

A. RYBARSKI (Wrocław)

## O ELEKTRYCZNEJ METODZIE WYZNACZANIA ZAWARTOŚCI KRZEMU W STALI KRZEMOWEJ

### 1. O metodzie pomiaru

Jednym z ważnych prefabrykatów w przemyśle elektrotechnicznym są arkusze blachy wykonane ze stali krzemowej. Często więc potrzeba mierzyć zawartość krzemu w takiej stali. Jeżeli ilość arkuszy jest duża, to przeprowadzenie zwykłej analizy chemicznej byłoby zbyt uciążliwe i z tego powodu stosuje się metody elektryczne<sup>1)</sup>, które są prostsze i szybsze. Podstawą tych metod jest zależność między opornością właściwą  $\rho$  stali krzemowej a procentową zawartością  $p$  krzemu. Sprawdzono doświadczalnie, że zależność ta wyraża się wzorem

$$(1) \quad \rho = 12p + 10,$$

gdzie  $\rho$  jest podane w mikromocentymetrach. Wzór ten nadaje się wystarczająco dokładnie do praktycznego wyznaczenia zawartości krzemu, o ile znamy oporność właściwą. Jak wiadomo, opornością właściwą materiału nazywamy stałą  $\rho$  określoną przez równość

$$(2) \quad \rho = R \frac{S}{l},$$

gdzie  $R$  jest oporem elektrycznym drutu o długości  $l$  i przekroju poprzecznym  $S$ . W praktyce wyznacza się oporność właściwą  $\rho$  zazwyczaj w następujący sposób: do końców paska wyciętego z arkusza blachy przykładają napięcie  $V$  i po zmierzeniu natężenia  $I$  przepływającego prądu oblicza się  $\rho$  z wzoru

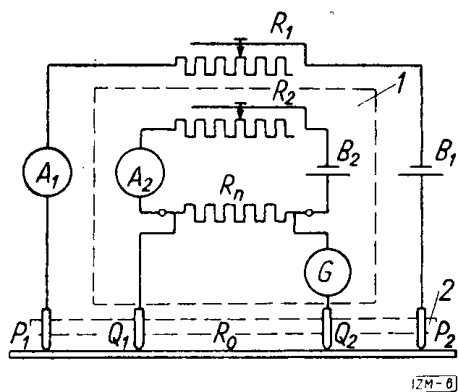
$$(3) \quad \rho = \frac{V}{I} \cdot \frac{S}{l}.$$

<sup>1)</sup> Мескин, Ферромагнитные сплавы, Москва 1937, str. 566; A. Smo-liński, Elektryczna metoda oznaczania zawartości krzemu w stali krzemowej, Przegląd Elektrotechniczny 3 (1952), str. 107.

Ponieważ metoda ta wymaga cięcia pasków z kruchej stali krzemowej, więc jest mało przydatna do masowego stosowania. J. Kuryłowicz z Głównego Instytutu Elektrotechniki we Wrocławiu

skonstruował przyrząd<sup>2)</sup>, prosty w obsłudze, który pozwala szybko wyznaczyć oporność właściwą  $\rho$  wprost na arkuszu blachy.

Na rysunkach 1 i 2 przedstawiony jest schemat elektryczny przyrządu w dwóch wariantach różniących się szczegółami technicznymi. Wspólna zasada działania jest następująca:

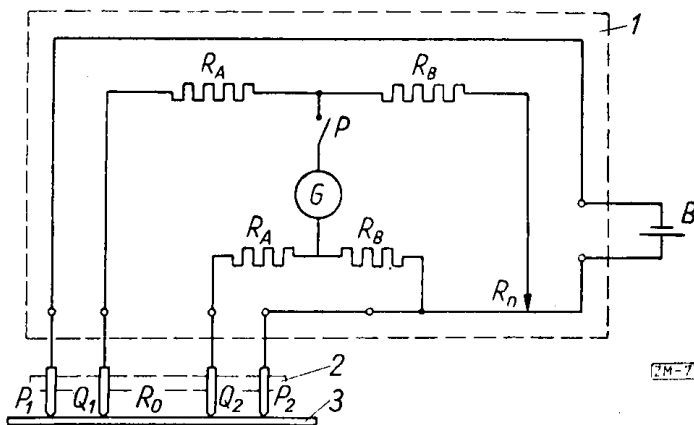


Rys. 1

W dwóch punktach arkusza  $P_1$  i  $P_2$  przyłożone są elektrody połączone ze źródłem prądu. W ten sposób arkusz blachy zamyka obwód, przez który płynie prąd  $I$ . Niech  $U(Q_1) - U(Q_2)$  oznacza napięcie między dwoma innymi punktami  $Q_1$  i  $Q_2$  blachy. Przyrząd mierzy wielkość

$$(4) \quad R_0 = \frac{U(Q_1) - U(Q_2)}{I}$$

Elektrody prądowe  $P_1$  i  $P_2$  oraz elektrody napięciowe  $Q_1$  i  $Q_2$  umocowane są dla wygody na wspólnym pręcie  $M$  połączonym z aparaturą pomiarową (mostek). Przyrządem posługujemy się w następujący sposób: Pręt  $M$  przykładamy do arkusza na środku, równoległe do boków, i po nastawieniu mostka odczytujemy opór pozorny  $R_0$ . Aby można było zastosować ten



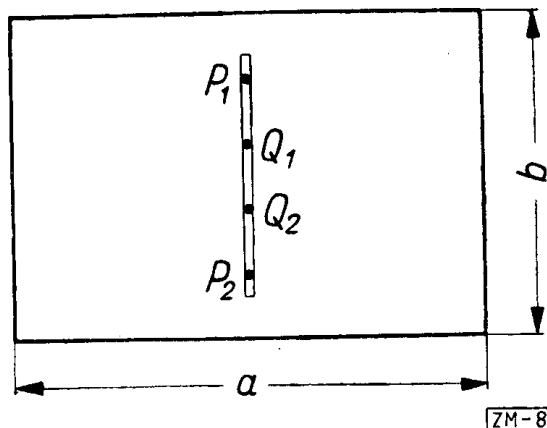
Rys. 2

<sup>2)</sup> J. Kuryłowicz, *Definicja pojęcia dokładności w miernictwie*, Przegląd Elektrotechniczny 1 (1953), str. 37.

przyrząd do pomiaru oporności właściwej, trzeba obliczyć dla danej blachy tę oporność z odczytanej na przyrządzie wielkości  $R_0$ . Mówiąc dokładniej, należy rozwiązać następujące zagadnienie:

Dane są wymiary  $a$  i  $b$  prostokątnego arkusza blachy, jego grubość  $h$ , odległości  $P_1P_2=2D$  i  $Q_1Q_2=2d$  (rys. 3) oraz wynik pomiaru  $R_0$ . Jak obliczyć oporność właściwą  $\rho$  materiału blachy?

Celem niniejszego artykułu jest rozwiązanie tego zagadnienia.



Rys. 3

## 2. Sformułowanie zagadnienia brzegowego

Przyjmujemy następujący schemat zjawiska: Pole prądu  $\vec{i}$  w arkuszu uważamy za płaskie i stacjonarne, tzn. wektor gęstości prądu  $\vec{i}$  nie zależy od czasu. Założenie, że pole jest płaskie, usprawiedliwione jest tym, iż grubość arkusza  $h$  jest mała (około 0,5 mm) wobec rozstawu elektrod  $2D$  (około 300 mm).

Zakładamy, że źródła prądu znajdują się tylko w punktach  $P_1$  i  $P_2$ , a zatem<sup>3)</sup>

$$(5) \quad \operatorname{div} \vec{i} = 0 \quad \text{poza } P_1 \text{ i } P_2.$$

Zakładamy, że pole jest bezwirowe (bo jest stacjonarne), a zatem

$$(6) \quad \operatorname{rot} \vec{i} = 0.$$

Niech  $\vec{E}$  oznacza wektor pola elektrostatycznego związanego z polem prądu prawem Ohma

$$(7) \quad \vec{E} = \frac{1}{\rho} \vec{i}.$$

<sup>3)</sup> G. Joos, *Lehrbuch der Theoretischen Physik*, Leipzig 1939, str. 261.

Z równań (1) i (2) wynika, że pole  $\vec{E}$  ma potencjał  $U$ , czyli

$$(8) \quad \vec{E} = \text{grad } U.$$

Potencjał  $U$  spełnia poza punktami  $P_1$  i  $P_2$  równanie Laplace'a

$$(9) \quad \Delta U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

Jeżeli wydajność źródeł  $P_1$  i  $P_2$  pola  $\vec{E}$  oznaczymy przez  $+q$  i  $-q$ , to w punktach tych  $U$  ma osobliwości rzędu  $\pm q \log r$ , gdzie  $r$  jest odległością od źródła. Na koniec zakładamy, że na brzegach blachy składowa normalna  $E_n$  wektora  $\vec{E}$ , czyli  $\partial U / \partial n$ , jest równa zeru.

Jeżeli otoczmy punkt  $P_1$  krzywą zamkniętą  $C$ , której element łuku oznaczymy przez  $ds$ , to na mocy twierdzenia Gaussa-Ostrogradzkiego mamy

$$(10) \quad I = h \oint_C i_n ds = 2\pi q h \cdot \frac{1}{\epsilon}.$$

Niech

$$(11) \quad U = q\varphi.$$

Wtedy potencjał jednostkowy  $\varphi$  spełnia następujące trzy warunki wynikające z (9) i własności funkcji  $U$ :

1° Wewnątrz prostokąta  $a \times b$  poza punktami  $P_1$  i  $P_2$  ma być

$$\Delta\varphi = 0.$$

2° W punktach  $P_1$  i  $P_2$  funkcja  $\varphi$  ma mieć osobliwości rzędu  $\pm \log r$ .

3° Na brzegach prostokąta ma być  $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ .

Z równań (10) i (11) i z definicji  $R_0$  otrzymamy wzór

$$(12) \quad \epsilon = hR_0 \frac{2\pi}{\varphi(Q_1) - \varphi(Q_2)}.$$

A więc zagadnienie sprowadza się do rozwiązania następującego zagadnienia brzegowego: Wyznaczyć funkcję  $\varphi(x, y)$ , która spełnia warunki 1°, 2° i 3°.

### 3. Rozwiązanie zagadnienia brzegowego

Wprowadźmy układ współrzędnych, jak to pokazano na rysunku 4. Wtedy możemy uważać funkcję  $\varphi$  za część rzeczywistą funkcji  $\Phi(z)$  zmiennej zespolonej  $z=x+yi$ .

Wprowadźmy wektor  $\vec{E}(E_x, E_y)$ , określony przez związek

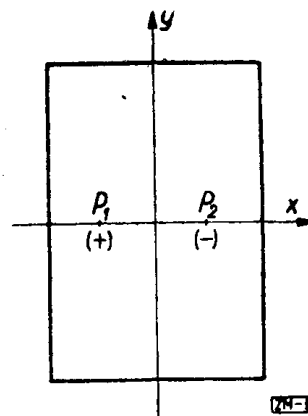
$$(13) \quad \vec{E} = \text{grad } \varphi$$

i oznaczmy przez  $E(z)$  funkcję zmiennej zespolonej

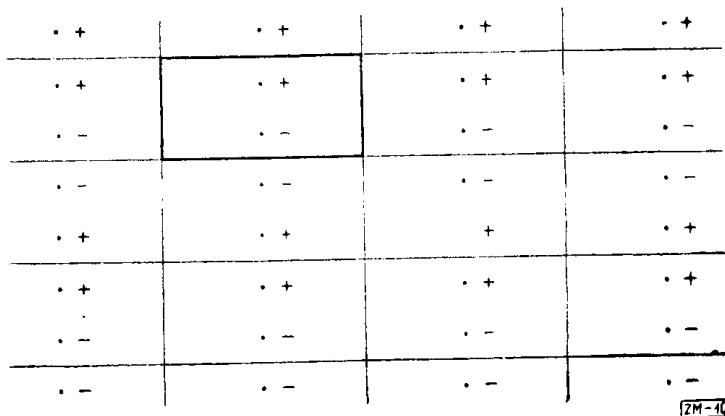
$$(14) \quad E(z) = \frac{d\Phi}{dz} = E_x - iE_y.$$

Funkcja  $\Phi(z)$  jest potencjałem zespolonym pola zespolonego  $E(z)$ . Odbijmy wewnątrz prostokąta  $a \times b$  w jego bokach i operację tę powtarzamy kolejno. W ten sposób otrzymamy na płaszczyźnie siatkę ładunków (rys. 5).

Wyznamy teraz funkcję  $E(z)$ . Jest ona oczywiście dwuokresowa, o okresach będących okresami siatki ( $ia$  oraz  $2b$ ), jako oso-



Rys. 4



Rys. 5

bliwości zaś ma w punktach węzłowych siatki bieguny proste o residuach  $\pm 1$ .  $E(z)$  jest więc funkcją eliptyczną<sup>4)</sup> i wobec

<sup>4)</sup> Н. Т. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*; Москва-Ленинград 1948, str. 16, 59 i 160; S. Saks i A. Zygmund, *Funkcje analityczne*, Warszawa 1938, str. 348, 359, 362 i 364.

tego daje się wyrazić przez funkcję  $\zeta$  Weierstrassa w następujący sposób:

$$(15) \quad E(z) = \zeta(z+b-D) + \zeta(z+D) - \zeta(z+b+D) - \zeta(z-D).$$

Wprowadzając funkcję  $\sigma$  Weierstrassa otrzymamy z równań (14) i (15)

$$(16) \quad \Phi(z) = \log \frac{\sigma(z+b-D)\sigma(z+D)}{\sigma(z+b+D)\sigma(z-D)} + \text{const.}$$

Udowodnimy, że funkcja

$$(17) \quad \varphi(x, y) = \mathcal{R}\Phi(x)$$

jest rozwiązaniem postawionego zadania brzegowego. W tym celu wystarczy udowodnić, że funkcja  $E(z)$  spełnia wszystkie trzy warunki zadania. Spełnienie warunków 1<sup>o</sup> i 2<sup>o</sup> wynika bezpośrednio z definicji funkcji  $\varphi$  i z ogólnych własności funkcji analitycznych. Zajmiemy się przeto tylko sprawdzeniem warunku 3<sup>o</sup>. Warunek ten wymaga, żeby

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \begin{cases} E_x = 0 & \text{dla } x = \pm \frac{1}{2}b, \\ E_y = 0 & \text{dla } y = \pm \frac{1}{2}a. \end{cases}$$

Wystarczy zatem udowodnić, że  $E(z)$  przyjmuje wartości rzeczywiste dla  $\Im z = a/2$ , a czysto urojone dla  $\Re z = b/2$ . Aby zaś to wykazać, zauważmy, że z (15) wynikają następujące własności funkcji  $E(z)$ :

$$(19) \quad \begin{aligned} E(-z) &= E(z), & E(z+b) &= -E(z), \\ E(\bar{z}) &= \overline{E(z)}, & E(z+ai) &= E(z). \end{aligned}$$

Niech teraz będzie, na przykład,  $\Re u = 2/b$ . Wtedy na mocy (19) jest

$$E(u) = -\overline{E(b-\bar{u})}.$$

Ale  $u = b - \bar{u}$ , więc

$$E(u) = -\overline{E(u)},$$

skąd wynika, że  $E(u)$  jest czysto urojone. Jeżeli zaś  $\Im v = a/2$ , to

$$E(v) = \overline{E(\bar{v}+ai)},$$

a ponieważ nadto

$$\bar{v} + ai = v,$$

więc

$$E(v) = \overline{E(v)},$$

czyli  $E(v)$  jest rzeczywiste.

Analogicznie postępujemy w pozostałych przypadkach.

A zatem funkcja  $\varphi = \mathcal{R} \Phi$  jest rozwiązaniem zadania brzegowego. Dobierając we wzorze (16) stałą addytywną tak, by było  $\Phi = 0$  dla  $z = 0$ , otrzymujemy

$$(16') \quad \Phi(z) = \log \frac{\sigma(z + b - D) \sigma(D + z) \sigma(b + D)}{\sigma(z + b + D) \sigma(D - z) \sigma(b - D)}.$$

Łatwo teraz obliczyć, że

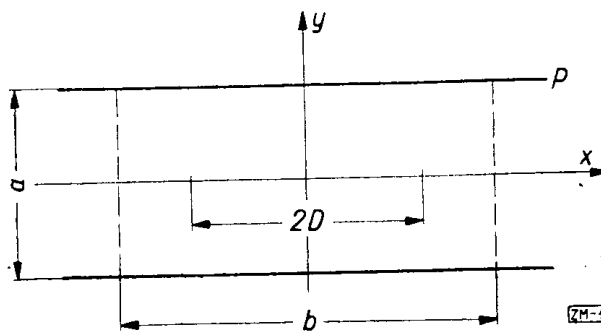
$$(20) \quad \varphi(Q_1) - \varphi(Q_2) = \Phi(d) - \Phi(-d) = 2\Phi(d).$$

Wstawiając (20) do wzoru (12), otrzymujemy ostatecznie

$$(21) \quad \rho = hR_0 \frac{\pi}{\Phi(d)}.$$

#### 4. Wzory przybliżone

Z wzoru zasadniczego (16) możemy otrzymać różne wzory przybliżone na  $\Phi(d)$ , wygodne dla rachunków numerycznych. Wzory przybliżone można również otrzymać bezpośrednio. Wystarczy mianowicie zauważyć, że funkcja  $\log \sinh(\pi z/a)$  przedstawia rozptyw w pasku  $P$  (rys. 6) źródła jednostkowego umieszczonego w początku układu. Najgrubsze przybliżenie naszego zadania otrzymamy umieszczając na pasku  $P$  dwa



Rys. 6

źródła  $+1$  i  $-1$  w punktach  $z = +D$  i  $z = -D$ . Możemy w następnym przybliżeniu dodać jeszcze źródła  $+1$  w  $z = -b + D$ ,  $-1$  w  $z = b - D$  itd. Otrzymujemy w ten sposób wzory następujące:

$$\Phi(d) \approx \log \frac{\sin \frac{\pi}{a} (D+d)}{\sinh \frac{\pi}{a} (D-d)},$$

$$\Phi(d) \approx \log \frac{\sinh \frac{\pi}{a} (D+d) \sinh \frac{\pi}{a} (b+d-D)}{\sinh \frac{\pi}{a} (D-d) \sinh \frac{\pi}{a} (b-d-D)} \quad \text{itd.}$$

Dla pomiarów w poprzek paska  $P$  otrzymujemy

$$\Phi(d) \approx \log \frac{\sin \frac{\pi}{a} (D+d)}{\sin \frac{\pi}{a} (D-d)} \quad \text{itd.,}$$

a wreszcie dla arkuszy bardzo dużych

$$\Phi(d) \approx \log \frac{D+d}{D-d}.$$

### 5. Rachunek numeryczny

Aby wzór (21) sprowadzić do postaci użytecznej dla rachunku numerycznego, użyjemy funkcji  $\vartheta$  Jacobiego<sup>5)</sup>:

$$(22) \quad \begin{aligned} \vartheta_1(\nu) &= \vartheta_1(\nu, q) = 2q^{1/4} \sin \nu - 2q^{9/4} \sin 3\nu + 2q^{25/4} \sin 5\nu - \dots, \\ \vartheta_2(\nu) &= \vartheta_2(\nu, q) = 2q^{1/4} \cos \nu + 2q^{9/4} \cos 3\nu + 2q^{25/4} \cos 5\nu + \dots \end{aligned}$$

Funkcje te są związane z funkcją  $\sigma(z)$ , jeżeli bowiem  $2\omega_1$  i  $2\omega_2$  są pseudookresami funkcji  $\sigma(z, \omega_1, \omega_2)$  (w naszym przypadku  $2b$  oraz  $ia$ ),  $\vartheta_1'$  i  $\vartheta_1'''$  są wartościami pochodnych funkcji  $\vartheta_1$  dla  $\nu=0$  oraz

$$(23) \quad \nu = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi z}{\omega_1}, \quad q = \exp \pi i \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

to

$$(24) \quad \sigma(z, \omega_1, \omega_2) = \frac{2\omega_1}{\pi \vartheta_1'} \vartheta_1(\nu, q) \exp \left( - \frac{\nu^2 \vartheta_1'''}{6 \vartheta_1'} \right).$$

<sup>5)</sup> Н. Ахиезер, op. cit., str. 77.



Wyzyskując związki

$$\vartheta_1\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \vartheta_1(z), \quad \vartheta_1(-z) = \vartheta_1(z), \quad \vartheta_2(z) = \vartheta_2(-z),$$

otrzymamy<sup>6)</sup> po podstawieniu wzoru (24) do wzoru (16')

$$(25) \quad \Phi(d) = \log \frac{\frac{\vartheta_1\left[\frac{\pi}{2b}(D+d)\right]}{\vartheta_2\left[\frac{\pi}{2b}(D+d)\right]}}{\frac{\vartheta_1\left[\frac{\pi}{2b}(D-d)\right]}{\vartheta_2\left[\frac{\pi}{2b}(D-d)\right]}}.$$

Wprowadźmy dla wygody oznaczenie

$$\psi\left(x, \frac{a}{b}\right) = \log \frac{\sin \nu - q^2 \sin 3\nu + q^6 \sin 5\nu - \dots}{\cos \nu + q^2 \cos 3\nu + q^6 \cos 5\nu + \dots},$$

$$\text{gdzie } \nu = \frac{\pi}{2}x, \quad q = \exp\left(-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{a}{b}\right).$$

Wtedy na mocy (25)

$$(26) \quad \Phi(d) = \psi\left(\frac{D+d}{b}, \frac{a}{b}\right) - \psi\left(\frac{D-d}{b}, \frac{a}{b}\right).$$

W tabelicy I (str. 182 i 183) podano wartości<sup>7)</sup> funkcji  $\psi^*$ :

$$\psi^*\left(x, \frac{a}{b}\right) = \frac{1}{\pi} \log \frac{\sin \nu - q^2 \sin 3\nu}{\cos \nu + q^2 \cos 3\nu},$$

$$\text{gdzie } \nu = \frac{\pi}{2}x, \quad q = \exp\left(-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{a}{b}\right).$$

Funkcja ta mało się różni od funkcji  $\psi/\pi$  i można oszacować, że

$$\left| \psi^*\left(x, \frac{a}{b}\right) - \psi\left(x, \frac{a}{b}\right) \right| < 3 \cdot q^6 \quad \text{dla } 0 \leq x \leq 0,7; \quad \frac{a}{b} \geq 1.$$

<sup>6)</sup> F. Oberhettinger und W. Magnus, *Anwendung der elliptischen Funktionen in Physik und Technik*, Berlin 1949, str. 69.

<sup>7)</sup> Ze względów rachunkowych w tabelicy podano wartości funkcji  $\psi^* + \text{const}$ , co jednakże nie ma znaczenia, ponieważ do wzorów (26) i (27) wchodzi tylko różnica funkcji  $\psi^*$ . Łatwo stwierdzić, że  $\psi^*(0,5; a/b) = 0$ . W tabelicy w wierszu  $(D+d)/b = 0,5$  mamy liczbę 7,3294. Jest ona dziesiątym przybliżeniem naszej stałej. Jej dokładna wartość jest  $(10 \log 10)/\pi$ .

Z tej nierówności wynika, że błąd powstały przez zastąpienie funkcji  $\psi/\pi$  funkcją  $\psi^*$  nie przekracza odpowiednio

$$2,5 \cdot 10^{-4}; \quad 1,0 \cdot 10^{-4}; \quad 0,3 \cdot 10^{-4} \quad \text{dla} \quad \frac{a}{b} = 1,00; \quad 1,10; \quad 1,25.$$

Dla pozostałych kolumn tablicy błąd jest jeszcze mniejszy.

Tablica I  
Wartości funkcji  $\psi^*$ .

$\frac{D \pm d}{b} \backslash \frac{a}{b}$	1,00	1,10	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50
0,0200	6,1704	6,1865	6,2024	6,2165	6,2227	6,2256	6,2269	6,2275
225	2080	2240	2400	2540	2603	2631	2644	2650
250	2416	2576	2735	2875	2938	2967	2980	2986
275	2720	2880	3039	3179	3242	3271	3283	3289
300	2998	3158	3317	3457	3519	3548	3561	3567
325	3253	3413	3572	3712	3775	3803	3816	3822
350	3490	3650	3809	3948	4011	4039	4052	4058
375	3711	3871	4029	4169	4231	4260	4272	4278
400	3917	4077	4235	4375	4437	4466	4478	4484
425	4111	4271	4429	4568	4631	4659	4672	4678
450	4294	4454	4612	4751	4813	4842	4854	4860
475	4468	4627	4785	4924	4986	5014	5027	5033
500	4632	4791	4949	5088	5150	5178	5191	5197
600	5219	5377	5534	5672	5734	5762	5774	5780
700	5716	5874	6029	6166	6228	6256	6269	6274
800	6150	6306	6460	6596	6657	6685	6700	6703
900	6534	6689	6842	6977	7037	7065	7077	7083
0,1000	6880	7033	7184	7318	7378	7405	7418	7423
11	7195	7346	7496	7628	7688	7715	7727	7732
12	7484	7634	7782	7913	7971	7998	8010	8015
13	7752	7900	8046	8176	8233	8260	8272	8277
14	8003	8149	8293	8420	8477	8503	8515	8520
15	8237	8383	8524	8649	8705	8731	8742	8747
175	8773	8910	9046	9166	9220	9244	9255	9260
200	9249	9379	9508	9622	9673	9696	9706	9711
225	9682	9804	9925	7,0032	7,0080	7,0101	7,0111	7,0116
250	7,0081	7,0194	7,0307	0406	0451	0471	0480	0485
275	0455	0559	0663	0754	0795	0813	0822	0826
300	0809	0903	0997	1079	1117	1163	1141	1144

Tablica I (c.d.)

$\frac{D \pm d}{b}$ \ $\frac{a}{b}$	1,00	1,10	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50
0,325	7,1147	7,1231	7,1314	7,1388	7,1421	7,1436	7,1442	7,1446
350	1474	1546	1619	1682	1711	1724	1730	1733
375	1790	1851	1912	1966	1990	2001	2006	2008
400	2099	2148	2198	2241	2260	2269	2273	2275
425	2402	2440	2477	2510	2524	2531	2534	2535
450	2702	2727	2751	2773	2783	2788	2790	2791
475	2998	3011	3023	3034	3039	3041	3042	3043
500	3294	3294	3294	3294	3294	3294	3294	3294
525	3590	3577	3565	3554	3549	3547	3546	3545
550	3886	3861	3837	3815	3805	3800	3798	3797
575	4186	4148	4111	4078	4064	4057	4054	4053
600	4489	4440	4390	4347	4328	4319	4315	4313
625	4798	4737	4676	4622	4598	4587	4582	4580
650	5114	5042	4969	4906	4877	4864	4858	4855
675	5441	5357	5274	5200	5167	5152	5146	5142
700	5779	5685	5591	5509	5471	5455	5447	5444

W tablicach funkcji trygonometrycznych *Natural Sines et Cosines to eight decimal places* (U. S. Department of Commerce, Coast and Geodetic Survey, Washington 1942) za pomocą których obliczono tablicę I, na stronie 434 zamiast  $\sin 36^\circ = 0,58778255$  ma być  $\sin 36^\circ = 0,58778525$ .

### 6. Obliczenia praktyczne

Jak wynika z rozdziału poprzedniego, sposób posługiwania się tablicą jest następujący:

Dla danych  $D$ ,  $d$ ,  $a$  i  $b$  obliczamy stosunki  $(D+d)/b$ ,  $(D-d)/b$  i  $a/b$ , następnie znajdujemy w tablicy wartości

$$w_1 = \psi^* \left( \frac{D+d}{b}, \frac{a}{b} \right), \quad w_2 = \psi^* \left( \frac{D-d}{b}, \frac{a}{b} \right),$$

i wreszcie obliczamy  $e$  z wzoru

$$(27) \quad e = \frac{1}{w_1 - w_2} \cdot R_0 \cdot h.$$

Przykład. Dla arkusza blachy krzemowej BS30-300 znaleziono  $a=100,4$  cm,  $b=100,0$  cm,  $h=0,048$  cm,  $R_0=0,637$  m $\Omega$ . Pomiar przeprowadzono przyrządem, dla którego  $D=17,9$  cm,  $d=12,5$  cm.

Znajdujemy

$$\frac{D+d}{b} = 0,304, \quad \frac{D-d}{b} = 0,054, \quad \frac{a}{b} = 1,00.$$

Interpolując liniowo, znajdujemy z tablicy

$$w_1 = 7,0863, \quad w_2 = 6,4869.$$

Stąd

$$\frac{1}{w_1 - w_2} = 1,668$$

i

$$\rho = 51,00 \mu\Omega\text{cm}.$$

Interesujące jest stwierdzenie, w jaki sposób zastąpienie funkcji  $\psi/\pi$  przez funkcję  $\psi^*$  wpłynęło na wynik. Oznaczając przez  $\Delta u$  błąd wielkości  $u$ , mamy

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta R_0}{R_0} + \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta(w_1 - w_2)}{w_1 - w_2}.$$

Nas obchodzi tylko trzeci wyraz. Korzystając z oszacowania podanego na końcu poprzedniego paragrafu, a mianowicie

$$\Delta w < 2,5 \cdot 10^{-4},$$

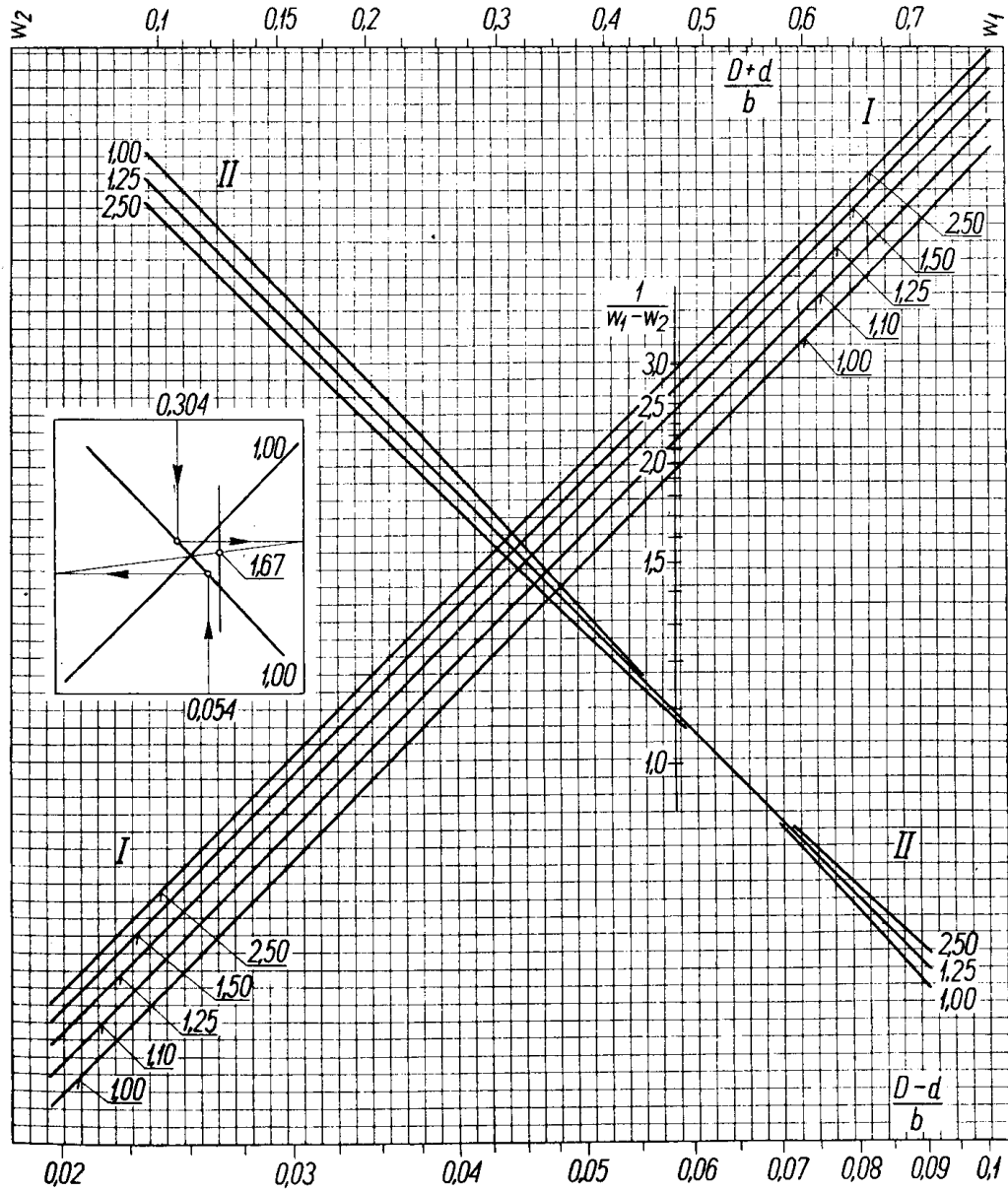
widzimy, że

$$\left| \frac{\Delta(w_1 - w_2)}{w_1 - w_2} \right| < 1 \cdot 10^{-3} = 0,1\%.$$

Błędy  $\Delta R_0/R_0$  i  $\Delta h/h$  są w praktyce o rząd wielkości większe i dlatego podana tutaj metoda rachunku numerycznego jest poprawna.

Na rysunku 7 (str. 185) podano projekt nomogramu ułatwiającego obliczenia. Skale lewa i prawa są regularnymi skalami  $w_1$  i  $w_2$ . Skala  $w_1$  biegnie z góry na dół, a skala  $w_2$  z dołu do góry. Skala dolna jest skalą  $(D-d)/b$  dobraną tak, by wykres  $\psi^*((D-d)/b; 1,25)$  był linią prostą. Skala górna jest skalą  $(D+d)/b$  dobraną podobnie. Wreszcie na trzeciej skali pionowej odłożono wartości  $1/(w_1 - w_2)$ . W poprzek nomogramu biegną dwie rodziny krzywych. Rodzinę I tworzą wykresy funkcji  $\psi^*((D-d)/b, a/b)$  dla  $0,02 \leq (D-d)/b \leq 0,1$ , rodzinę II tworzą wykresy funkcji  $\psi^*((D+d)/b, a/b)$  dla  $0,1 \leq (D+d)/b \leq 0,7$ .

Korzystanie z nomogramu zilustrujemy na przykładzie rachowanym już powyżej.



Rys. 7

Z punktu  $(D-d)/b=0,054$  na skali dolnej prowadzimy pionową aż do przecięcia z krzywą rodziny I o numerze 1,00. Stąd przechodzimy po linii poziomej na skalę lewą, uzyskując punkt  $w_2$ . Następnie

pnie na skali górnej znajdujemy punkt  $(D+d)/b=0,304$  i z niego prowadzimy pionową aż do przecięcia z krzywą rodziny II o numerze 1,00. Przechodząc po poziomej na skalę prawą, otrzymujemy punkt  $w_1$ . Punkt przecięcia prostej łączącej punkty  $w_1$  i  $w_2$  z trzecią skalą pionową daje nam  $1/(w_1-w_2)=1,67$ . Za pomocą tablic otrzymaliśmy liczbę 1,668.

### 7. Zgodność z doświadczeniem

W Głównym Instytucie Elektrotechnicznym we Wrocławiu wykonano prototypem przyrządu wstępne pomiary na blachach krzemowych. Do porównania obliczeń z rzeczywistością użyto wzoru

$$e=12p+c,$$

gdzie  $c$  waha się od 99,9 (dla czystych blach krzemowych) do 12. Otrzymane wyniki zebrane są w tabelicy II. Przy jej obliczeniu przyjęto  $c=11$ , wobec czego trzeba pamiętać o wynikającej stąd tolerancji na zawartość Si, równej około 0,08%. Poza tym otrzymane wyniki obciążone są błędami pomiarów  $h$  i  $R_0$ .

Tablica II  
Pomiary na blachach krzemowych

Nr	Znak arkusza	Zawartość Si w procentach	
		według danych fabrycznych	obliczona
1	BS20 – 21865m	2,12	2,18
2	BS20 – 21865d	2,12	2,11
3	BS28 – 5207	2,82	2,84
4	BS30 – 300	3,40	3,38
5	BS40 – 45099	4,00	4,02
6*	BS40 – 70506	4,60	3,92

Na zakończenie pozwalam sobie złożyć podziękowanie kierownikowi Grupy Technicznej A Instytutu Matematycznego Polskiej Akademii Nauk prof. S. Drobotowi i współpracownikowi tejże Grupy prof. M. Warmusowi za ich cenną pomoc w wykonaniu tej

работы, а также проф. Я. Скворо́нскому, директору Института Электротехнического в Вроцлауе и инж. Я. Курьловичу за постановку задачи, дискуссии по специальности и проведение измерений.

Институт Математический Польской Академии Наук

*(Работа получена 27. 11. 52)*

А. РЫБАРСКИЙ (Вроцлав)

**ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРЕМНИЯ  
В КРЕМНИСТОЙ СТАЛИ**

**РЕЗЮМЕ**

Процент кремния в листах стали определяется электрическим методом на основе эмпирической зависимости между содержанием кремния и удельным электрическим сопротивлением. Чтобы измерить удельное сопротивление стали, обычно вырезают из листа узкую полосу. Я. Курьлович сконструировал прибор, который позволяет измерить сопротивление прямо на листе.

В настоящей статье представлена теория этого прибора. Выведены формулы, как из показаний прибора вычислить удельное сопротивление стали. Хотя эти формулы получены при помощи эллиптических функций, но для практики подана удобная номограмма. Результаты измерений, произведенных прибором, хорошо согласуются с действительностью.

А. RYBARSKI (Wrocław)

**ON AN ELECTRICAL METHOD OF DETERMINING SILICON  
CONTENT IN SILICON STEEL**

**SUMMARY**

The content of silicon in steel sheets is determined by an electrical method based on the experimental relation between silicon content and the electrical resistivity of steel. Usually, in order to measure the resistivity of the steel, a narrow strip is cut out of the sheet. J. Kuryłowicz has constructed an instrument which makes it possible to measure resistivity directly on the sheet.

The paper presents the theory of the instrument. It contains formulae showing how to calculate the resistivity of steel from the readings of the instrument. Although the formulae have been obtained with the aid of elliptic functions, yet, for practical purposes, a convenient nomogram is given. The results of measurements made with the instrument in question are well in accordance with experiment.