt.

Wird n_1 durch die Formel

$$n_1 = 2^{4a_1 + \beta_1}$$

definiert, so ist n_1 die kleinste natürliche Zahl derart, dass das s -Vektorfeld auf S^{n_1-1} existiert. Da das s -Vektorfeld auch auf der Sphäre S^{n-1} existiert, gilt die Ungleichung

$$(8.11) \quad s \leq 8a + 2^\beta - 1.$$

Aus (8.10) und (8.11) folgt

$$8a_1 + 2^{\beta_1} \leq 8a + 2^\beta.$$

Wegen der Bemerkung 8.2 erhält man daraus, $n = m_1 \cdot n_1$, wo m_1 gleich

$$(8.12) \quad m_1 = n/2^{(s+1)/2}$$

im Falle (8.8) und gleich

$$(8.13) \quad m_1 = n/2^{(s-1)/2}$$

im Falle (8.9) ist.

Auf der Sphäre S^{n_1-1} ist ein $(s-1)$ -Vektorfeld

$$\mathfrak{S}(s-1, n_1): \left(\underset{1}{K}, \dots, \underset{s-1}{K} \right)$$

nach der Voraussetzung bekannt. Da $s-1$ die Form $4t+2$ hat, gibt es auf Grund des Satzes 5.1 zwei s -Vektorfelder

$$\mathfrak{S}(s, n_1) \quad \left(\underset{1}{K}, \dots, \underset{s-1}{K}, K \right),$$

$$\tilde{\mathfrak{S}}(s, n_1) \quad \left(\underset{1}{K}, \dots, \underset{s-1}{K}, -K \right),$$

wo $K = \underset{1}{K} \dots \underset{s-1}{K}$ ist. Mit Hilfe dieser kann man, wie im Satz 6.1, m_1+1 s -Vektorfelder auf der Sphäre S^{n-1} bilden. Diese sind nicht äquivalent (Satz 6.1). Im Falle (8.4) ist die Anzahl der nicht äquivalenten s -Vektorfelder auf Grund des Satzes 3.1 gleich m_1+1 . Wir haben also alle nicht äquivalenten s -Vektorfelder auf der S^{n-1} erhalten. Unter diesen sind die nicht speziellen durch die Eigenschaft ausgezeichnet, dass die Matrix $\overset{\rho}{K}$ dieselbe Anzahl der $-K$ Matrizen und der K Matrizen auf der Hauptdiagonale hat ($\rho = m_1/2$; Hilfssatz 7.1).

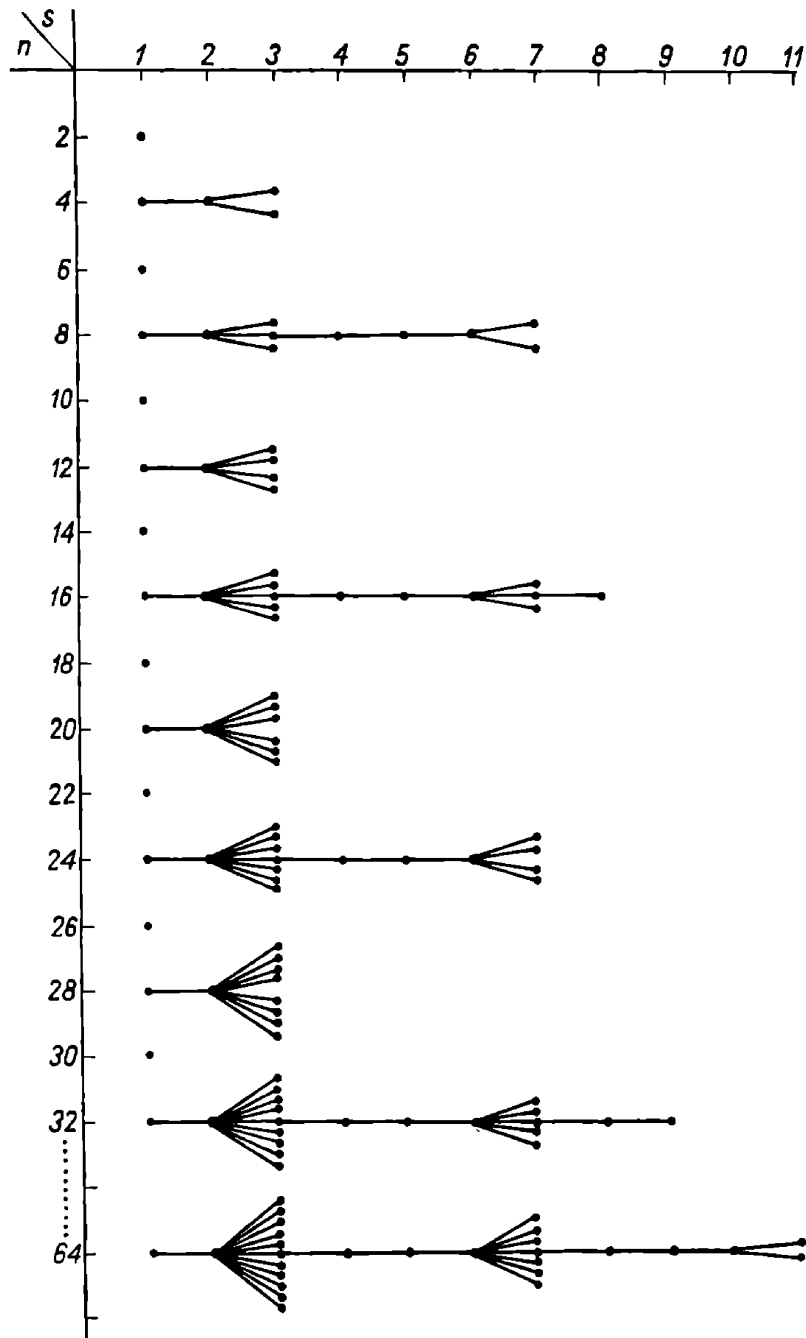


Diagram der *s*-Vektorfelder auf den Sphären S^{n-1}

§ 9. Anschliessend geben wir ein Diagramm an, das die Anzahl der linearen tangentialen *s*-Vektorfelder auf den Sphären S^{n-1} für $n = 1-64$ darstellt. Dieses zeigt auch die speziellen und nicht äquivalenten *s*-Vektorfelder.

In der ersten Spalte tritt die Zahl *n* und in der ersten Reihe die Zahl *s* auf. Jeder Punkt in der *s*-ten Spalte bedeutet ein *s*-Vektorfeld. In der Reihe, die der Zahl *n* entspricht, sind die *s*-Vektorfelder auf der

Sphäre S^{n-1} bezeichnet. Verschiedene Punkte bedeuten nicht äquivalente Vektorfelder. Z.B. erhält man aus dem Diagramm, dass es sieben nicht äquivalente 3-Vektorfelder auf der Sphäre S^{23} gibt, unter denen nur eins nicht speziell ist. Dann haben wir noch auf S^{23} vier 7-Vektorfelder, die speziell sind. Überdies gibt es auf der S^{23} bis auf Äquivalenz nur ein einziges s -Vektorfeld für $s = 1, 2, 4, 5, 6$, das nicht speziell ist.

Literaturverzeichnis

- [1] J. F. Adams, *Vector fields on spheres*, Ann. Math. 75 (3) (1962), S. 603-632.
- [2] P. S. Alexandroff und H. Hopf, *Topologie*, Berlin 1935.
- [3] B. Eckmann, *Systeme von Richtungsfeldern in Sphären und stetige Lösungen komplexer linearer Gleichungen*, Comm. Math. Helv. 15 (1942-1943), S. 1-26.
- [4] — *Zur Homotopietheorie gefaseter Räume*, ibidem 14 (1941-1942), S. 141-192.
- [5] — *Gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Hurwitz-Radon über die Komposition quadratischer Formen*, ibidem 15 (1942-1943), S. 385-366.
- [6] A. Hurwitz, *Über die Komposition quadratischer Formen von beliebig vielen Variablen*, Nachr. Ges. der Wiss. Göttingen 1898, S. 309-316.
- [7] — *Über die Komposition der quadratischen Formen*, Math. Ann. 88 (1923), S. 1-25.
- [8] J. Radon, *Lineare Scharen orthogonaler Matrizen*, Abh. Sem. Hamburg 1 (1922), S. 1-14.
- [9] E. Stiefel, *Richtungsfelder und Fernparallelismus in n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten*, Comm. Math. Helv. 8 (1935), S. 3-51.
- [10] — *Über Richtungsfelder in den projektiven Räumen und einen Satz aus der reellen Algebra*, ibidem 13 (1941), S. 201-218.
- [11] G. Vrănceanu, *Sur les vecteurs tangents aux spheres*, Rev. Roumain Math. Pures et Appl. 10 (7) (1965), S. 895-914.

Reçu par la Rédaction le 10. 10. 1967
