ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXVI (1972)

Sur l'existence de la solution d'une équation différentielle à argument accéléré

A. Sobolewska (Rzeszów)

Dans ce travail nous démontrons l'existence d'une solution de l'équation différentielle de la forme

$$x'(t) = f\big(t, x(\delta(t))\big) \tag{1}$$

avec la condition initiale

$$x(t_0) = \xi. \tag{2}$$

Pour le problème (1), (2) nous établirons le théorème suivant:

Théorème I. *Si les conditions suivantes sont remplies*:

1° *la fonction* $f(t, x)$ *est continue pour* $(t, x) \in [t_0, \infty) \times (-\infty, \infty)$ *et bornée dans toute zone* $\{(t, x): a \leqslant t \leqslant \beta, -\infty < x < +\infty, t_0' \leqslant a < \beta < +\infty\}$,

2° *la fonction* $\delta(t)$ *est continue pour* $t \in [t_0, \infty)$ *et satisfait pour* $t > t_0$ *à l'inégalité* $\delta(t) > t$, *il existe dans tout intervalle* $[t_0, T]$ *au moins une solution de l'équation* (1) *satisfaisant à la condition initiale* (2).

Démonstration. Soit $T^* = \max_{t \in [t_0, T]} \delta(t)$. De l'hypothèse 2° il résulte que $\delta(t_0) \geqslant t_0$. Supposons d'abord que $\delta(t_0) > t_0$. Alors il existe un nombre positif μ tel que pour $t \in [t_0, T^*]$ on a l'inégalité $\delta(t) - t \geqslant \mu > 0$. Décomposons l'intervalle $[t_0, T^*]$ en n parties égales par les points $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$, où

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = T^* \quad \text{et} \quad t_i - t_{i-1} = \frac{T^* - t_0}{n} \tag{3}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Soit N un nombre naturel tel que pour $n \geqslant N$ on a $\dfrac{T - t_0}{n} \leqslant \mu$. Désignons par P_n la subdivision (3) et formons la suite des subdivisions $\{P_n\}$ $(n = N, N+1, \ldots)$. Pour une subdivision fixée P_n on construit la ligne brisée $\varphi_n(t)$ de sommets $A_i(t_i, x_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, où t_i est le $i^{\text{ème}}$ noeud du réseau P_n, et on définit par récurrence la suite finie $\{x_i\}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ suivante:

$$x_n = v \quad \text{(où } v \text{ est un nombre provisoirement fixé)},$$

$$x_{n-1} = v - \frac{T^* - t_0}{n} f(t_{n-1}, v),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(4)
$$x_i = \begin{cases} x_{i+1} - \dfrac{T^* - t_0}{n} f(t_i, v) & \text{si } \delta(t_i) \geqslant T^*, \\ x_{i+1} - \dfrac{T^* - t_0}{n} f\big(t_i, \varphi_n(\delta(t_i))\big) & \text{si } \delta(t_i) < T^* \end{cases}$$

(où $\varphi_n\big(\delta(t_i)\big)$ est la valeur dictée par le tronçon de la ligne brisée $\varphi_n(t)$ déterminé par les sommets $A_n, A_{n-1}, \ldots, A_{i+1}$).

Ce mode de définition de la suite $\{x_i\}$ est possible grâce à la condition

$$\delta(t_i) \geqslant t_i + \mu \geqslant t_i + \frac{T^* - t_0}{n} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Si v est arbitrairement fixé, la fonction obtenue $\varphi_n(t)$ ne satisfait pas, en général, à la condition $\varphi_n(t_0) = \xi$. Nous allons cependant montrer qu'on peut choisir le nombre v en sorte que cette condition soit aussi remplie. Dans ce but observons que x_i peut être représenté sous la forme

(5)
$$x_i = v - F_i(v),$$

où $F_i(v)$ est une fonction continue et bornée pour $v \in (-\infty, \infty)$. En effet, pour $i = n$ et pour $i = n-1$, la relation (5) résulte immédiatement de la définition (4) et de l'hypothèse 1°.

Supposons que (5) soit vraie pour $n, n-1, \ldots, i+2, i+1$. Alors

$$x_i = \begin{cases} v - F_{i+1}(v) - \dfrac{T^* - t_0}{n} f_i(t_i, v) \quad \text{si } \delta(t_i) \geqslant T^*, \\ v - F_{i+1}(v) - \dfrac{T^* - t_0}{n} f_i\Big(t_i, a_p^i\big(v - F_p(v)\big) + b_p^i\big(v - F_{p+1}(v)\big)\Big) \end{cases}$$

si $\delta(t_i) < T^*$ et si $\delta(t_i)$ appartient en particulier à l'intervalle $[t_p, t_{p+1}]$, où p est l'un des nombres $i+1, i+2, \ldots$,

et où les nombres a_p^i et b_p^i ont été définis comme il suit:

$$a_p^i = [t_{p+1} - \delta(t_i)] \cdot \left(\frac{T^* - t_0}{n}\right)^{-1}, \qquad b_p^i = 1 - a_p^i.$$

Si l'on pose

$$F_i(v) = \begin{cases} F_{i+1}(v) + \dfrac{T^* - t_0}{n} f(t_i, v) & \text{lorsque } \delta(t_i) \geqslant T^*, \\ F_{i+1}(v) + \dfrac{T^* - t_0}{n} f\Big(t_i, a_p^i\big(v - F_p(v)\big) + b_p^i\big(v - F_{p+1}(v)\big)\Big) & \\ & \text{lorsque } \delta(t_i) < T^*, \end{cases}$$

la relation (5) devient vraie pour i.

La fonction $F_i(v)$ est continue et bornée: cela est une conséquence du fait que la fonction $F_{i+1}(v)$ est continue et bornée, que les fonctions $F_p(v)$ et $F_{p+1}(v)$ sont continues, enfin des hypothèses faites sur la fonction $f(t, x)$. En particulier $x_0 = v - F_0(v)$. Comme la fonction $F_0(v)$ est continue et bornée, il existe dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$ un v_0 tel que $v_0 - F_0(v_0) = \xi$. Nous admettrons dorénavant que la ligne brisée $\varphi_n(t)$ est dictée par cette valeur particulière du paramètre v.

En faisant correspondre à chaque subdivision de la suite $\{P_n\}$ $(n \geqslant N)$ la fonction $\varphi_n(t)$ on obtient une suite de fonctions $\{\varphi_n(t)\}$ ayant les propriétés suivantes:

(6) toute fonction $\varphi_n(t)$ est continue dans l'intervalle $[t_0, T^*]$,

(7) $$\varphi_n(t_0) = \xi,$$

(8) toutes les fonctions de cette suite satisfont dans l'intervalle $[t_0, T^*]$ à la condition de Lipschitz avec la même constante M (v. l'hypothèse 1°).

Il en résulte que la suite $\{\varphi_n(t)\}$ est une suite de fonctions équicontinues et bornées dans leur ensemble. En vertu du théorème d'Arzéla on peut en extraire une suite $\{\Phi_n(t)\}$ uniformément convergente dans l'intervalle $[t_0, T^*]$. Soit $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n(t) = \Phi(t)$.

Nous allons maintenant prouver que la fonction $\Phi(t)$ est une solution du problème (1), (2). Pour cela observons que chacune des fonctions $\Phi_n(t)$ vérifie dans l'intervalle $[t_0, T]$ l'équation[1]:

(9) $$\Phi_n(t) = \xi + \int_{t_0}^{t} f\left(\frac{T^* - t_0}{n}\left[\frac{ns}{T^* - t_0}\right], \Phi_n\left(\delta\left(\frac{T^* - t_0}{n}\left[\frac{ns}{T^* - t_0}\right]\right)\right)\right) ds,$$

où $\left[\dfrac{ns}{T^* - t_0}\right]$ désigne la partie entière du nombre $\dfrac{ns}{T^* - t_0}$. La suite des fonctions sous le signe intégrale converge uniformément vers la fonction $f\big(s, \Phi(\delta(s))\big)$. Cela résulte de l'ensemble des faits suivants:

---

(1) K. Zima, *Sur un système d'équations différentielles avec dérivée à gauche*, Ann. Polon. Math. 22 (1969), p. 37-47.

(a) la suite $\{\theta_n(s)\}$ (où $\theta_n(s) = \frac{T^*-t_0}{n}\left[\frac{ns}{T^*-t_0}\right]$) converge uniformément vers s dans l'intervalle $[t_0, T]$,

(b) la fonction $\delta(s)$ est uniformément continue dans l'intervalle $[t_0, T]$,

(c) la suite $\{\Phi_n\}$ converge uniformément dans l'intervalle $[t_0, T^*]$ vers Φ,

(d) la fonction $f(t, x)$ est uniformément continue dans un rectangle fermé dans lequel sont contenues — puisque la fonction $f(t, x)$ est bornée — toutes les lignes brisées de la suite $\{\Phi_n\}$.

En passant dans l'équation (9) à la limite avec $n \to \infty$ on constate que la fonction $\Phi(t)$ satisfait dans l'intervalle $[t_0, T]$ à l'équation

$$x(t) = \xi + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(\delta(s))\big)ds, \tag{10}$$

qui est équivalente au problème (1), (2). La démonstration du théorème I est ainsi achevée dans le cas où $\delta(t_0) > t_0$.

Si $\delta(t_0) = t_0$, la ligne brisée $\varphi_n(t)$ sera construite d'une façon un peu différente. Dans l'intervalle $[t_0, T^*]$ on choisit les points $t_1, t_2, \ldots, t_k$, qui divisent celui-ci en $k+1$ parties, tels que soient remplies les conditions:

$$\begin{aligned} & t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} = T^*, \\ & t_1 - t_0 = \frac{T^*-t_0}{n}, \\ & t_i - t_{i-1} = \frac{T^*-t_1}{k} \leqslant \mu_n \\ & \qquad \text{pour } (i = 2, \ldots, k, k+1) \text{ où } \mu_n = \min_{t\in[t_1, T^*]}\big(\delta(t)-t\big). \end{aligned} \tag{11}$$

Désignons par P_n la subdivision définie par (11). Faisons lui correspondre la ligne brisée $\varphi_n(t)$ déterminée par les sommets $A_0(t_0, \xi), A_1(t_1, x_1), \ldots$ $\ldots, A_k(t_k, x_k), A_{k+1}(t_{k+1}, x_{k+1})$, où les ordonnées s'obtiennent en appliquant l'algorithme (4) et en choisissant v en sorte que l'on ait l'égalité

$$x_1 = v - F_1(v) = \xi + \frac{T^*-t_0}{n} f(t_0, \xi).$$

On obtient ainsi une suite de fonctions $\{\varphi_n(t)\}$ qui aura les propriétés (6), (7), (8). Extrayons-en une suite $\{\Phi_n(t)\}$ uniformément convergente dans l'intervalle $[t_0, T^*]$ vers la fonction $\Phi(t)$. Chacune des fonctions $\Phi_n(t)$ vérifiera dans l'intervalle $[t_0, T]$ l'équation

$$\Phi_n(t) = \xi + \int_{t_0}^{t} f\Big(\theta_n(s), \Phi_n\big(\delta(\theta_n(s))\big)\Big)ds, \tag{12}$$

où

$$\theta_n(s) = \begin{cases} t_0 & \text{pour } s \in [t_0, t_1), \\ \dfrac{T^* - t_1}{k}\left[\dfrac{ks}{T^* - t_1}\right] & \text{pour } s \in [t_1, T]. \end{cases}$$

La suite des fonctions sous le signe intégrale convergera dans l'intervalle $[t_0, T]$ uniformément vers la fonction $f\big(s, \Phi(\delta(s))\big)$, d'où il résulte déjà que la fonction $\Phi(t)$ satisfait dans l'intervalle $[t_0, T]$ à l'équation (10), c'est-à-dire qu'elle est une solution du problème (1), (2).

Pour terminer considérons un cas particulier pour lequel on a le théorème suivant:

THÉORÈME II. *Si*

1° *la fonction $f(t, x)$ est continue et bornée dans la zone* $\{(t, x): t \in [t_0, T], -\infty < x < +\infty\}$,

2° *la fonction $f(t, x)$ satisfait dans cette zone à la condition de Lipschitz par rapport à x avec une constante L telle que* $L(T - t_0) < 1$,

3° *la fonction $\delta(t)$ est continue dans l'intervalle* $[t_0, T]$ *et satisfait dans cet intervalle à l'inégalité* $t < \delta(t) \leqslant T$,

l'équation (1) *admet dans cet intervalle exactement une solution satisfaisant à la condition initiale* (2).

Démonstration. L'existence d'une telle solution peut être établie comme dans le théorème précédent, à cela près que l'on procède à la subdivision P_n en soumettant les points de division aux conditions:

$$\begin{gathered} t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} = T, \\ t_{k+1} - t_k = \frac{T - t_0}{n}, \\ t_i - t_{i-1} = \frac{t_k - t_0}{k} \leqslant \mu_n \quad \text{pour } (i = 1, 2, \ldots, k) \\ \text{où } \mu_n = \min_{t \in [t_0, t_k]} \big(\delta(t) - t\big). \end{gathered} \tag{13}$$

Les ordonnées des sommets de la ligne brisée $\varphi_n(t)$ qui correspond à cette subdivision seront alors déterminées comme il suit:

$$x_{k+1} = v + \big(t_{k+1} - \delta(t_k)\big) f(t_k, v), \qquad x_k = v - \big(\delta(t_k) - t_k\big) f(t_k, v),$$

et on calcule les autres ordonnées à l'aide des formules (4). De la suite de fonctions $\{\varphi_n(t)\}$ ainsi obtenue on peut extraire une suite $\{\Phi_n(t)\}$ uniformément convergente dans l'intervalle $[t_0, T]$ vers la fonction $\Phi(t)$. En outre, chacune des fonctions $\Phi_n(t)$ vérifiera dans l'intervalle $[t_0, T]$ la relation

$$\Phi_n(t) = \xi + \int_{t_0}^{t} f\Big(\theta_n(s), \Phi_n\big(\delta(\theta_n(s))\big)\Big)\, ds, \tag{14}$$

où

$$\theta_n(s) = \begin{cases} \dfrac{t_k-t_0}{k}\left[\dfrac{ks}{t_k-t_0}\right] & \text{pour } s\in[t_0, t_k), \\ t_k & \text{pour } s\in[t_k, T]. \end{cases}$$

Comme la suite des fonctions sous le signe intégrale converge uniformément vers la fonction $f(s, \Phi(\delta(s)))$, la fonction $\Phi(t)$ constitue dans l'intervalle $[t_0, T]$ une solution du problème (1), (2). Supposons maintenant qu'outre la fonction $\Phi(t)$ il y ait encore une autre solution $\Phi_1(t)$ du problème (1), (2), dans l'intervalle $[t_0, T]$. Alors on aura pour tout $t\in[t_0, T]$

$$\begin{aligned} &|\Phi_1(t)-\Phi(t)| \\ &= \left|\int_{t_0}^{t}\left[f(s, \Phi_1(\delta(s)))-f(s, \Phi(\delta(s)))\right]ds\right| \\ &\leqslant \int_{t_0}^{t} L\max_{s\in[t_0,T]}|\Phi_1(\delta(s))-\Phi(\delta(s))|\,ds \leqslant L(T-t_0)\max_{t\in[t_0,T]}|\Phi_1(t)-\Phi(t)| \end{aligned}$$

d'où résulte l'inégalité

$$\max_{t\in[t_0,T]}|\Phi_1(t)-\Phi(t)| \leqslant L(T-t_0)\max_{t\in[t_0,T]}|\Phi_1(t)-\Phi(t)|.$$

Comme $L(T-t_0)<1$, cette dernière inégalité ne peut avoir lieu que si $\Phi_1(t)\equiv\Phi(t)$ dans l'intervalle $[t_0, T]$. La démonstration du théorème II est ainsi achevée.

Sur une solution approchée du problème (1), (2). Observons encore que dans le cas où le problème (1), (2) admet exactement une solution, toute suite de fonctions $\{\varphi_n(t)\}$ correspondant à une suite normale de subdivisions $\{P_n\}$ converge uniformément vers cette solution.

Supposons maintenant que les fonctions $f(t, x)$ et $\delta(t)$ vérifient encore les hypothèses du théorème II. Admettons de plus que la fonction $f(t, x)$ satisfait dans la zone $\{(t, x)\colon t\in[t_0, T],\ -\infty<x<+\infty\}$ à la condition de Lipschitz par rapport à t (avec la constante L_1) et que la fonction $\delta(t)$ vérifie dans l'intervalle $[t_0, T]$ la condition de Lipschitz (avec la constante L_2). En vertu de l'hypothèse 1° il existe une constante M telle que $|f(t, x)| \leqslant M$ pour $t\in[t_0, T]$ et pour tout x. Supposons encore que dans la subdivision P_n, définie dans la démonstration du théorème II, $\dfrac{t_k-t_0}{k}$ soit au plus égal à $\dfrac{T-t_0}{n}$. Alors on aura pour tout $t\in[t_0, T]$ les relations:

$$\begin{aligned}|\Phi(t)-\Phi_n(t)| &= \left|\int_{t_0}^{t}\Big[f\big(s,\Phi(\delta(s))\big)-f\Big(\theta_n(s),\Phi_n\big(\delta(\theta_n(s))\big)\Big)\Big]ds\right| \\ &= \Big|\int_{t_0}^{t}\Big[f\big(s,\Phi(\delta(s))\big)-f\big(\theta_n(s),\Phi(\delta(s))\big)+ \\ &\quad +f\big(\theta_n(s),\Phi(\delta(s))\big)-f\Big(\theta_n(s),\Phi_n\big(\delta(\theta_n(s))\big)\Big)\Big]ds\Big| \\ &\leqslant \int_{t_0}^{t}\Big[L_1|s-\theta_n(s)|+L\Big|\Phi(\delta(s))-\Phi_n\big(\delta(\theta_n(s))\big)\Big|\Big]ds.\end{aligned}$$

Puisque $|s-\theta_n(s)|<\dfrac{T-t_0}{n}$ et que

$$\begin{aligned}\Big|\Phi(\delta(s))-\Phi_n\big(\delta(\theta_n(s))\big)\Big| &= \Big|\Phi(\delta(s))-\Phi_n(\delta(s))+\Phi_n(\delta(s))-\Phi_n\big(\delta(\theta_n(s))\big)\Big| \\ &\leqslant \big|\Phi(\delta(s))-\Phi_n(\delta(s))\big|+M\big|\delta(s)-\delta(\theta_n(s))\big| \\ &\leqslant \big|\Phi(\delta(s))-\Phi_n(\delta(s))\big|+ML_2|s-\theta_n(s)|\end{aligned}$$

on obtient l'inégalité suivante, vérifiée pour tout $t\in[t_0,T]$

$$|\Phi(t)-\Phi_n(t)|\leqslant(T-t_0)\left[L_1\cdot\frac{T-t_0}{n}+L\varepsilon_n+MLL_2\frac{T-t_0}{n}\right],$$

où $\varepsilon_n=\max\limits_{t\in[t_0,T]}|\Phi(t)-\Phi_n(t)|$.

Il en résulte l'inégalité

$$\varepsilon_n\leqslant L_1\cdot\frac{(T-t_0)^2}{n}+MLL_2\frac{(T-t_0)^2}{n}+L(T-t_0)\varepsilon_n$$

et enfin

$$\varepsilon_n\leqslant\frac{(T-t_0)^2(MLL_2+L_1)}{1-L(T-t_0)}\cdot\frac{1}{n}.$$

Cette dernière inégalité fournit une limitation de l'erreur si l'on applique la méthode utilisée dans la démonstration du théorème II pour trouver une approximation de la solution unique du problème (1), (2).

Reçu par la Rédaction le 15. 1. 1971