ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXIV (1971)

Certaines propriétés des solutions non négatives d'un système parabolique d'équations

par J. CHABROWSKI (Katowice)

Dans la présente note nous considérons le système parabolique de la forme

$$(1)\qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^k(t,x)\,u_{x_ix_j}^k+\sum_{i=1}^{n} b_i^k(t,x)\,u_{x_i}^k+\sum_{i=1}^{N} c_i^k(t,x)\,u^i-u_t^k=0,$$

$k=1,\ldots,N$, $N\geqslant 1$ ($a_{ij}^k=a_{ji}^k$, $i,j=1,\ldots,n$, $k=1,\ldots,N$) dont les coefficients sont définis dans une couche $H=(0,T]\times E_n$ (E_n étant l'espace euclidien à n dimensions).

Il s'agit de prouver que la solution du système (1) non négative et continue dans H possède une limite presque partout dans E_n si t converge vers zéro (cf. théorème 1). Comme conséquence nous obtenons les théorèmes d'unicité du problème de Cauchy dont les solutions satisfont aux conditions initiales presque partout dans E_n (cf. théorèmes 3 et 4), ainsi qu'un théorème sur la représentation des solutions non négatives continues dans H sous la forme de l'intégrale généralisée de Fourier-Poisson par rapport aux fonctions localement sommables (cf. théorème 2). Les démonstrations des théorèmes 1 et 2 sont basées sur la méthode employée par Kato [7].

On suppose dans la suite du présent travail que les coefficients du système (1) sont bornés et hölderiens par rapport aux variables (t,x) dans H, ainsi que toutes les dérivées du premier ordre des coefficients $b_i^k(t,x)$ ($k=1,\ldots,N$, $i=1,\ldots,n$) par rapport aux variables x_j ($j=1,\ldots,n$) et les dérivées du second ordre des coefficients $a_{ij}^k(t,x)$ ($k=1,\ldots,N$, $i,j=1,\ldots,n$) par rapport aux mêmes variables.

On admet, en outre, que les formes quadratiques

$$A^k(\xi)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^k(t,x)\,\xi_i\xi_j,\qquad k=1,\ldots,N,$$

sont uniformément définies positives, c'est-à-dire qu'il existe un nombre $\nu>0$ tel que $A^k(\xi)\geqslant \nu|\xi|^2$ pour $(t,x)\in H$ et pour tout vecteur $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$, où $|\xi|^2=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2$.

Tout ceci étant supposé, il existe une matrice des solutions fondamentales $\{\Gamma_{pq}(t, x; \tau, y)\}$, $p, q = 1, \ldots, N$, du système (1) (cf. [8] ou [5], chap. 9).

Outre cela, on suppose toujours que

$$c_i^k(t, x) \geqslant 0 \tag{2}$$

pour $(t, x) \in H$ et pour $i \neq k$ $(i, k = 1, \ldots, N)$. Grâce à l'inégalité (2) tous les éléments $\Gamma_{pq}(t, x, \tau, y)$ de la matrice fondamentale sont non négatifs (cf. [3], théorème 2.1).

1. Introduisons d'abord deux définitions qui interviendront dans la suite. Une solution $\{u^i(t, x)\}$, $i = 1, \ldots, N$, du système (1) dans H est dite *non négative* lorsque $u^i(t, x) \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, N$, pour $(t, x) \in H$.

Une solution $\{u^i(t, x)\}$, $i = 1, \ldots, N$, du système (1) est dite *régulière* lorsque toute fonction $u^i(t, x)$ est continue dans H avec toutes les dérivées intervenant dans le système (1).

THÉORÈME 1. *Si* $\{u^i(t, x)\}$, $i = 1, \ldots, N$, *est une solution non négative et régulière dans* H, *alors* $\lim\limits_{t\to 0+} u^i(t, x) < +\infty$, $i = 1, \ldots, N$, *existe pour presque tout* $x \in E_n$.

Démonstration. On sait qu'il existe des mesures non négatives γ^j et m^j et une constante positive T_1 $(T_1 \leqslant T)$ telles que

$$u^k(t, x) = \sum_{j=1}^{N} \int_{E_n} \Gamma_{kj}(t, x; 0, y) \gamma^j(dy), \qquad k = 1, \ldots, N, \tag{3}$$

pour $(t, x) \in (0, T_1] \times E_n$ et de plus $\gamma^j = [\exp(\beta |y|^2) m^j]$, où $m_j(E_n) < \infty$ pour $j = 1, \ldots, N$ et β est une constante positive (cf. [4], théorème 4). Il résulte de la décomposition de Lebesgue (cf. [9], théorème 14.6, p. 33) qu'il existe une fonction φ^j non négative localement sommable dans E_n et une mesure non négative singulière μ^j telles que

$$\gamma^j(dy) = \varphi^j(y)\,dy + \mu^j(dy), \qquad j = 1, \ldots, N. \tag{4}$$

Puisque tout point d'une fonction sommable est un point de Lebesgue et la dérivée symétrique d'une mesure singulière est égale à zéro presque partout, on a

$$\lim_{a\to 0} a^{-n} \int_{|y-x|\leqslant a} |\varphi^j(y) - \varphi^j(x)|\,dy + \mu^j(dy) = 0, \qquad j = 1, \ldots, N,$$

presque partout dans E_n. On peut admettre, sans restreindre la généralité, que $x = 0$. Il est clair qu'on peut faire correspondre à tout $\varepsilon > 0$ un nombre $b > 0$ de façon que

$$a^{-n} \int_{|y|\leqslant a} |\varphi^j(y) - \varphi^j(0)|\,dy + \mu^j(dy) < \varepsilon, \qquad j = 1, \ldots, N, \tag{5}$$

pour $0 < a \leqslant 2b$. Choisissons pour chaque nombre $0 < t \leqslant \min(2b, T_1)$ un entier $P(t)$ tel qu'on ait

$$2^{P-1}\sqrt{t} \leqslant b < 2^P\sqrt{t}. \tag{6}$$

Il est évident que

$$\begin{aligned}
&\Big|u^j(t,0) - \sum_{k=1}^{N}\int_{E_n}\Gamma_{jk}(t,0;0,y)\varphi^k(0)\,dy\Big| \\
&\qquad \leqslant \sum_{k=1}^{N}\int_{|y|<\sqrt{t}}\Gamma_{jk}(t,0;0,y)[|\varphi^k(y)-\varphi^k(0)|\,dy+\mu^k(dy)]+ \\
&\qquad + \sum_{l=1}^{P}\int_{2^{l-1}\sqrt{t}\leqslant|y|<2^l\sqrt{t}}\sum_{k=1}^{N}\Gamma_{jk}(t,0;0,y)[|\varphi^k(y)-\varphi^k(0)|\,dy+\mu^k(dy)]+ \\
&+ \sum_{k=1}^{N}\int_{|y|\geqslant b}\Gamma_{jk}(t,0;0,y)\varphi^k(0)\,dy + \sum_{k=1}^{N}\int_{|y|\geqslant b}\Gamma_{jk}(t,0;0,y)\exp(\beta|y|^2)m^k(dy) \\
&\qquad\qquad = J_1+J_2+J_3+J_4.
\end{aligned}$$

Nous montrerons que les intégrales J_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ convergent vers 0 avec t. En vertu de l'inégalité (5) et de l'estimation bien connue des éléments de la matrice des solutions fondamentales (cf. [4], chap. 9, sec. 4) nous avons

$$\begin{aligned}
J_1 &\leqslant Ct^{-n/2}\int_{|y|<\sqrt{t}}\exp\Big(-\varrho\frac{|y|^2}{t}\Big)\Big[\sum_{k=1}^{N}|\varphi^k(y)-\varphi^k(0)|\,dy+\mu^k(dy)\Big] \\
&\leqslant Ct^{-n/2}\int_{|y|<\sqrt{t}}\sum_{k=1}^{N}|\varphi^k(y)-\varphi^k(0)|\,dy+\mu^k(dy) \leqslant CN\varepsilon;
\end{aligned}$$

C et ϱ étant des constantes positives.

D'une manière analogue on a

$$\begin{aligned}
J_2 &\leqslant \sum_{l=1}^{P}\sum_{k=1}^{N}C\int_{2^{l-1}\sqrt{t}\leqslant|y|<2^l\sqrt{t}}(2^lt)^{-n/2}\exp(-\varrho4^{l-1})2^{nl/2}[|\varphi^k(y)-\varphi^k(0)|\,dy+ \\
&+\mu^k(dy)] \leqslant \sum_{l=1}^{P}\sum_{k=1}^{N}C\int_{|y|<2^l\sqrt{t}}(2^lt)^{-n/2}\exp(-\varrho4^{l-1})2^{nl/2}[|\varphi^k(y)-\varphi^k(0)|\,dy+ \\
&\qquad +\mu^k(dy)].
\end{aligned}$$

Puisque $2^l\sqrt{t} \leqslant 2b$ pour $l = 1, \ldots, P$, donc d'après les conditions (5) et (6) nous obtenons

$$J_2 \leqslant CN\varepsilon\sum_{l=1}^{\infty}2^{nl/2}\exp(-\varrho4^{l-1}).$$

Il est aisé de constater que les inégalités suivantes:

$$J_3 \leqslant C \sum_{k=1}^{N} \varphi^k(0) t^{-n/2} \exp\left(-\frac{\varrho b^2}{2t}\right) \int_{E_n} \exp\left(-\frac{\varrho |y|^2}{2t}\right) dy \leqslant \varepsilon,$$

$$J_4 \leqslant C \sum_{k=1}^{N} t^{-n/2} \int_{|y|\geqslant b} \exp\left(-\frac{\varrho |y|^2}{t}\right) \exp(\beta |y|^2) m^k(dy)$$

$$\leqslant C \exp\left(-\frac{\varrho b^2}{2t}\right) t^{-n/2} \sum_{k=1}^{N} \int_{E_n} \exp\left[\left(\beta - \frac{\varrho}{2t}\right) |y|^2\right] m^k(dy)$$

$$\leqslant C \exp\left(-\frac{\varrho b^2}{2t}\right) t^{-n/2} \sum_{k=1}^{N} m^k(E_n) \leqslant \varepsilon$$

sont valables pour t suffisamment petit. D'autre part

$$\lim_{t\to 0+} \sum_{k=1}^{N} \int_{E_n} \Gamma_{jk}(t, 0; 0, y) \varphi^k(0) dy = \varphi^j(0)$$

(cf. [4], chap. 9, p. 240), donc $\lim_{t\to 0+} u^j(t, 0) = \varphi^j(0)$.

2. Nous rappelons deux limitations inférieures de la solution fondamentale $\Gamma_k(t, x; \tau, y)$ de l'équation

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^k(t, x) v_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i^k(t, x) v_{x_i} + c_k^k(t, x) v - v_t = 0, \tag{7}$$

dont nous faisons usage dans la démonstration du théorème qui le suit.

Dans la couche H l'inégalité $|x-y|^2 \leqslant d(t-\tau)$ entraîne l'inégalité

$$\Gamma_k(t, x; \tau, y) \geqslant M(d)(t-\tau)^{-n/2}, \tag{8}$$

d et $M(d)$ étant des constantes positives (cf. [6], p. 83).

Fixons un point $\bar{x} \in E_n$ et un nombre $\bar{t} \in (0, T]$. A tout $\varepsilon \in (0, \bar{t})$ on peut faire correspondre des nombres positifs $\Lambda = \Lambda(\bar{t}, \bar{x})$ et $\lambda = \lambda(\bar{t}, \bar{x})$ tels que

$$\Gamma_k(\bar{t}, \bar{x}; \tau, y) \geqslant \Lambda \exp(-\lambda |\bar{x}-y|^2) \tag{9}$$

pour $(\tau, y) \in [0, \bar{t}-\varepsilon] \times E_n$. L'estimation (9) a été établie par Besala (cf. [1]).

THÉORÈME 2. *Soit* $\{u^i(t, x)\}$, $i = 1, \ldots, N$, *une solution non négative et régulière du système* (1) *dans* H.

Si $\limsup_{t\to 0+} u^i(t, x) < \infty$, $i = 1, \ldots, N$, *pour tout* $x \in E_n$, *alors* $\lim_{t\to 0+} u^i(t, x) = \varphi^i(x)$, $i = 1, \ldots, N$, *existe pour presque tout* $x \in E_n$, *où les fonctions* φ^i

sont non négatives et localement sommables dans E_n et telles que

$$\int_{E_n} \varphi^k(y)\exp(-\lambda|y|^2)dy < \infty, \quad k = 1, \dots, N, \tag{10}$$

$$u^i(t, x) = \sum_{j=1}^{N} \int_{E_n} \Gamma_{ij}(t, x; 0, y)\varphi^j(y)dy, \quad i = 1, \dots, N, \tag{11}$$

pour $(t, x) \in (0, T_1] \times E_n$, λ *étant une constante positive.*

Démonstration. Nous commençons par démontrer que la dérivée symétrique supérieure de la mesure γ^j est finie pour tout $x \in E_n$. Puisque $\Gamma_k(t, x; \tau, y) \leqslant \Gamma_{kk}(t, x; \tau, y)$ (cf. [2], théorème 2.3), en fixant $x = 0$ on a en vertu de (3) et (8)

$$M\frac{\gamma^j(|y| < \sqrt{t})}{(\sqrt{t})^n} \leqslant Mt^{-n/2} \int_{|y|<\sqrt{t}} \gamma^j(dy) \leqslant \sum_{k=1}^{N} \int_{E_n} \Gamma_{jk}(t, 0; 0, y)\gamma^k(dy) = u^j(t, 0),$$

d'où

$$\overline{D}\mathrm{sym}\,\gamma^j(0) \leqslant \frac{1}{M} \limsup_{t\to 0+} u^j(t, 0) < +\infty.$$

Il résulte de [6] que la mesure γ^j est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue dans E_n, c'est-à-dire $\mu^j = 0$ pour $j = 1, \dots, N$. On déduit de là et des égalités (3) et (4) la représentation (11). Pour prouver que l'intégrale (10) est finie nous appliquons l'inégalité (9) en posant $\bar{x} = 0$, $\bar{t} = T_1$, $\varepsilon = T_1/2$, alors

$$\Gamma_k(T_1, 0; \tau, y) \geqslant A\exp(-\lambda|y|^2) \quad \text{pour } (\tau, y) \in \left[0, \frac{T_1}{2}\right] \times E_n.$$

En particulier pour $\tau = 0$ nous avons

$$\begin{aligned} A \int_{E_n} \exp(-\lambda|y|^2)\varphi^k(y)dy &\leqslant \int_{E_n} \Gamma_k(T_1, 0; 0, y)\varphi^k(y)dy \\ &\leqslant \int_{E_n} \Gamma_{kk}(T_1, 0; 0, y)\varphi^k(y)dy \leqslant u^k(T_1, 0). \end{aligned}$$

3. Les résultats qui précèdent permettent de tirer quelques conséquences concernant l'unicité des solutions du système (1). Le théorème suivant est une conséquence immédiate du théorème 2 qui vient d'être démontré.

THÉORÈME 3. *Soient* $\{u^j(t, x)\}$ *et* $\{v^j(t, x)\}$, $j = 1, \dots, N$, *deux solutions régulières dans* H *du système* (2) *et satisfaisant aux conditions*

$$u^j(t, x) - v^j(t, x) \geqslant 0, \quad j = 1, \dots, N,$$

pour $(t, x) \in H$

$$\limsup_{t\to 0+} [u^j(t, x) - v^j(t, x)] < +\infty, \quad j = 1, \dots, N,$$

pour tout $x \in E_n$ *et*

$$\lim_{t\to 0+} [u^j(t, x) - v^j(t, x)] = 0, \quad j = 1, \ldots, N,$$

presque partout dans E_n.

Alors

$$u^j(t, x) = v^j(t, x), \quad j = 1, \ldots, N,$$

pour $(t, x) \in H$.

En s'appuyant sur le théorème 2 il est facile de démontrer l'unicité dans une classe de fonctions non bornées, à savoir:

THÉORÈME 4. *Soient* $\{u_k^j(t, x)\}$, $j = 1, \ldots, N$, $k = 1, 2$, *deux solutions régulières dans* H *du système* (1) *et satisfaisant aux conditions*

$$u_k^j(t, x) \geqslant -M\exp(a|x|^2), \quad j = 1, \ldots, N, \ k = 1, 2,$$

pour tout $(t, x) \in H$ (M *et* a *étant des constantes positives*) *et*

$$\limsup_{t\to 0+} u_k^j(t, x) < +\infty, \quad j = 1, \ldots, N, \ k = 1, 2,$$

pour tout $x \in E_n$ *et de plus*

$$\lim_{t\to 0+} u_1^j(t, x) = \lim_{t\to 0+} u_2^j(t, x), \quad j = 1, \ldots, N,$$

presque partout dans E_n.

Alors

$$u_1^j(t, x) = u_2^j(t, x), \quad j = 1, \ldots, N,$$

pour $(t, x) \in H$.

Démonstration. Introduisons les fonctions auxiliaires

$$v_{\tau,k}^j(t, x) = u_k^j(t, x) + M \sum_{k=1}^{N} \int_{E_n} \Gamma_{jk}(t, x; \tau, y)\exp(a|y|^2)\,dy,$$

$j = 1, \ldots, N$, $k = 1, 2$, pour $(t, x) \in (\tau, \delta] \times E_n$, δ étant un nombre positif convenablement choisi (cf. [5], chap. 9, sec. 4, théorème 3). Il est évident que $\lim_{t\to\tau+0} v_{\tau,k}^j(t, x) \geqslant 0$. Remarquons que les fonctions $v_{\tau,k}^j$ sont bornées inférieurement dans $(\tau, \delta] \times E_n$; il résulte donc du théorème 1 dans [2] que $v_{\tau,k}^j(t, x) \geqslant 0$ pour $(t, x) \in (\tau, \delta] \times E_n$, $j = 1, \ldots, N$, $k = 1, 2$. En particulier $v_{0,k}^j(t, x) \geqslant 0$ pour $(t, x) \in (0, \delta] \times E_n$, $j = 1, \ldots, N$, $k = 1, 2$. Il est clair que les fonctions $\{v_{0,k}^j(t, x)\}$, $j = 1, \ldots, N$, $k = 1, 2$, satisfont aux hypothèses du théorème 2 avec les mêmes conditions initiales. Il résulte de là que $u_1^j(t, x) = u_2^j(t, x)$, $j = 1, \ldots, N$, pour $(t, x) \in (0, \delta] \times E_n$, ce qui achève la démonstration du théorème dans le cas $\delta = T$. Si $\delta < T$ on n'a qu'à diviser la couche à l'aide des plans $t = l\delta$ où $l = 1, \ldots, r$ et à établir de proche en proche l'égalité $u_1^j = u_2^j$ dans les couches $(l\delta < t < (l+1)\delta) \times E_n$.

Travaux cités

[1] P. Besala, *On a certain property of the fundamental solution of a linear parabolic equations the last coefficient of which is unbounded*, Bull. Acad. Polon. Sci., sér. math., astr. et phys. 11 (4) (1963), p. 155-158.

[2] — *Limitation of solutions of non-linear parabolic equations in unbounded domains*, Ann. Polon. Math. 17 (1965), p. 25-47.

[3] J. Chabrowski, *Les solutions non négatives d'un système parabolique d'équations*, ibidem 19 (1967), p. 193-197.

[4] — *Les propriétés des solutions non négatives d'un système parabolique d'équations*, ibidem 22 (1970), p. 223-331.

[5] A. Friedman, *Partial differential equations of parabolic type*, Printice-Hall. Englewood Cliffs, N. J., 1964.

[6] А. М. Ильин, А. С. Калашников, О. А. Олейник, *Линейные уравнения второго порядка параболического типа*, Усп. Мат. Наук 17 (3) (1962), p. 3-143.

[7] M. Kato, *On positive solutions of the heat equation*, Nagoya Math. J. 30 (1967), p. 203-207.

[8] W. Pogorzelski, *Étude de la matrice des solutions fondamentales du système parabolique d'équations aux dérivées partielles*, Ricerche Mat. 7 (1958), p. 153-185.

[9] S. Saks, *Theory of the integral*, Monografie Matematyczne 7, Warszawa-Lwów 1937.

Reçu par la Rédaction le 31. 3. 1969