

Sur l'équation fonctionnelle $f[x + yf(x)] = f(x)f(y)$

par C. GH. POPA (Timișoara)

§ 1. L'équation fonctionnelle:

$$(1) \quad f[x + yf(x)] = f(x)f(y)$$

a été étudiée par S. Gołąb et A. Schinzel dans [1]. Les auteurs y démontrent que les seules solutions de l'équation (1) continues sur tout l'axe réel sont les fonctions:

$$(a) \quad f(x) = 0;$$

$$(b) \quad f(x) = 1 + ax;$$

$$(2) \quad (c) \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{1}{a}, \\ 1 + ax, & x > -\frac{1}{a}, \end{cases} \quad a > 0;$$

$$(d) \quad f(x) = \begin{cases} 1 + ax, & x < \frac{1}{a}, \\ 0, & x \geq \frac{1}{a}, \end{cases} \quad a > 0.$$

Dans le présent travail nous proposons d'étudier par une autre voie l'équation (1), pour trouver les solutions mesurables et surtout celles mesurables et discontinues; nous y réduisons le problème de leur détermination à celui de la détermination des sous-groupes multiplicatifs de nombres réels de mesure nulle.

§ 2. Nous définirons d'abord dans l'ensemble R des nombres réels une opération algébrique qui transforme cet ensemble dans un semi-groupe.

PROPOSITION 1. *Si dans l'ensemble R des nombres réels on définit une opération algébrique par la relation:*

$$(3) \quad x \perp y = x + yf(x),$$

où $f(x)$ est une solution de l'équation (1), alors par rapport à cette opération algébrique R est un semigroupe R^\perp , admettant le nombre zéro comme élément d'effet nul à droite.

Démonstration. On a successivement:

$$\begin{aligned}(x \perp y) \perp z &= [x + yf(x)] \perp z = x + yf(x) + zf[x + yf(x)] \\ &= x + yf(x) + zf(x)f(y),\end{aligned}$$

$$x \perp (y \perp z) = x \perp [y + zf(y)] = x + [y + zf(y)]f(x) = x + yf(x) + zf(x)f(y),$$

c'est-à-dire:

$$(x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z).$$

En faisant $y = 0$ dans (3), il résulte $x \perp 0 = x$, quel que soit $x \in R^\perp$.

CONSÉQUENCE. L'équation (1) devient d'après (3),

$$(1') \quad f(x \perp y) = f(x)f(y),$$

ce qui montre que f est un homomorphisme du semigroupe R^\perp sur un semigroupe multiplicatif de nombres réels.

Si nous faisons $y = 0$ dans (1'), en considérant que $x \perp 0 = x$, il résulte soit $f(x) = 0$, soit, si $f(x)$ n'est pas identiquement nulle, $f(0) = 1$. Dans ce dernier cas, (3) montre qu'on a aussi $0 \perp x = x$, c'est-à-dire dans ce cas zéro est un élément d'effet nul bilatéral.

PROPOSITION 2. Si la solution f n'est pas identiquement nulle, alors l'ensemble $A \subset R$, défini ainsi:

$$(4) \quad A = \{x \mid f(x) \neq 0\},$$

est un groupe par rapport à l'opération (3).

Les équations:

$$(5) \quad a \perp x = b,$$

$$(6) \quad x \perp a = b,$$

ont des solutions uniques dans R^\perp si $a \in A$, $b \in R^\perp$.

Démonstration. Soit $x, y \in A$. Alors on a:

$$f(x \perp y) = f(x)f(y) \neq 0,$$

d'où il résulte que $x \perp y \in A$.

Comme $f(0) = 1$, on a $0 \in A$. En posant

$$0 = x \perp x^{-1} = x + x^{-1}f(x),$$

nous obtenons:

$$(7) \quad x^{-1} = -\frac{x}{f(x)},$$

puisque $f(x) \neq 0$ si $x \in A$.

Il en résulte que A est un groupe.

Finalement, l'équation (6) devient, en vertu de (3),

$$a + xf(a) = b,$$

d'où

$$(8) \quad x = \frac{b-a}{f(a)},$$

puisque $f(a) \neq 0$ si $a \in A$.

De la même manière (6) entraîne:

$$x = \frac{bf(a) - af(b)}{f(a)}.$$

Si f_A est la restriction de f à l'ensemble A , la relation (1') montre que f_A est une application homomorphe du groupe A sur un groupe multiplicatif $G = f(A)$ de nombres réels. Il en résulte que l'ensemble

$$\Omega = \{x \mid f_A(x) = 1\},$$

est le noyau de cet homomorphisme et par suite il est un sous-groupe invariant du groupe A .

Observons que si $x, y \in \Omega$, alors $x \perp y = x + y$, ce qui montre que Ω est un groupe additif de nombres réels et que deux nombres $u, v \in A$ appartiennent à la même classe de A/Ω si et seulement si $u \perp v^{-1} \in \Omega$ c'est-à-dire si et seulement si $u - v \in \Omega$.

Il en résulte que les classes du groupe factoriel A/Ω s'obtiennent par une translation de groupe Ω .

On constate aisément que si Ω ne se réduit pas au nombre zéro, alors tout $\omega \in \Omega$ est une période de f et réciproquement, si ω est une période de f , alors $\omega \in \Omega$ (v. [1], p. 118).

Dans [1] les solutions de l'équation (1) dont l'ensemble des valeurs est contenu dans l'ensemble $T = (0, 1, -1)$ sont appelées triviales.

Dans [1] il a été démontré (p. 119-120) que si $f(x)$ est périodique et non triviale, alors $f(x)$ est micropériodique, c'est-à-dire le groupe Ω de ses périodes admet le nombre zéro comme point d'accumulation. Dans le même travail (p. 119) les auteurs ont remarqué qu'une solution $f(x)$ de l'équation (1) non constante, micropériodique et mesurable est presque partout nulle.

Si $f(x)$ est périodique-mais non micropériodique-non constante et mesurable, alors on sait ([1], p. 119) que le groupe de ses périodes est de mesure nulle.

Comme, dans ce cas, l'ensemble A est de la forme:

$$A = \Omega \quad \text{ou} \quad A = \Omega \cup \Omega^*$$

où Ω est un groupe additif et Ω^* une translation de Ω , ([1], p. 118-119), on voit que A est de mesure nulle, comme réunion de deux ensembles de mesure nulle.

Il résulte que, dans ce cas aussi, $f(x)$ est presque partout nulle.

Par conséquent, si la solution $f(x)$ est périodique, mesurable et non constante, elle est presque partout nulle.

C'est pourquoi, dans ce qui suit, nous nous occuperons seulement des solutions non périodiques et non triviales

PROPOSITION 3. *Si $f(x)$ est une solution non périodique et si le groupe A possède au moins deux éléments différents de zéro, alors A est un groupe commutatif. Dans ce cas il existe un nombre réel $a \neq 0$ tel que:*

$$f(x) = \begin{cases} 1 + ax, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Démonstration. Si $f(x)$ n'est pas périodique et par suite non identiquement nulle, il résulte que le groupe Ω — qui est le noyau de l'homomorphisme f — se réduit à zéro. Par conséquent $f_A(x)$ détermine une application isomorphe de A sur un certain groupe multiplicatif G . Comme la multiplication des nombres réels est commutative, il résulte que A est aussi commutatif.

Mais

$$x \perp y = y \perp x,$$

entraîne d'après (3):

$$x + yf_A(x) = y + xf_A(y),$$

quels que soient $x, y \in A$. Si $x, y \neq 0$, de l'égalité ci-dessus il résulte:

$$\frac{f_A(x) - 1}{x} = \frac{f_A(y) - 1}{y} = a \neq 0,$$

c'est-à-dire $f(x) = 1 + ax$, pour chaque $x \in A$, c.q.f.d.

§ 3. Pour déterminer les solutions mesurables discontinues et non périodique de l'équation (1), il est nécessaire de déterminer les groupes A mesurables.

Si nous posons

$$y = 1 + ax,$$

alors en vertu de l'égalité (1'), quand x décrit le groupe A , y décrit un groupe multiplicatif G . Par conséquent on a:

$$G = 1 + aA,$$

d'où

$$(9) \quad A = \frac{1}{a} G - \frac{1}{a}.$$

Réciproquement, si G est un groupe multiplicatif de nombres réels et si nous posons $f(x) = 1 + ax$, $a \neq 0$ pour $x \in A$ et $f(x) = 0$ pour $x \notin A$, alors l'ensemble A donné par la relation (9), est un groupe avec la loi de composition (3) et $f(x)$ une solution non périodique de l'équation (1).

La relation (9) étant linéaire, on voit que A et G sont simultanément mesurables ou non, et si l'un d'eux est de mesure positive, l'autre est aussi de mesure positive. De même, si $\dot{A} \neq \emptyset$ alors $\dot{G} \neq \emptyset$ et réciproquement.

THÉORÈME 1. *Si G est un groupe multiplicatif mesurable de nombres réels, alors on a :*

$$G = (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \quad \text{ou} \quad G = (0, \infty) \quad \text{ou} \quad mG = 0.$$

Démonstration. Si G est mesurable, les ensembles

$$G_+ = G \cap (0, \infty), \quad G_- = G \cap (-\infty, 0),$$

sont aussi mesurables comme intersections d'ensembles mesurables. Si $a \in G_-$, alors $aG_- \subset G_+$, d'où il résulte que $mG_+ \geq |a|mG_-$ donc $mG > 0$ implique $mG_+ > 0$.

Si nous désignons par :

$$U = \{x \mid x = \ln y, y \in G_+\} = \ln G_+$$

alors U est un groupe additif de nombres réels isomorphe au groupe G_+ . Mais comme les fonctions $\ln x$ ($x > 0$) et e^x sont absolument continues, de la relation ci-dessus il résulte que \dot{U} et G_+ sont simultanément mesurables, et que si la mesure de l'un d'eux est positive, la mesure de l'autre est aussi positive.

Mais si $mU > 0$, alors [2] l'intérieur de U n'est pas vide. Si $x_0 \in \dot{U}$, il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 , tel que $V_{x_0} \subset U$. Si x_1 est un élément arbitraire de U , alors l'ensemble $V_{x_1} = x_1 - x_0 + V_{x_0} \subset U$ est un voisinage de x_1 , c'est-à-dire $x_1 \in \dot{U}$, d'où on voit que U est un ensemble ouvert.

Dans ce cas $\overline{U} = F$ est un ensemble fermé. Soit $y \in F$ et $V_0 \subset U$ un voisinage de l'origine. Alors $y + V_0 = V_y$ est un voisinage de y et évidemment $V_y \subset F$, sinon $y \in U$ contrairement à l'hypothèse. Donc F est aussi ouvert, d'où il résulte que F est l'ensemble vide et par conséquent U coïncide avec l'ensemble des nombres réels.

Mais dans ce cas $G_+ = (\mathcal{J}, \infty)$ et $G_- = (-\infty, 0)$ ou $G_- = \emptyset$, c.q.f.d.

THÉORÈME 2. *Si $f(x)$ est une solution mesurable de l'équation (1), alors f est soit continue (et par conséquent de la forme (2)), soit presque partout nulle.*

Démonstration. Si f est périodique, le résultat a été déjà établi au § 2. Si f n'est pas périodique, alors elle est de la forme $f_A(x) = 1 + ax$, si $x \in A$, où A est donné par la relation (9). Si $mA > 0$, on a aussi $mG > 0$, d'où en vertu du théorème (1) et de la relation (9), A est de la forme :

$$A = (-\infty, 1/a) \quad \text{ou} \quad A = (-1/a, \infty) \quad \text{ou} \quad A = R - (1/a), \quad a \neq 0.$$

Il résulte que dans ce cas f est continue et de la forme (2, $b-d$).

Dans (1) on obtient les solutions continues $f(x)$ de l'équation (1), dans l'hypothèse que ces solutions soient continues sur toute la droite. Le théorème démontré montre qu'il n'est pas nécessaire de faire une hypothèse aussi restrictive.

Ainsi, il est suffisant de supposer que $f(x)$ ne soit pas périodique et continue latéralement en un point où elle ne s'annule pas, ou qu'elle ait en un point une limite latérale différente de zéro, car dans ces cas $\dot{A} \neq \emptyset$ et par suite les conditions du théorème ci-dessus sont satisfaites. Le même résultat s'obtient si nous admettons que $f(x)$ admet latéralement en un point des bornes de même signe.

Si $f(x)$ est une solution non périodique discontinue de l'équation (1), alors $\dot{A} = \emptyset$. Dans ce cas chaque point de A est point d'accumulation de l'ensemble CA et par suite f est discontinue en chaque point de A .

Travaux cités

[1] S. Gołąb et A. Schinzel, *Sur l'équation fonctionnelle $f[x + yf(x)] = f(x)f(y)$* , Publ. Math. 6 (1959), p. 113-125.

[2] H. Steinhaus, *Sur les distances des points des ensembles de mesure positive*, Fund. Math. 1 (1920), p. 100.

Reçu par la Rédaction le 26. 2. 1964
