C. RAJSKI (Warszawa)

O PEWNYM PRZYPADKU OBLICZANIA NADMIARÓW PLANOWANYCH

Niedoskonałość metod produkcji powoduje, że obok sztuk dobrych przemysł wytwarza również sztuki niedobre. Odbiorca towaru, używający go bądź do celów handlowych, bądź do dalszej przeróbki, potrzebuje określonej liczby sztuk dobrych, powinien więc zamówić nieco więcej towaru ponad zapotrzebowanie teoretyczne. Jeśli odbiorca potrzebuje rocznie L sztuk, a zamawia L' sztuk, to wyrażenie

$$r = \frac{L' - L}{L} \tag{1}$$

będziemy nazywali *nadmiarem względnym* towaru.

Potrzebny nadmiar towaru sztukowego jest jednoznacznie określony przez jego wadliwość. Pod *wadliwością* w towaru sztukowego będziemy rozumieli stosunek liczby sztuk niedobrych do całkowitej liczby sztuk.

Jeśli wadliwość towaru przyjętego w ciągu roku do magazynu odbiorcy jest równa w_0, to potrzebny nadmiar względny r określa się na podstawie wzoru

$$r = \frac{w_0}{1 - w_0}. \tag{2}$$

Wykres funkcji (2) jest podany na rys. 1a. Jeśli przy odbiorze nie jest stosowana kontrola statystyczna, to są dwie możliwości. Odbiorca może stosować kontrolę stuprocentową, tzn. kontrolować towar sztuka po sztuce i przyjmować tylko sztuki dobre. Wówczas wadliwość towaru odebranego jest równa zeru i nadmiaru zamawiać nie trzeba. Takie postępowanie jest jednakże uzasadnione w nielicznych tylko przypadkach, ponieważ z reguły pochłania ono wielką ilość robocizny, a często jest nie do przyjęcia, np. gdy badanie jest niszczące.

Odbiorca może nie stosować żadnej kontroli przy odbiorze towaru. Wówczas wadliwość w_0 odebranego towaru jest równa wadliwości w towaru dostarczonego. Wadliwość ta jest jednakże odbiorcy nieznana lub znana tylko z grubsza, co powoduje naturalną tendencję zamawiania towarów z dużymi nadmiarami dla zabezpieczenia się przed skutkami dużej wadliwości.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie metody obliczania planowanych nadmiarów towarów sztukowych przy stosowaniu kontroli statystycznej.

Rozpatrzmy następujący tryb postępowania. W ciągu roku określony dostawca dostarcza określonemu odbiorcy b partii towaru. Wszystkie partie mają tę samą liczność N i tę samą wadliwość w_d. Każda partia jest badana statystycznie na podstawie planu pojedynczego $m//n$. Symbol ten oznacza, że z każdej partii pobiera się metodą beztendencyjną n sztuk zwanych *próbką* i poddaje badaniom. Jeśli w próbce znajdzie się co najwyżej m sztuk niedobrych, partię uznaje się za dobrą i przyjmuje do magazynu odbiorcy.

Prawdopodobieństwo takiego zdarzenia określa się wzorem

$$P = \sum_{z=0}^{m} \binom{n}{z} w_d^z (1-w_d)^{n-z}. \tag{3}$$

Na rys. 1b podano przebieg funkcji $P(w_d)$ dla $m = 5$ i $n = 100$.

Jeśli próbka okaże więcej niż m sztuk niedobrych, to partię uznaje się za niedobrą. Niedobre partie podlegają sortowaniu, tzn. wszystkie sztuki podlegają kontroli, poczem do magazynu odbiorcy zostają przyjęte tylko sztuki dobre. Przy tym trybie postępowania wadliwość w_0 towaru, który po b dostawach znajdzie się w magazynie odbiorcy, jest przeważnie nieco mniejsza od wadliwości w_d towaru dostarczonego. Rzeczywiście, jeśli bezpośrednio do magazynu odbiorcy przyjęto x partii spośród b dostarczonych, to w magazynie znajdzie się $Nx(1-w_d)$ sztuk dobrych, a Nxw_d sztuk niedobrych. Pozostałych $b-x$ partii podlega sortowaniu, wobec czego do magazynu dostanie się tylko $N(b-x)$ samych dobrych sztuk. Razem w magazynie znajdzie się $N(b-xw_d)$ sztuk dobrych oraz Nxw_d sztuk niedobrych. Stąd

$$w_0 = w_d \frac{x}{b}. \tag{4}$$

Zależność w_0 od w_d dla $b=12$ i $x=8,9,10,11,12,\ldots$ pokazano na rys. 1c.

Ponieważ x, tzn. liczba partii przyjętych w ciągu roku bez sortowania, jest zmienną losową, wadliwość w_0 też jest zmienną losową. Kształt funkcji $w_0(w_d,x)$ wskazuje na to, że w_0 jest wprost proporcjonalne do x. Z powyższego wynika następujące twierdzenie:

Jeśli prawdopodobieństwo, że x będzie co najwyżej równe a, jest równe q, to prawdopodobieństwo, że w_0 będzie co najwyżej równe pewnej granicznej wadliwości g określonej wzorem (4) *przy podstawieniu a na miejsce x, jest też równe q.*

Dla późniejszych potrzeb zanotujemy w tym miejscu wzór na g:

$$g = w_d \frac{a}{b}. \tag{5}$$

Prawdopodobieństwo q przyjęcia co najwyżej a partii na b dostarczonych jest dane przez wzór

$$q = \sum_{x=0}^{a} \binom{b}{x} p^x (1-p)^{b-x}. \tag{6}$$

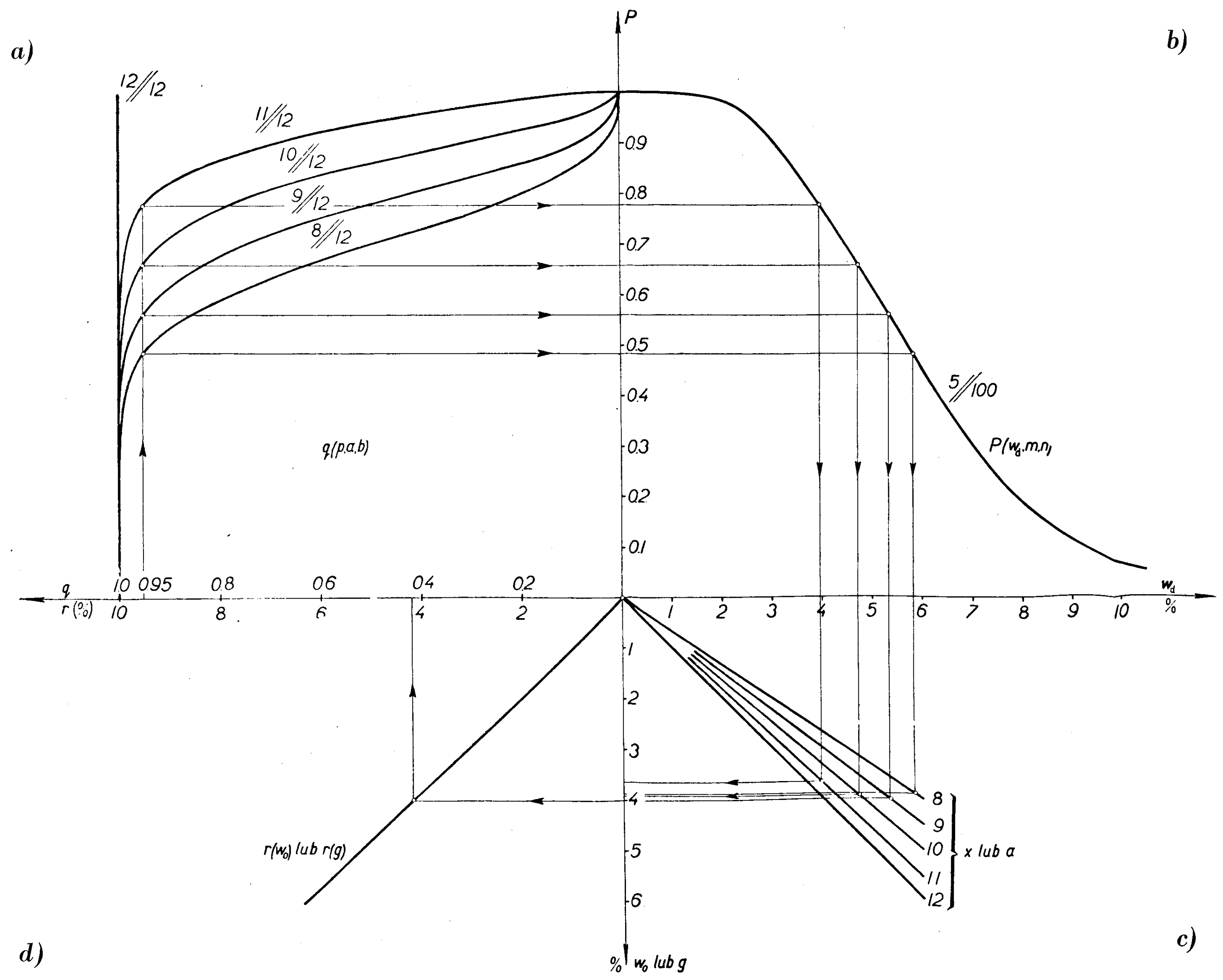
Prawdopodobieństwo to będziemy nazywali *współczynnikiem gwarancji nadmiaru.*

Wzór (6) jest równokształtny ze wzorem (3). Wynika z tego, że przebieg charakterystyki $q(p,a,b)$ jest taki sam jak charakterystyki $p(w_d,m,n)$. Dlatego też na rys. 1d charakterystyki te zostały oznaczone symbolami kształtu $a//b$, tak jak dla planów pojedynczych. Przyjęto $b=12$, tzn. założono, że towar jest dostarczany w 12 partiach.

Zespół wzorów (2), (3), (5) i (6) wyznacza rozwiązanie następującego zagadnienia:

Obliczyć planowany nadmiar, jeśli dany jest współczynnik gwarancji nadmiaru, liczba dostaw rocznych oraz plan odbioru statystycznego.

Rozwiązanie polega na tym, żeby dla danego q obrać pewną wartość a i rozwiązać (6) względem p, otrzymaną wartość wstawić do (3) i rozwiązać względem w_d, otrzymaną wartość w_d oraz poprzednio obraną wartość a wstawić do (5) i odnaleźć wadliwość



a)
b)
c)
d)
P
12//12
11//12
10//12
9//12
8//12
5//100
P(w_d,m,n)
q(p,a,b)
w_d
%
q
r (%)
r(w_0) lub r(g)
x lub a
% w_0 lub g

graniczną g. Postępowanie to należy powtórzyć dla innych wartości a, otrzymując w ten sposób $b-1$ wartości wadliwości granicznej g. Wśród nich jest pewna największa wadliwość $g_{\max}$. Wstawiając wartość $g_{\max}$ do wzoru (2) możemy obliczyć planowany nadmiar towaru, przy czym ryzyko, że nadmiar ten okaże się niewystarczający, jest w najniekorzystniejszym przypadku równe $1-q$. Pod najniekorzystniejszym przypadkiem należy rozumieć to, że dostawca stale dostarcza towar o takiej wadliwości, dla której g przyjmuje wartość $g_{\max}$. Ten przypadek jest zresztą bardzo mało prawdopodobny, wobec czego rzeczywiste ryzyko odbiorcy jest mniejsze od $1-q$. Obliczenie tego rzeczywistego ryzyka byłoby możliwe tylko wówczas, gdybyśmy znali rozkład wadliwości towaru dostarczanego. Rozkład ten znamy jednakże tylko w nielicznych przypadkach.

Wykorzystanie opisanej metody znajdowania $g_{\max}$ nie jest na ogół możliwe na drodze analitycznej, ponieważ wymaga wielokrotnego rozwiązywania równań algebraicznych stopnia b i stopnia n. Jednakże dla potrzeb praktyki wystarcza dokładność, którą można osiągnąć na drodze graficznej.

Dla użycia metody graficznej należy ustawić w podany sposób rysunki 1a, 1b, 1c i 1d. Dalsze postępowanie jest następujące: Najpierw odcinamy na osi q obraną wartość, np. 0,95 i przez ten punkt prowadzimy prostą równoległą do osi p. Punkty przecięcia się tej prostej z charakterystykami $q(p,a,b)$ rzutujemy w kierunku równoległym do osi na charakterystykę $p(w_d,m,n)$. Otrzymane na tej charakterystyce punkty rzutujemy w kierunku równoległym do osi g na charakterystyki $g(w_d,a)$; wartości parametru a muszą być w każdym przypadku te same, co przy poszczególnych charakterystykach $q(p,a,b)$. W wyniku, na charakterystykach $g(w_d,a)$ otrzymujemy po jednym punkcie. Każdy z tych punktów rzutujemy na oś g. Wreszcie największą z otrzymanych wartości g rzutujemy na charakterystykę $r(g)$, z której odczytujemy planowany nadmiar r towaru.

Opisana metoda została przedstawiona dla przypadku, gdy poszczególne partie są odbierane na podstawie planów pojedynczych. Metoda ta jest jednakże ważna również dla planów wielostopniowych oraz dla planów badania na właściwość liczbową. Wystarczy, żeby znana była charakterystyka $p(w_d)$.

Spośród czterech argumentów, od których zależy nadmiar planowany, wielkości dwu, a mianowicie gwarancji nadmiaru i liczby dostaw rocznych, są uwarunkowane czynnikami leżącymi poza zakresem przedstawionej metody, natomiast pozostałe dwie można dobierać na podstawie wniosków z niej wynikających.

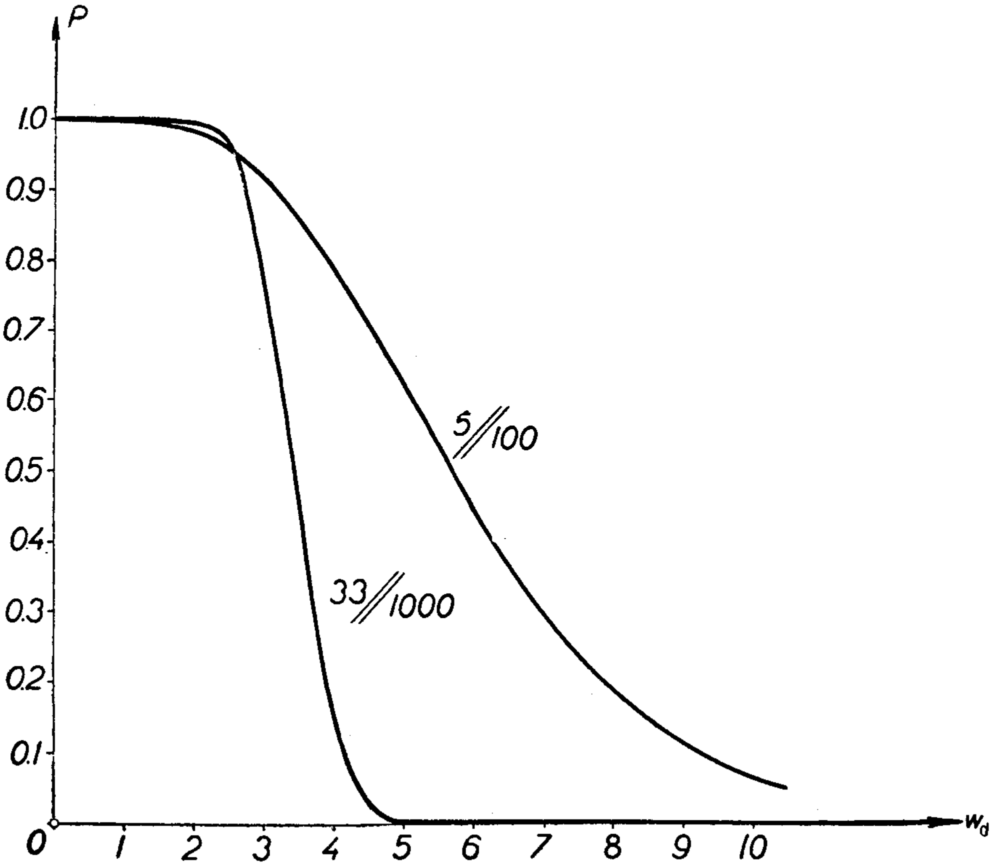
Ze względów oszczędnościowych pożądane jest utrzymywanie nadmiarów na jak najniższym poziomie. Obniżenie nadmiarów można uzyskiwać przez niski współczynnik gwarancji nadmiaru, ale wówczas wzrasta ryzyko niewykonania planu rocznego przez odbiorcę. W przedstawionym przykładzie współczynnik gwarancji nadmiaru został dowolnie przyjęty jako równy 0,95. W dyskusji na ten temat J. Oderfeld wysunął sugestię, żeby współczynnik ten był większy przy małej liczbie dostaw w ciągu roku, a większy przy dużej liczbie dostaw. W każdym razie optymalna wielkość tego współczynnika nie da się określić na podstawie niniejszej metody.

Również liczba dostaw rocznych b wynika z rodzaju i wielkości dokonywanych transakcji i na jej dobór metoda niniejsza nie może mieć wpływu. Natomiast dobór planu odbiorczego nie jest uwarunkowany czynnikami zewnętrznymi i może być dokonywany na podstawie niniejszej metody.

Plany odbiorcze klasyfikujemy zazwyczaj na podstawie tej wadliwości towaru, której odpowiada prawdopodobieństwo uznania partii za dobrą równe 0,95. Wadliwość tę oznaczamy zazwyczaj przez w_2. Tej samej wartości w_2 odpowiada z dużą dokładnością wiele planów $m//n$. Jednakże charakterystyki planów o tej samej wartości w_2 mogą się znacznie różnić między sobą. Jako przykład podano na rys. 2 charakterystyki planów 5//100 i 33//1000. Przechodzą one przez punkt o współrzędnych $w_2 = 2{,}6\%$, $p = 0{,}95$, ale dla wadliwości większych niż w_2 charakterystyka planu 33//1000 opada znacznie szybciej niż charakterystyka planu 5//100. Oznacza to, że prawdopodobieństwo uznania partii towaru za dobrą wraz ze wzrostem wadliwości powyżej w_2 maleje szybciej w planie 33//1000 niż w planie 5//100. Mówimy, że plan 33//1000 jest *selektywniejszy* niż plan 5//100. Można dowieść, że odpowiednio zdefiniowana selektywność planu, w granicach ważności prawa Poissona, zależy wyłącznie od m; wzrost m przy stałym w_2 pociąga za sobą zawsze wzrost liczności próbki.

Łatwo zauważyć, że plan selektywniejszy wymaga stosowania mniejszych rezerw towarowych. Rzeczywiście, jak wynika z przebiegu charakterystyk, tym samym wartościom prawdopodobieństw p odpowiadają w selektywniejszym planie mniejsze wadliwości w_d, a zatem mniejsze wadliwości g i mniejsze nadmiary towarów. Zatem nadmiar towaru maleje wraz ze wzrostem liczności próbki. W granicznym przypadku liczność próbki staje się równa liczności partii. Wówczas nadmiar towaru jest równy zeru, ale koszta odbioru są największe, ponieważ odbiór już nie jest statystyczny i kontroli odbiorczej podlegają wszystkie dostarczone sztuki towaru.

Zapewne dla większości towarów istnieje optymalna liczność próbki, dla której suma szkody gospodarczej spowodowanej na-



Rys. 2. Charakterystyki dwóch planów badania.

byciem nadmiaru, kosztów badania próbki i kosztów sortowania partii uznanych za niedobre, osiąga minimum. Zagadnienie to można przedstawić w sposób następujący:

Niech cena jednej sztuki towaru wynosi c. Wówczas koszt nadmiaru dla każdej partii jest crN. Szkoda gospodarcza spowodowana nabyciem tego nadmiaru jest niewątpliwie do jego kosztu proporcjonalna. Oznaczając współczynnik proporcjonalności przez K otrzymamy, że szkoda ta jest $KcrN$. Koszt badania jest na ogół liniową funkcją liczności próbki, tzn. może być przedstawiony w postaci $kn+k_1$. Koszt badania każdej sztuki przy sortowaniu jest też k. Na b dostaw rocznie sortuje się $b-x$ partii; zatem całkowity koszt sortowania w ciągu roku jest $Nk(b-x)$, a na jedną partię przypada średnio koszt $Nk(1-x/b)$. Oznaczając przez H wymienioną wyżej sumę szkody gospodarczej spowodowanej nabyciem nadmiaru, kosztów badania próbki i kosztów sortowania, będziemy mogli napisać

$$H = KcrN + kn + k_2 + Nk\left(1-\frac{x}{b}\right). \tag{7}$$

Koszt H jest zmienną losową, ponieważ zależy od x, które jest zmienną losową. Możemy wprawdzie określić optymalną liczność próbki z warunku

$$\frac{dH}{dn} = 0, \tag{8}$$

ponieważ wyraz zawierający x nie zależy od n, a więc znika przy różniczkowaniu, zasadniczą jednak trudnością przy praktycznym korzystaniu z ostatniego równania jest to, że nie potrafimy w wyraźnej postaci przedstawić zależność r od n. W toku są już prace nad obliczeniem wielkości nadmiarów dla kilkuset kombinacji argumentów b, m, n i q. Otrzymane wyniki można będzie zapewne ująć w zakresie interesującym praktykę w analogiczną postać i w ten sposób z pewnym przybliżeniem określić kształt funkcji H. Pozwoli to na każdorazowe obliczenie optymalnej wielkości próbki, jeżeli znane będą: liczba partii dostarczonych w ciągu roku, liczność każdej partii, wymagany stopień gwarancji nadmiaru, cena jednej sztuki towaru, koszt badania jednej sztuki oraz współczynnik K.

Szczegóły tego sposobu są kwestią przyszłości, zapewne niedalekiej, już obecnie można jednak sądzić, że proponowana metoda znajdzie konkretne zastosowanie gospodarcze. Przypuszczalnie bowiem nadmiary obecnie stosowane są raczej zbyt wielkie wskutek braku metody ich obliczania. Przez zastosowanie przedstawionej metody można było by stworzyć normatywy planowania nadmiarów towarów sztukowych nie podlegających badaniom niszczącym, a w konsekwencji tego zwolnić pewną ilość środków obrotowych i pewną ilość dóbr dla potrzeb życia gospodarczego.

Państwowy Instytut Matematyczny

(Praca wpłynęła dnia 15. 9. 1951 r.)

Ц. РАЙСКИЙ (Варшава)

О НЕКОТОРОМ СЛУЧАЕ НАХОЖДЕНИЯ ПЛАНОВЫХ ИЗЛИШКОВ

РЕЗЮМЭ

Работа содержит метод нахождения плановых излишков штучных товаров в случаях применения статистического контроля, а также сортировки партии, признанных плохими.

После сортировки партии не содержат плохих штук, в результате чего снижается средняя доля брака товара, нагромождавшегося после известного числа поставок в складе получателя. Таким образом сортировка является фактором, предохраняющим, в известной степени, получателя перед результатами случайных колебаний доли брака поставляемого товара. Характер этого предохранения неабсолютный, только статистический. Можно найти вероятность того, что доля брака полученного товара не превысит известной критической доли брака. Зная эту критическую долю брака получатель может найти излишек товара, который необходимо заказать для того, чтобы вероятность получения по крайней мере необходимого числа штук равнялась любому заданному числу. Работа содержит аналитическое обоснование вышеуказанных соотношений, а также графический метод нахождения размеров излишка, который необходимо заказать.

C. RAJSKI (Warszawa)

ON A CERTAIN CASE OF CALCULATING PLANNED SURPLUSSES

SUMMARY

The paper describes a method of calculating planned surplusses of item goods in cases where statistical control is applied and the lots found bad are screened. After screening, the lots no longer contain defective items and consequently lower the mean fraction defective of the goods which after a certain number of deliveries accumulate in the consumer's store. In this way screening constitutes a factor which, to a certain degree, secures the consumer against the effects of accidental variations in the fraction defective

of goods delivered. This security is not absolute but statistical. It is possible to calculate the probability that the fraction defective of the goods accepted will not exceed a certain limit. Knowing this limit the consumer can calculate the surplus of goods which he should order so that he might — with an arbitrarily assumed probability — obtain at least as many good items as he needs. The paper contains the analytical foundation of the relations described above and a graphical method of finding the quantity of the surplus which should be ordered.