ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXVII (1972)

О сходимости и суммируемости двумерных числовых последовательностей в горизонтальном смысле

И. И. Огиевецкий (Днепропетровск)

В работе содержатся результаты, связанные с исследованием горизонтальной сходимости и суммируемости; оказывается, что хорошо известная компактность одномерного множества ограниченных последовательностей уже не имеет места для ограниченного множества двумерных числовых последовательностей при понимании сходимости двумерных последовательностей в классическом прингсхеймовском смысле. Показывается, что она имеет место при понимании сходимости в так называемом горизонтальном смысле, устанавливаются также результаты, связанные с матричным суммированием счетного множества двумерных числовых последовательностей в горизонтальном смысле.

1. Начнем с основного определения. Последовательность $\{S_{m,n}\}$ сходится к s горизонтально [1], если для некоторой неубывающей неотрицательной целочисленной функции $\varphi(m)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{m\to\infty} \varphi(m) = \infty$, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется целое $M = M(\varepsilon)$ такое, что

$$|s - S_{m,n}| < \varepsilon \tag{1}$$

для любой пары целых m и n, для которых одновременно выполняются соотношения (i) $m > M$, $n > M$; (ii) $n > \varphi(m)$. В последующем будем говорить о $\varphi(m)$, как о функции горизонтального предельного перехода (сокращенно — функция г.п.п.). Характер горизонтальной сходимости существенно определяется ее функцией г.п.п. Выбор $\varphi(m) \equiv 0$ приводит к хорошо известному пределу двумерной последовательности в классическом смысле Прингсхейма, широко используемому в теории двумерных числовых последовательностей (см., например, [2]).

---

(1) Горизонтальная сходимость впервые, повидимому, рассматривалась в работе [1]. Определение симметрично относительно индексов m и n, перестановка которых приводит к „вертикальной сходимости".

В работе рассматриваются двумерные числовые матрицы $\{a_{m,n,i,j}\}$, $m = 0, 1, 2, \ldots, n = 0, 1, 2, \ldots$

Предполагаем, что существует $Q > 0$, не зависящее от m и n такое, что

$$\sum_{i=0,j=0}^{\infty} |a_{m,n,i,j}| \leqslant Q, \tag{2}$$

Двойная последовательность $\{\sigma_{m,n}\}$ является преобразованием двойной последовательности $\{S_{i,j}\}$, если (см. [2])

$$\sigma_{m,n} = \sum_{i=0,j=0}^{\infty} a_{m,n,i,j} S_{ij}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Если двойная последовательность $\{\sigma_{m,n}\}$ горизонтально сходится к s, то будем говорить, что $\{S_{i,j}\}$ горизонтально суммируема при помощи матрицы $\{a_{m,n,i,j}\}$ к числу s. Таким образом, горизонтальное суммирование двойной последовательности $\{S_{i,j}\}$ определяется как числовой матрицей $\{a_{m,n,i,j}\}$, так и соответствующей функцией г.п.п. $\varphi(m)$; при одной и той же матрице $\{a_{m,n,i,j}\}$ функции г.п.п. $\varphi(m)$ могут быть разными — в зависимости от суммируемых последовательностей $\{S_{i,j}\}$.

Далее, нам необходимо определение двумерной подпоследовательности. Пусть $\{m(\alpha)\} = m(0), m(1), m(2), \ldots, m(\alpha), \ldots, \lim\limits_{\alpha\to\infty} m(\alpha) = \infty$, и $\{n(\beta)\} = n(0), n(1), n(2), \ldots, n(\beta), \ldots, \lim\limits_{\beta\to\infty} n(\beta) = \infty$ — некоторые монотонно возрастающие подпоследовательности натурального ряда. Тогда $\{S_{m(\alpha),n(\beta)}\}$, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots, \beta = 0, 1, 2, \ldots$ — двойная подпоследовательность двойной последовательности $\{S_{m,n}\}$, $m = 0, 1, 2, \ldots, n = 0, 1, 2, \ldots$ Таким образом, двойная подпоследовательность образуется из основной последовательности вычеркиванием строк, соответствующих номерам $m = m(\alpha)$, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$, и столбцов, соответсвующих номерам $n = n(\beta)$, $\beta = 0, 1, 2, \ldots$, образуя, таким образом, некоторую прямоугольную решетку с вершинами, в которых расположены $\{S_{m(\alpha),n(\beta)}\}$ внутри основной квадратной решетки с вершинами, в которых находятся $\{S_{m,n}\}$.

Рассмотрим вопрос о компактности ограниченной двумерной последовательности $\{S_{m,n}\}$. Хорошо известно, что любое ограниченное одномерное множество $\{S_n\}$ компактно в том смысле, что всегда существует некоторая ее одномерная сходящаяся подпоследовательность. Эта компактность уже не будет иметь места для ограниченного множества двумерных последовательностей, в случае, если предел понимать в смысле Прингсхейма.

Действительно, рассмотрим последовательность $\{S_{m,n}\}$ определенную следующим образом

$$S_{m,n} = 0 \quad \text{для } n < m \quad \text{и} \quad S_{m,n} = 1 \quad \text{для } n \geqslant m. \tag{4}$$

Ее произвольная двойная подпоследовательность $S'_{m,n}$ имеет вид

$$(5) \qquad S'_{m,n} = 0 \quad \text{для } n < n'(m) \quad \text{и} \quad S'_{m,n} = 1 \quad \text{для } n \geqslant n'(m),$$

$m = 0, 1, 2, \ldots$, где $n'(m)$ — целочисленная функция, монотонно неубывающая с ростом m такая, что $\lim\limits_{m\to\infty} n'(m) = \infty$; $n'(m)$ — однозначно характеризует данную подпоследовательность $S'_{m,n}$ последовательности $S_{m,n}$. Из (5) вытекает, что $S'_{m,n}$ расходится при понимании предела в смысле Прингсхейма. Таким образом, ограниченная двойная последовательность не является компактной, если ее сходимость понимать в классическом смысле.

Из теоремы I вытекает, что принцип компактности сохранится, если сходимость понимать в горизонтальном смысле.

2. Теорема I. *Пусть $\{S_{m,n}\}$ произвольная ограниченная двумерная числовая последовательность. Существует ее двойная подпоследовательность, которая сходится в горизонтальном смысле.*

Доказательство. Так как последовательность $\{S_{m,n}\}$ ограничена, то существует $N > 0$ такое, что для всех целочисленных пар m и n $|S_{m,n}| \leqslant N$. Сегмент $[-N, N]$ представим в форме $[-N, N] = [-N, 0) + [0, N]$, множества чисел, принадлежащих $[-N, 0)$ и $[0, N]$, обозначим соответственно N_0 и N_1. Далее положим $[-N, 0) = [-N, -N/2) + [-N/2, 0]$; $[0, N] = [0, N/2) + [N/2, N]$, соответствующие множества чисел пусть будут $N_{00}, N_{01}, N_{10}, N_{11}$, и далее

$$\left[-N, -\frac{N}{2}\right) = \left[-N, -\frac{N}{2} - \frac{N}{4}\right) + \left[-\frac{N}{2} - \frac{N}{4}, -\frac{N}{2}\right),$$

$$\left[-\frac{N}{2}, 0\right) = \left[-\frac{N}{2}, -\frac{N}{4}\right) + \left[-\frac{N}{4}, 0\right),$$

$$\left[0, \frac{N}{2}\right) = \left[0, \frac{N}{4}\right) + \left[\frac{N}{4}, \frac{N}{2}\right),$$

$$\left[\frac{N}{2}, N\right] = \left[\frac{N}{2}, \frac{N}{2} + \frac{N}{4}\right) + \left[\frac{N}{2} + \frac{N}{4}, N\right].$$

Множества чисел, соответствующие третьему рангу разбиений, будут $N_{000}, N_{001}, N_{010}, N_{011}, N_{100}, N_{101}, N_{110}, N_{111}$.

Аналогичным образом вводим множества чисел, соответствующие 4-му, 5-му, $\ldots$, q-му рангам разбиения: если $(q-1)$-му рангу будут соответствовать множества $N_{d_1, d_2, \ldots, d_{q-1}}$ где $d_i = 0$ или 1 для $i \leqslant q-1$, то множества, соответствующие q-му рангу разбиения будут $N_{d_1, d_2, \ldots, d_{q-1}, 0}$, $N_{d_1, d_2, \ldots, d_{q-1}, 1}$, где $d_1, d_2, \ldots, d_{q-1}$ пробегают все значения $(q-1)$-го ранга разбиения.

Последовательность $\{S_{0,\{n\}}\} = (S_{0,0}, S_{0,1}, S_{0,2}, \ldots, S_{0,n}, \ldots)$ разобьем на последовательности $\{S_{0,\{n'_0\}}\}$ и $\{S_{0,\{n'_1\}}\}$, где $\{S_{0,\{n'_0\}}\}$ члены из $\{S_{0,\{n\}}\}$, числовые значения которых принадлежат N_0, и $\{S_{0,\{n'_1\}}\}$ — ее члены из $\{S_{0,\{n\}}\}$, значения которых принадлежат N_1, $\{n'_0\}$ и $\{n'_1\}$ — последовательности индексов этих последовательностей. Так как $\{S_{0,\{n\}}\}$ бесконечна, то необходимо бесконечна одна из этих последовательностей. Пусть для определенности это будет, скажем, $\{S_{0,\{n'_1\}}\}$.

Пусть a_0 — какая-либо из предельных точек последовательности $\{S_{0,\{n'_1\}}\}$ и $\{S_{0,\{n_1\}}\}$ — подпоследовательность этой последовательности сходящаяся к a_0, $\{n_1\}$ — последовательность индексов последовательности $\{S_{0,\{n_1\}}\}$.

Рассмотрим теперь последовательность $\{S_{1,\{n_1\}}\}$, где последовательность индексов $\{n_1\}$ только что определена. Так как $\{S_{1,\{n_1\}}\} \subset \{S_{m,n}\}$ и $\{S_{1,\{n_1\}}\}$ бесконечна, то разбивая последовательность $\{S_{1,\{n_1\}}\}$ на четыре последовательности таких, что совокупность значений, принимаемых членами этих четырех последовательностей, будут соответственно принадлежать множествам $N_{00}, N_{01}, N_{10}, N_{11}$, получим, что одна из этих последовательностей необходимо бесконечна. Пусть это будет, для опеределенности, последовательность, числовые значения которой принадлежат, скажем, N_{10}. Индексы этой последовательности, являющейся подпоследовательностью индексов последовательности $\{n_1\}$, обозначим через $\{n'_{1,10}\}$, а саму последовательность обозначим как $\{S_{1,\{n'_{1,10}\}}\}$.

Пусть a_1 какая-либо из предельных точек этой последовательности, а $\{S_{1,\{n_{1,10}\}}\}$ — ее подпоследовательность, сходящаяся к a_1, $\{n_{1,10}\}$ — последовательность индексов этой последовательности.

Далее рассмотрим последовательность $\{S_{2,\{n_{1,10}\}}\}$. Последовательность $\{S_{1,\{n_{1,10}\}}\}$ распадается на восемь подпоследовательностей со значениями из числовых иножеств $N_{001}, N_{000}, N_{001}, N_{010}, N_{011}, N_{100}, N_{101}, N_{110}, N_{111}$. Одна из этих подпоследовательностей необходимо бесконечна. Пусть, скажем, это будет подпоследовательность с числовыми значениями из N_{101}. Обозначим эту подпоследовательность через $\{S_{2\{n'_{1,10,101}\}}\}$, где $\{n'_{1,10,101}\}$ индексы этой подпоследовательности. Пусть a_2 — одна из предельных точек этой последовательности и $\{S_{2,\{n_{1,10,101}\}}\}$ — ее подпоследовательность, сходящаяся к a_2, $\{n_{1,10,101}\}$ — индексы этой подпоследовательности. Продолжая этот процесс, получим бесконечную последовательность $\{S_{3,\{n'_{1,10,101,1110}}\}$ со значениями, принадлежащими, скажем, множеству N_{1110} и пусть a_3 — одна из ее предельных точек, а $\{S_{3,\{n_{1,10,101,1110}\}}\}$ — некоторая ее бесконечная подпоследовательность, сходящаяся к a_3.

Продолжая этот процесс далее, аналогично получим последовательность $\{S_{4,\{n_{1,10,101,1110,10001}\}}\}$, сходящуюся к a_4 — одной из предельных точек последовательности $\{S_{4,\{n'_{1,10,101,1110,10001}\}}\}$ со значениями из множества N_{10001} и т.д., неограничено, причем индексы каждой из рассматриваемой серии последовательностей являются подпоследовательностью индексов предыдущей.

Так как значения $\{S_{0,\{n_1\}}\}$ принадлежат множеству N_1, значения $\{S_{1,\{n_{1,10}\}}\}$ — множеству N_{10}, значения $\{S_{2,\{n_{1,10,101}\}}\}$ — множеству N_{101} и т.д., по a_0 принадлежит множеству $\overline{N}_1$, a_1 — множеству $\overline{N}_{10}$, a_2 — множеству $\overline{N}_{101}$ и т.д., где $\overline{N}_1, \overline{N}_{10}, \overline{N}_{101}, \ldots$ замыкания соответственных множеств $N_1, N_{10}, N_{101}, \ldots$

Так как последовательность точек $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ расположена на отрезке $[-N, N]$, то она необходимо содержит предельные точки, Обозначим одну из этих точек через a^*. Без потери в общности можно принять, что точка эта единственна, опуская, если это необходимо, части последовательности $\{a_n\}$, сходящиеся к другим предельным точкам. Итак будем считать, что $\{a_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a^*$. Из изложенного способа образования последовательности вытекает

$$(6)\qquad \begin{gathered} |S_{0,\{n_1\}} - a_0| \leqslant N, \qquad |S_{1,\{n_{1,10}\}} - a_1| \leqslant \frac{N}{2}, \\ |S_{2,\{n_{1,10,101}\}} - a_2| \leqslant \frac{N}{4}, \quad \ldots, \quad |S_{m,\{n_{1,10,101,1110,\ldots}\}} - a_m| \leqslant \frac{N}{2^m}, \ldots \end{gathered}$$

Из первых членов вложенных последовательностей индексов $\{n_1\}$, $\{n_{1,10}\}$, $\{n_{1,10,101}\}, \ldots$ образуем диагональную последовательность $\{n^*\} = \{n_1^*, n_{1,10}^*, n_{1,10,101,\ldots}^*\}$ и рассмотрим двойную последовательность $\{S_{m,\{n^*\}}\}$ с индексами $m = 0, 1, 2, \ldots$ и только что определенной $\{n^*\}$. Так как последовательность $\{n^*\}$ является, начиная с некоторого члена, подпоследовательностью каждой из последовательностей $\{n_1\}$, $\{n_{1,10}\}$, $\{n_{1,10,101}\}, \ldots$, то можно построить некоторую последовательность монотонно возрастающих целых чисел

$$\varphi(0) < \varphi(1) < \varphi(2) < \ldots < \varphi(m) < \ldots$$

с $\lim \varphi(m) = \infty$ при $m = \infty$, такую что $\{n^*\}$ после номера $\varphi(0)$ входит в последовательность $\{n_1\}$, после номера $\varphi(1)$ входит в последовательность $\{n_{1,10}\}$, после $\varphi(2)$ — в последовательность $\{n_{1,10,101}\}$ и т.д. Нетрудно видеть, что из соотношения (6) тогда вытекает, что последовательность $\{S_{m,\{n^*\}}\}$ является горизонтально сходящейся к числу s, что и завершает доказательство.

Из приведенного рассмотрения вытекает, что построенная горизонтально сходящаяся последовательность $\{S_{m,\{n^*\}}\}$ сходится также и по строкам.

Заметим, что если к индексам $\{m\} = (0, 1, 2, \ldots)$ рассматриваемой последовательности $\{S_{m,\{n^*\}}\}$ применить диагональный процесс, то получим горизонтально сходящуюся последовательность, которая, кроме того, сходится как по строкам, так и по столбцам.

Рассмотрим горизонтальное суммирование ограниченных двойных последовательностей двумерными матрицами, удовлетворяющими условиям (2). Прежде всего для этого необходима следующая.

Теорема 2. *Пусть* $a\{^k_{m,n,i,j}\}$, $k=1,2,\ldots$, *последовательность двумерных числовых матриц такая, что двумерные* (m,n) *таблицы, образующие k-ую матрицу, являются двумерной подпоследовательностью двумерных* (m,n)*-таблиц, образующих* $(k-1)$*-ю матрицу этой же последовательности* $k=2,3,\ldots$ *Тогда существует двумерная числовая матрица* $\{a_{m^*,n^*,i,j}\}$ *с индексами* $\{m^*\}=(m^*_0, m^*_1, m^*_2, \ldots)$, $\{n^*\}=(n^*_0, n^*_1, n^*_2, \ldots)$, *такая что* (m^*, n^*) — *слои этой матрицы, начиная с некоторого слоя* $\{m^*_\alpha, n^*_\alpha\}$, $\alpha>\alpha(k)$, $\beta>\beta(k)$, $\alpha(k)$ *и* $\beta(k)$ — *целые, растущие с ростом* k, *являются частью* (m,n) — *слоев матриц* $\{a^k_{m,n,i,j}\}$.

Доказательство. Обозначим через $\{m^k\}=(m^k_1, m^k_2, \ldots)$ и $\{n^k\}=$ $=(n^k_1, n^k_2, \ldots)$ последовательности первых и вторых индексов матрицы $\{a^k_{m,n,i,j}\}$, таким образом, $(m,n)=(\{m^k\}, \{n^k\})$. Тогда по условию теоремы имеем

$$\{m^1\}\supset\{m^2\}\supset\ldots\supset\{m^k\}\supset\{m^{k+1}\}\supset\ldots, \tag{7}$$

$$\{n^1\}\supset\{n^2\}\supset\ldots\supset\{n^k\}\supset\{n^{k+1}\}\supset\ldots \tag{8}$$

Из первых элементов вложенной системы последовательностей (7) образуем диагональную последовательность $\{m^*\}$ и, аналогично, и первых элементов последовательностей (8) образуем диагональную последовательность $\{n^*\}$,

$$\{m^*\}=(m^1_1, m^2_1, m^3_1, \ldots), \tag{9}$$

$$\{n^*\}=(n^1_1, n^2_1, n^3_1, \ldots). \tag{10}$$

Так как последовательности $\{m^*\}$ и $\{n^*\}$ по своему построению являются, начиная с некоторых индексов $\alpha(k)$ и $\beta(k)$, подпоследовательностями последовательностей $\{m^k\}$ и $\{n^k\}$, то матрица $\{a_{m^*,n^*,i,j}\}$, где индексы m^* и n^* пробегают значения из (9) и (10), и является искомой.

Следствие I. *Пусть* $F\{a^k_{m,n,i,j}\}$ *обозначает множество ограниченных последовательностей, горизонтально суммируемых матрицей* $\{a^k_{m,n,i,j}\}$. *Тогда*

$$F\{a^k_{m,n,i,j}\}\subset F\{a^{k+1}_{m,n,i,j}\}$$

ля любого $k=1,2,\ldots$

Теорема 3. *Пусть дано произвольное счетное множество ограниченных последовательностей* $\{S^k_{i,j}\}$, $k=1,2,\ldots$, $|S^k_{i,j}|\leqslant H(k)$, $i=0,1,2,\ldots$, $j=0,1,2,\ldots$, *константа* $H(k)$ *зависит от* k, *тогда существует дву-*

мерная чцсловая матрица горизонтально суммирующая каждую из последовательностей $\{S_{i,j}^k\}$, причем связанные с горизонтальным суммированием функции г.п.п. $\varphi(m)$ зависит от индекса $k, k = 1, 2, \dots$

Доказательство. Положим

$$\sigma_{m,n}^1 = \sum_{i=0,j=0}^{\infty} a_{m,n,i,j} S_{i,j}^1.$$

Так как $|\sigma_{m,n}^1| \leqslant H(1)Q$, где Q из (2), то из последовательности $\{\sigma_{m,n}'\}$ на основании теоремы I можно выбрать двумерную горизонтально сходящуюся подпоследовательность, скажем, $\{\sigma_{m^1,n^1}\}$, где $\{m^1, n^1\}$ двойная последовательность индексов этой подпоследовательности. Матрица $\{a_{m^1,n^1,i,j}\}$, соответствующая последовательности $(\{m^1\}, \{n^1\})$ горизонтально суммирует, таким образом, последовательность $\{S_{i,j}^1\}$. Рассмотрим теперь последовательность

$$\sigma_{m^1,n^1}' = \sum_{i=0,\,j=0}^{\infty} a_{m^1,n^1,i,j} S_{i,j}^2.$$

Последовательность $\{\sigma_{m^1,n^1}^2\}$ ограничена и опять таки на основании теоремы I выберем из последовательности $\{\sigma_{m^1,n^1}^2\}$ горизонтально сходящуюся двойную подпоследовательность, скажем, $\{\sigma_{m^2,n^2}^2\}$, где $\{m^2, n^2\}$ — последовательность индексов этой подпоследовательности, образующая некоторую двумерную подпоследовательность двойной $\{m^1, n^1\}$ — последовательности. Соответствующая двумерная матрица $\{a_{m^2,n^2,i,j}\}$ состоит из части (m^1, n^1) слоев матрицы $\{a_{m^1,n^1,i,j}\}$ и суммирует как последовательность $S_{i,j}^1$, так и последовательность $S_{i,j}^2$. Аналогично, рассматривая последовательность

$$\sigma_{m^2,n^2}^3 = \sum_{i=0,j=0}^{\infty} a_{m^2,n^2,i,j} S_{ij}^3$$

и выбирая горизонтально сходящуюся подпоследовательность $\{\sigma_{m^3,n^3}^3\}$ получим, соответственно, матрицу $\{a_{m^3,n^3,i,j}\}$, (m^3, n^3) слои которой принадлежат (m^2, n^2) слоям матрицы $\{a_{m^2,n^2,i,j}\}$. Продолжим этот процесс неограничено и обозначим матрицы $\{a_{m^1,n^1,i,j}\}$ через $\{a_{m,n,i,j}^1\}$, $\{a_{m^2,n^2,i,j}\}$ через $\{a_{m,n,i,j}^2\}$, $\{a_{m^3,n^3,i,j}\}$ через $\{a_{m,n,i,j}^3\}, \dots, \{a_{m^k,n^k,i,j}\}$ через $\{a_{m,n,i,j}^k\}$, получим, что (m, n) слои матрицы $\{a_{m,n,i,j}^k\}$ являются двойной подпоследовательностью (m, n) слоев матрицы $(a_{m,n,i,j}^{k-1})$ и что матрица $\{a_{m,n,i,j}^k\}$ суммирует последовательности $\{S_{i,j}^1\}, \{S_{i,j}^2\}, \dots, \{S_{i,j}^k\}$; так как матрицы $\{a_{m,n,i,j}^k\}$ удовлетворяют условиям теоремы 2, то также как и в теореме 2, образуем матрицу $\{a_{m^*,n^*,i,j}\}$. Так как $F\{a_{m,n,i,j}^k\} \supset \{S_{i,j}^k\}$, то матрица $\{a_{m^*,n^*,i,j}\}$ является искомой, так как суммирует каждую из последовательностей $\{S^k_{i,j}\}$, где $k = 1, 2, \ldots$

Литература

[1] F. London, *Über Doppelfolgen und Doppelreihen*, Math. Ann. 53 B (1900).
[2] C. N. Moore, *Summable series and convergence factors*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, v. 22, New York 1938.

ДНЕПРОПЕТРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Reçu par la Rédaction le 5. 2. 1970